

## 1.1. Кинематика

**1.1** Катер, двигаясь вниз по реке, обогнал плот в пункте  $A$ . Через  $\tau = 60$  мин после этого он повернул обратно и затем встретил плот на расстоянии  $l = 6,0$  км ниже пункта  $A$ . Найти скорость течения, если при движении в обоих направлениях мотор катера работал в одном режиме.

Пусть скорость катера относительно реки есть  $v_k$ , а  $v_p$  - скорость реки (плота). При решении надо учесть, что скорость катера относительно берега, когда он движется по течению, есть  $v_k + v_p$ , а против течения,  $v_k - v_p$ . Задачу можно решить тремя способами.

*Первый способ.* Полное время до встречи можно записать как

$$\frac{l}{v_p} = \tau + \frac{(v_k + v_p)\tau - l}{v_k - v_p}.$$

Откуда находим  $v_p = l/2\tau$ ;

*Второй способ.* Пусть  $t$  - время движения катера против течения. Тогда расстояние пройденное катером за время  $\tau$  есть:

$$(v_k + v_p)\tau = v_p(t + \tau) + (v_k - v_p)t.$$

Учитывая, что  $v_p(t + \tau) = l$ , получаем  $v_p = l/2\tau$ .

*Третий способ.* Пусть скорость катера относительно реки (или плота) есть  $v_k$ . Это означает, что в системе отсчета, в которой река (плот) неподвижна, катер движется в одну и другую сторону с одной и той же скоростью  $v_k$ . Время движения от плота -  $\tau$ . Поскольку в противоположном направлении скорость катера не меняется, то двигаясь в противоположном направлении катер до встречи с плотом затратит также время  $\tau$ . Полное время до встречи тогда равно  $2\tau$ . За

это время плот переместится на расстояние  $l$  относительно берега. Следовательно скорость реки (плота) равна  $l/2\tau$ .

**1.3.** Пусть  $t_1$  - время, в течение которого была пройдена первая половина пути, а  $t_2$  - время движения со скоростью  $v_1$  и скоростью  $v_2$ . Тогда

$$v_{cp} = \frac{\text{пройденный путь}}{\text{затраченное время}} = \frac{v_0 t_1 + v_1 t_2 + v_2 t_2}{t_1 + 2t_2}.$$

Так как  $v_0 t_1 = v_1 t_2 + v_2 t_2$ , то получаем

$$v_{cp} = \frac{2v_0(v_1 + v_2)}{v_1 + v_2 + 2v_0}.$$

**1.5.** При равномерном движении радиус векторы частиц меняются со временем по закону

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= \mathbf{v}_1 t + \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2(t) &= \mathbf{v}_2 t + \mathbf{r}_2. \end{aligned}$$

Момент времени столкновения  $t$  определяется из условия

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(t)$$

и равен

$$t = \frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}.$$

Подставляя  $t$  в предыдущее равенство получим соотношение между векторами

$$\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|}.$$

**1.7.** Чтобы двигаться по прямой  $AB$  первый пловец должен учитывать течение реки и плыть под некоторым углом к  $AB$

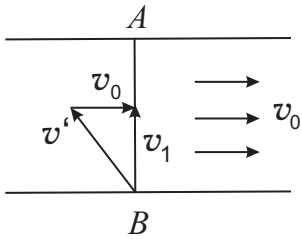


Рис. 1.

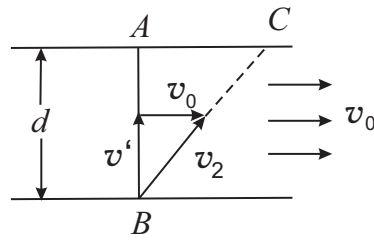


Рис. 2.

со скоростью  $v'$ . (см.рис. 1). Результирующая скорость равна  $v_1$ . Второй пловец плывет вдоль  $AB$ , но за счет течения будет двигаться (относительно берега) вдоль  $BC$  со скоростью  $v_2$  (рис. 2).

Время движения первого пловца  $t_1 = d/v_1$ , время движения второго

$$t_2 = \frac{BC}{v_2} + \frac{AC}{u}.$$

Приравнивая  $t_1$  к  $t_2$  и выражая  $BC$ ,  $AC$ ,  $v_1$  и  $v_2$  через  $v_0$  и  $v'$ , получим

$$u = \frac{v_0}{\left(v'/\sqrt{v'^2 - v_0^2}\right) - 1}.$$

**1.10.**(5) Движение происходит в вертикальной плоскости  $(x, y)$ .

Сила тяжести действует вдоль оси  $y$ . Если  $(x_1, y_1)$ - координаты тела брошенного вертикально вверх, а  $(x_2, y_2)$  - координаты второго тела, то расстояние  $r$  между телами в момент  $t$  есть

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

**1.15.** а) Чтобы найти время падения болта на пол лифта

достаточно найти ускорение болта относительно лифта и использовать равноускоренный закон движения.

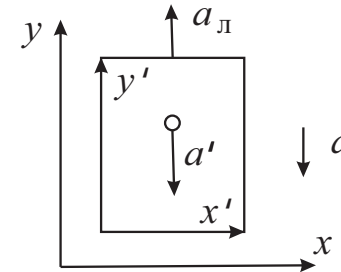


Рис. 3.

Будем рассматривать две системы отсчета, одну связанную с лифтом, а другую с шахтой (рис. 3). Первая система отсчета движется относительно второй с ускорением  $a_{л}$ . Ускорение болта относительно лифта обозначим через  $a'$ , а ускорение относительно шахты через  $a$ . Тогда

$$a = a_{л} + a'.$$

Так как  $a = -g$ , то

$$a' = a - a_{л} = -(g + a_{л}) = \text{const}.$$

Закон равноускоренного движения болта относительно лифта имеет вид

$$y' = \frac{a't^2}{2} + h = -\frac{(g + a_{л})t^2}{2} + h,$$

где  $h$  - высота лифта и время отсчитывается от момента отрыва болта от потолка. Время падения  $t_1$  находится из условия, что при  $t = t_1$ ,  $y' = 0$  и равно

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g + a_{л}}}.$$

**1.17.** Пусть скорость по шоссе есть  $v$ , тогда по полю -  $v/\eta$ . Введем обозначения  $AD = L$ , а  $CD = x$ . Тогда полное время движения равно

$$t(x) = \frac{L - x}{v} + \frac{\eta\sqrt{l^2 + x^2}}{v}.$$

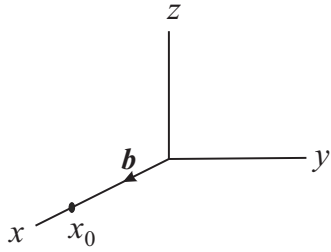


Рис. 4.

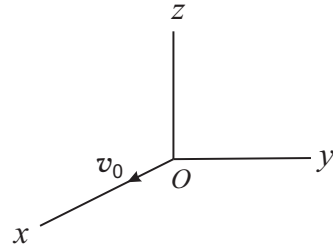


Рис. 5.

Требуется найти такое  $x$ , чтобы  $t$  было минимальное. Для этого необходимо это решить уравнение

$$\frac{dt(x)}{dx} = 0.$$

Решая уравнение, получаем

$$x = \frac{l}{\sqrt{\eta^2 - 1}}.$$

**1.20.** а) Дифференцируя  $\mathbf{r} = \mathbf{b}t(1 - \alpha t)$  один раз, находим скорость  $\mathbf{v} = \mathbf{b}(1 - 2\alpha t)$ , а после дифференцирования скорости получаем ускорение  $\mathbf{a} = -2\alpha\mathbf{b}$ .

б) Пусть движение начинается при  $t = 0$  и  $\mathbf{r}(0) = 0$ . Найдем все  $t$  при которых  $\mathbf{r} = 0$ . Легко найти, что  $t_1 = 0$  и  $t_2 = 1/\alpha$ . Таким образом, частица через  $t = 1/\alpha$  вернется в начало координат.

Найдем пройденный путь. Отметим, что частица движется вдоль прямой параллельной вектору  $\mathbf{b}$ . Выберем систему координат, в которой ось  $x$  направлена вдоль вектора  $\mathbf{b}$  (рис. 4). В такой системе координат частица движется вдоль оси  $x$  до точки  $x_0$  останавливается в ней и движется обратно. Момент времени остановки  $t_0$  определяется из условия

$$x(t) = bt(1 - \alpha t) \quad v = \dot{x} = b(1 - 2\alpha t) = 0,$$

где  $b = |\mathbf{b}|$ . Откуда получаем  $t_0 = 1/2\alpha$ . Пройденный путь равен  $s = 2x_0 = 2x(t_0) = b/2\alpha$

**1.21.** В данном случае имеем прямолинейное, движение в направлении постоянного вектора  $v_0$ . Выберем систему координат, ось  $x$  которой направлена вдоль постоянного вектора  $v_0$  (рис. 5) В такой системе частица движется вдоль оси  $x$  со скоростью  $v = |\mathbf{v}| = v_0(1 - t/\tau)$ , с ускорением  $a = \dot{v} = -v_0/\tau = \text{const}$ . Так как ускорение постоянно, начальное значение скорости есть  $v_0$  и частица начинает двигаться из начала координат, то равноускоренный закон движения вдоль оси  $x$  есть

$$x = -\frac{v_0 t^2}{2\tau} + v_0 t = v_0 t \left(1 - \frac{t}{2\tau}\right).$$

Задавая в последнем равенстве  $t$ , можно определить положение частицы. Задавая расстояние  $x$  от начала координат можно определить соответствующие моменты времени.

**1.22.** а) Найдем ускорение точки. По определению имеем

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} \alpha \sqrt{x} = \frac{\alpha^2}{2} = \text{const}.$$

Откуда следует, что движение равноускоренное. Используя это условие и определяя начальное положение точки и начальную скорость, находим скорость и закон движения

$$v = \frac{\alpha^2 t}{2}, \quad x = \frac{\alpha^2 t^2}{4}.$$

б) Средняя скорость определяется как  $v_{\text{cp}} = s/T$ , где  $T$  - время движения. Определяя  $T$  из закона движения, находим

$$v_{\text{cp}} = \frac{\alpha \sqrt{s}}{2}.$$

1.24. а) Чтобы найти траекторию движения,  $y = y(x)$ , достаточно исключить время  $t$  из уравнений

$$x = \alpha t \quad y = \beta t^2.$$

Выражая  $t$  из первого уравнения и подставляя во второе, получим  $y = \beta x^2 / \alpha^2$ . Траектория парабола;

б)  $|\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ ; в)  $|\mathbf{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$ ; г)  $\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{a}||\mathbf{v}|}$ .

1.28. Радиус-вектор частицы, начинающей движение из начала координат в поле силы тяжести, есть

$$\mathbf{r} = -\frac{gt^2}{2} + \mathbf{v}_0 t,$$

или в проекциях

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha$$

где  $\mathbf{g} = (0, g)$  и  $g$  - ускорение свободного падения.

а) Время движения  $t_0$  находится из условия  $y = 0$ . Откуда  $t_0 = 2v_0 \sin \alpha / g$ ;

б) Чтобы найти максимальную высоту  $h_{\max}$ , найдем вначале время подъема  $t_1 = v_0 \sin \alpha / g$  из условия  $\dot{y} = 0$ . Подставляя затем  $t_1$  в  $y(t)$ , находим  $h = v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g$ . Дальность полета определяется как  $L = x_{\max} = x(t_0) = v_0^2 \sin 2\alpha / g$ . Из условия  $h_{\max} = x_{\max}$ , находим  $\operatorname{ctg} \alpha = 1/4$ . (Легко найти из уравнения  $\sin 2\alpha = Lg/v_0^2$ , что одному и тому же  $L$  соответствуют два  $\alpha$ ;

в) Выражая время  $t$  из закона движения вдоль оси  $x$  и подставляя его в закон движения вдоль  $y$ , получим

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

- парабола.

1.29. а) Исходя из определения радиус кривизны в начале координат есть

$$\rho_0 = \frac{v_0^2}{a_n} = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha},$$

где  $v_0$  - начальная скорость и  $\alpha$  - угол между начальной скоростью и горизонтальной прямой (см. рис. 6). Так скорость в точке максимального подъема равна  $v_0 \cos \alpha$ , а нормальное ускорение  $a_n = g$ , то радиус кривизны в этой точке есть  $\rho_M = v_0^2 \cos^2 \alpha / g$ . Тогда из условия  $\rho_0 = \eta \rho_M$  получаем  $\cos^3 \alpha = \eta^{-1}$ . Откуда  $\alpha = \pi/3$ ; б) Радиус кривизны в точке  $M$  есть  $\rho_M = h = v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g$  (см задачу 1.28). Тогда

$$\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}.$$

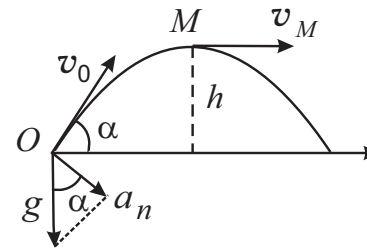


Рис. 6.

1.30. Будем отсчитывать потенциальную энергию от точки  $O$  (см. рис. 7). Тогда из закона сохранения энергии следует, что шарик упадет в точку  $O$  со скоростью  $v_0 = \sqrt{2gh}$ . При упругом падении с такой же по величине скоростью он отскочит от плоскости. Удобно

выбрать систему координат как показано на рис. 7. Тогда, в силу равенства при упругом падении угла падения и угла отражения, скорость отражения будет составлять угол  $\alpha$  с осью  $y$ . Далее задача решается аналогично задаче 1.28, за исключением того, что сила, действующая на шарик, направлена под углом  $\alpha$  к вертикали (см. рис. 8).

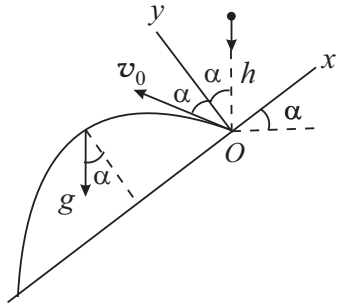


Рис. 7.

**1.31.** Пусть угол наклона начальной скорости к оси абсцисс есть  $\alpha$ . Тогда время движения снаряда равно (см. задачу 1.28)  $t = 2v_0 \sin \alpha / g$ . Откуда  $\sin \alpha = gt / 2v_0$ . Так как расстояние пройденное снарядом вдоль оси абсцисс есть  $L = v_0 t \cos \alpha$ , то  $\cos \alpha = L / v_0 t$ . Используя условие  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , получим уравнение для определения  $t$ , решая которое находим

$$t_{1,2} = 2 \left( \frac{v_0}{g} \right)^2 \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \left( \frac{gL}{v_0^2} \right)^2} \right\}.$$

Время движения определяется в зависимости о начального угла.

**1.34.** а) Так как  $\dot{x} = \alpha$  и  $x_0 = x(0) = 0$ , то  $x = \alpha t + x_0 = \alpha t$ . Скорость вдоль оси  $y$  равна  $\dot{y} = \beta x$ , тогда для ускорения имеем  $\ddot{y} = \beta \dot{x} = \beta \alpha = \text{const}$ . Откуда следует, что движение вдоль  $y$  равноускоренное и закон движения с учетом начальных условий есть

$$y = \frac{\alpha \beta}{2} t^2.$$

Ускорения частицы вдоль осей равны  $a_x = \ddot{x} = 0$ ,  $a_y = \ddot{y} = \alpha \beta$ , поэтому величина ускорения есть  $a = \alpha \beta$ .

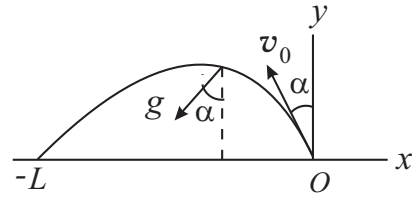


Рис. 8.

Исключая  $t$  с помощью равенства  $t = x/\alpha$ , получаем из последнего равенства для  $y$  уравнение траектории (парабола)

$$y = \frac{\beta}{2\alpha} x^2.$$

б) Радиус кривизны равен

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 x^2}{a_n}.$$

Нормальное ускорение равно (см. рис. 9)  $a_n = a \cos \varphi = \alpha \beta \cos \varphi$ . Так как  $\text{tg} \varphi = y' = \beta x / \alpha$ , то находя  $\cos \varphi$ , в результате получим

$$\rho = \frac{\alpha}{\beta} \left( 1 + \beta^2 x^2 / \alpha^2 \right)^{3/2}.$$

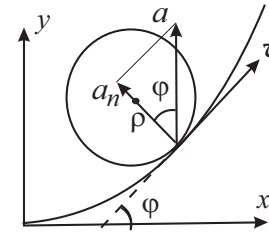


Рис. 9.

**1.36.** Полное ускорение равно  $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$ , где  $a_n = v^2/R = \alpha^2 t^2/R$  - нормальное ускорение и  $a_\tau = \dot{v} = \alpha$  - касательное ускорение. Находя пройденный путь  $S$  из равенства  $\dot{S} = v = \alpha t$  и определяя момент времени  $t$  из условия  $S = 2\pi Rn$ , найдем  $a_n$  и окончательно

$$a = \alpha \sqrt{1 + (4\pi n)^2}.$$

**1.38.** Если  $\varphi$  угол между касательным ускорением  $a_\tau$  и полным ускорением, то  $\text{tg} \varphi = a_n/a_\tau$ , где  $a_n$  - нормальное ускорение. Записывая скорость как  $v = ks$ , где  $k$  - константа, и вычисляя ускорения,  $a_\tau = \dot{v} = (dv/ds)ds/dt$ ,  $a_n = v^2/R$ , получим  $\text{tg} \varphi = 2s/R$ .

**1.39.** Находя скорость движения как  $v = \dot{l}$  и ускорения  $a_\tau = \ddot{l}$ ,  $a_n = v^2/R$ , получим полное ускорение  $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$ .

**1.42.** а) Так как величина скорости постоянна, то  $a_\tau = \dot{v} = 0$ . Поэтому полное ускорение совпадает с нормальным,  $a = a_n$  (рис. 10). Проекции скорости частицы есть  $v_x = \dot{x}$ ,  $v_y = \dot{y} = 2\alpha x\dot{x}$  и соответственно ускорения равны  $a_x = \ddot{x}$ ,  $a_y = \ddot{y} = 2\alpha\dot{x}^2 + 2\alpha x\ddot{x}$ .

В точке  $x = 0$  скорость направлена вдоль оси  $x$  (касательно к графику траектории),  $v_x = v$ ,  $v_y = 0$ . Для ускорений будем иметь  $a_x = a_\tau = 0$ ,  $a_y = 2\alpha v^2$ . Так как  $a_y = a_n = v^2/R$ , где  $R$  - радиус кривизны, то из последнего равенства получаем  $R = 1/2\alpha$ .

б) В точке  $x = 0$  скорость направлена вдоль оси  $x$ , по касательной к графику (см. рис. 11) и ее проекции есть  $v_x = \dot{x} = \pm v$ ,  $v_y = \dot{y} = 0$ , для ускорений имеем  $a_x = a_\tau = 0$ ,  $a_y = a_n = a = \ddot{y}$ .

Чтобы найти проекцию ускорения  $\ddot{y} = a_n$ , продифференцируем уравнение эллипса  $x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 = 1$  два раза по времени. После первого дифференцирования получим  $\dot{y} = -(\beta/\alpha)^2(x/y)\dot{x}$ . После второго, в точке  $x = 0$ , -

$$a = \ddot{y} = \frac{\beta v^2}{\alpha^2}.$$

Так как  $\ddot{y} = a_n$ , то  $R = \alpha^2/\beta$ .

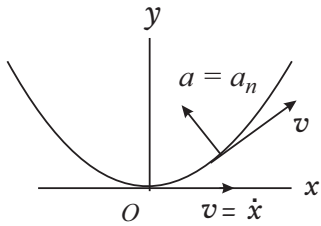


Рис. 10.

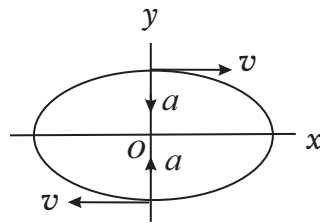


Рис. 11.

**1.44.** Полное ускорение точки равно  $a = \sqrt{\dot{v}^2 + (v^2/R)^2}$ . Определяя  $v = R\dot{\varphi} = R2\beta t$  и  $\dot{v}$ , получим  $a = (v/t)\sqrt{1 + 4\beta^2 t^4}$ .

**1.45.**(21) Пусть некоторая точка  $A$  лежит в концевой части снаряда на его поверхности и ее координата вдоль оси ствола в произвольный момент времени есть  $x$ . Если  $\varepsilon = \text{const}$  угловое ускорение и  $\omega = \varepsilon t$  угловая скорость, то угол поворота снаряда есть

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\omega t}{2}.$$

Пусть за время  $\tau$  точка  $A$  пройдет расстояние  $l$  вдоль ствола и совершит  $n = 2$  оборота вокруг оси ствола. Тогда при  $t = \tau$  из предыдущего равенства получим

$$\omega = \frac{4\pi n}{\tau}.$$

Чтобы найти время движения  $\tau$ , достаточно воспользоваться равноускоренным законом прямолинейного движения  $x = at^2/2$ , связью ускорения  $a$  со скоростью  $v$  и условием того, что при  $t = \tau$   $x = l$ . В результате получим  $\tau = 2l/v$  и  $\omega = 2\pi nv/l$ .

**1.47.** Тело остановится, когда  $\omega = \dot{\varphi} = 0$ . Откуда получаем время остановки  $t_0 = \sqrt{a/3b}$ . Среднее угловая скорость  $\langle \omega \rangle$  и ускорение  $\langle \beta \rangle$  определяются как

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \dot{\varphi} dt = \frac{2a}{3} \quad \langle \beta \rangle = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \ddot{\varphi} dt = -\sqrt{3ab}.$$

**1.48.** Точка движется по окружности, лежащей в плоскости перпендикулярной оси вращения. Величина угловой скорости находится из равенства  $\dot{\omega} = \beta = at$ . Из рис. 12 видно, что  $\text{tg } \varphi = a_n/a_\tau$ . Если  $v = \omega r$  - линейная скорость точки, где  $r$  - радиус окружности, то  $a_\tau = \dot{v}$ . Нормальное ускорение

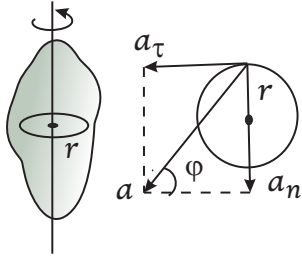


Рис. 12.

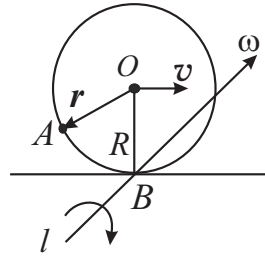


Рис. 13.

равно  $a_n = v^2/r$ . Откуда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha t^3}{4}.$$

Искомое время находим из условия

$$\alpha t^3 = 4 \operatorname{tg}(\pi/3).$$

**1.52.** а) В любой момент времени тело совершает чистое вращение вокруг мгновенной оси вращения  $l$ , проходящей через точку  $B$  касания колеса с поверхностью, перпендикулярно направлению скорости центра инерции  $O$  и плоскости колеса (см. 13). Поэтому  $\omega = v/R$ . Так как  $v = \text{const}$ , то и вектор угловой скорости  $\omega$  постоянен и лежит вдоль  $l$ .

В общем случае скорость и ускорение произвольной точки  $A$  твердого тела есть

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]],$$

где  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{a}_0$  - скорость и ускорение центра инерции колеса, а  $\boldsymbol{\beta}$  - угловое ускорение. Учитывая, что  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  постоянные векторы,  $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}$ , а также, что для любых трех

векторов выполняется равенство

$$[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

получим

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{R} \frac{\mathbf{r}}{R}.$$

Так как  $\mathbf{r}/R$  - единичный вектор, направленный из точки  $O$  в точку  $A$ , то  $\mathbf{a}$  направлен к центру колеса (из точки  $A$ ). Величина ускорения равна  $a = v^2/R$ .

## 1.2. Динамика

**1.59.** Из второго закона Ньютон,  $m\ddot{x} = F$ , получим  $F = m(2\alpha - 6\beta t)$ . Искомые величины можно найти, определяя моменты времени соответствующие точке поворота, в которой  $\dot{x} = 0$ , и нахождению частицы в точке  $x = 0$ .

**1.60.** Для решения задачи достаточно записать закон Ньютона  $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$  вдоль координатных осей. Так как радиус вектор частицы равен  $\mathbf{r} = (x, y) = (A \sin \omega t, B \cos \omega t)$ , то  $\mathbf{F} = -\omega^2 \mathbf{r}$ .

**1.62.** Пусть  $R$  - подъемная сила. Записывая второй закон Ньютона для массы  $m$ , а затем для массы  $m - m_6$ , где  $m_6$  - масса балласта, получим из этих соотношений  $m_6 = 2ma / (a + g)$ .

**1.63.** Если  $F_0$  сила натяжения нити между массами  $m_0$  и  $m_1$ , а  $F$  - между массами  $m_1$  и  $m_2$ , то

$$\begin{aligned} m_0 a &= m_0 g - F_0 \\ m_1 a &= F_0 - k m_1 g - F \\ m_2 a &= F - k m_2 g. \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно  $a$ ,  $F$  и  $F_0$ , получаем искомые величины.

**1.67.** Отношения масс случае (а) можно найти из условия, что результирующая сила,  $F_1$ , действующая на массу  $m_1$ , должна быть направлена к вершине наклонной плоскости, а результирующая сила  $F_2$ , действующая на массу  $m_2$ , - вертикально вниз вдоль катета треугольника. В случае (б) направления сил противоположны.

**1.68.** Для решения задачи достаточно записать второй закон Ньютона для первого тела вдоль наклонной плоскости, а для второго - вдоль катета и учесть, что сила трения равна  $F_{\text{тр}} = kN$ , где  $N$  - реакция на нормальное давление, и направлена

против движения. Совместное решение двух получившихся уравнений дает искомую величину.

**1.71.** При изменении угла  $\alpha$  длина наклонной плоскости  $S$  будет изменяться. Для ускорения  $a$  пройденный вдоль наклонной плоскости путь равен

$$S = \frac{at^2}{2},$$

где  $t$  - время движения. Откуда

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2L}{a \cos \alpha}}$$

и  $L = \text{const}$  - длина катета, лежащего в основании наклонной плоскости. Определяя ускорение из второго закона Ньютона, получим для  $t$

$$t(\alpha) = \frac{\sqrt{2L}}{\sqrt{g \cos \alpha (\sin \alpha - k \cos \alpha)}}.$$

Искомый угол находится из условия экстремума  $t'(\alpha) = 0$ , которое сводится к уравнению  $\text{tg } 2\alpha = -1/k$ .

**1.73.** Используя второй закон Ньютона, и учитывая, что ускорение бруска равно нулю, получим для силы натяжения нити  $F$ :

$$F = \frac{kmg}{\cos \alpha + k \sin \alpha}.$$

Это выражение принимает минимальное значение, когда знаменатель максимален. Определяя максимум функции, найдем, что угол  $\alpha$  удовлетворяет условию

$$\text{tg } \alpha = k.$$



Значение  $F$  в этом случае равно

$$F = \frac{kmg}{\sqrt{1+k^2}}.$$

**1.74.** Груз и муфта создают натяжение нити. В свою очередь нить, по третьему закону Ньютона, с той же силой натяжения действует на груз и муфту. Но так как действие нити на муфту проявляется только в виде трения, то сила натяжения нити равна силе трения  $F_{\text{тр}}$  муфты о нить. С такой же по величине силой нить действует на груз.

Выберем систему отсчета, связанную с неподвижным блоком. Если ускорение груза (и следовательно нити) относительно этой системы отсчета равно  $a$ , то ускорение муфты относительно этой системы будет  $a' - a$ , так как муфта движется относительно нити с ускорением  $a'$ , а сама нить движется в противоположном направлении с ускорением  $a$ . Составляя далее уравнения движения для муфты и груза (используя второй закон Ньютона), получим для ускорения  $a$

$$a = g - \frac{F_{\text{тр}}}{M}$$

и силы трения

$$F_{\text{тр}} = \frac{mM(2g - a')}{m + M}.$$

**1.75.** Если  $a'$  - ускорения грузов относительно кабины, то их ускорения относительно неподвижной системы отсчета есть

$$a_1 = a_0 + a' \quad a_2 = a_0 - a'$$

( $m_1$  движется вверх,  $m_2$  - вниз). Записывая второй закон Ньютона для каждого тела и решая полученную систему уравнений, получим

$$a' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g - a_0).$$

Сила, действующая на потолок со стороны блока (из-за натяжения нитей) равна  $F = 2T$ , где  $T$  - натяжение нити. Из уравнений движения получим

$$F = -\frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}(g - a_0).$$

**1.76.** Пусть на массу  $m_0$  со стороны нити действует сила натяжения  $F_1$ . На массы  $m_1$  и  $m_2$  со стороны нити действует сила  $F_2$ . По третьему закону Ньютона массы  $m_1$  и  $m_2$  действуют на нить с противоположной силой  $-F_2$ . Поэтому результирующая сила, действующая на движущийся блок (блок  $A$ ) есть

$$2F_2 - F_1.$$

Запишем второй закон Ньютона для всех тел, включая блок  $A$ . Пусть ускорение  $m_0$  есть  $a$ , а ускорения  $m_1, m_2$  есть соответственно  $\pm a'$ . Пусть, например, тело  $m_0$  движется вправо, а тело  $m_1$  относительно блока  $A$  вверх. Тогда относительно неподвижной поверхности уравнения движения принимают вид (предполагается, что все тела движутся вниз)

$$m_0a = F_1$$

$$m_Aa = 2F_2 - F_1$$

$$m_1(a - a') = m_1g - F_2$$

$$m_2(a + a') = m_2 - F_2.$$

Решая эту систему, при условии, что масса блока  $A$   $m_A \rightarrow 0$ , получим

$$a_1 = g \frac{4m_1m_2 + (m_1 - m_2)m_0}{4m_1m_2 + (m_1 + m_2)m_0}.$$

**1.77.** Прежде заметим, что если брусок движется с постоянной скоростью, то тело 2 не испытывает действие силы в направлении движения бруска. Когда брусок движется с ускорением

$a$ , то в направлении его движения на тело 2 действует сила  $N_2 = ma$ , представляющая реакцию боковую поверхность бруска на нормальное давление тела. Если  $k$  - коэффициент трения покоя, то при достаточно большом ускорении  $a$  максимальное значение силы трения покоя, равное  $kN_2 = kma$ , будет достаточно большим, чтобы тело 2 (и следовательно тело 1) оставалось бы неподвижным относительно бруска. Поэтому имеет смысл говорить о минимальном ускорении при котором тела не движутся.

Рассмотрим сначала случай, когда тела перемещаются относительно бруска. Пусть брусок перемещается с ускорением  $a$ , а тело 1 движется в противоположную сторону с ускорением  $a'$  по поверхности бруска. Записывая второй закон Ньютона для каждого тела относительно неподвижной поверхности, получим систему уравнений движения

$$\begin{aligned} m(a - a') &= F_{\text{н}} - F_{\text{тр}1} \\ mg &= N_1 \\ ma' &= mg - F_{\text{н}} - F_{\text{тр}2} \\ ma &= N_2, \end{aligned}$$

где  $F_{\text{тр}1,2}$  - силы трения, а  $N_{1,2}$  - реакции опоры, действующие на тела.

Если тела неподвижны, то  $a' = 0$  и

$$\begin{aligned} F_{\text{н}} - ma &= F_{\text{тр}1} \\ mg - F_{\text{н}} &= F_{\text{тр}2}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы движения не происходило сила, действующая на тело, не должна превышать максимального значения силы трения покоя, равного  $kN$ , где  $k$  - коэффициент трения покоя. Достижение этого значения приведет к движению те-

ла. Отсюда следует, что  $F_{\text{тр}i} \leq kN_i$  и

$$\begin{aligned} F_{\text{н}} - ma &\leq kN_1 = kmg \\ mg - F_{\text{н}} &\leq kN_2 = kma. \end{aligned}$$

Откуда получаем

$$a \geq \frac{1 - k}{1 + k}g.$$

и искомое значение есть

$$a_{\text{min}} = \frac{1 - k}{1 + k}g.$$

**1.78.** Если брусок неподвижен относительно призмы, то в системе отсчета связанной с неподвижной поверхностью на него действует сила  $ma$ , направленная влево. Проектируя второй закон Ньютона на наклонную плоскость и на перпендикулярное направление, найдем реакцию призмы на нормальное давление  $N$  и силу трения покоя  $F_{\text{тр}}$ . Движение бруска относительно призмы будет отсутствовать, если сила трения покоя не превышает своего максимального значения  $kN$ . Из этого условия находим

$$a_{\text{max}} = \frac{1 + k \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - k}.$$

**1.80.** Используя условие, что в момент  $t_0$  отрыва тела от плоскости реакция плоскости на нормальное давление равна нулю,  $N = 0$ , получим  $t_0 = mg/k \sin \alpha$ . Скорость тела в произвольный момент  $t \leq t_0$  можно найти из уравнения движения

$$m\ddot{x} = kt \cos \alpha,$$

где  $x$  координата тела (материальной точки) вдоль направления движения, при условии, что  $\dot{x}(0) = 0$ . Подставляя в

полученное выражение  $t = t_0$ , найдем

$$v_0 = \frac{mg^2}{2k \sin^2 \alpha} \cos \alpha.$$

При условии, что  $x(0) = 0$ , пройденный путь равен

$$x_0 = \int_0^{t_0} \dot{x}(t') dt' = \frac{m^2 g^3}{6k^2 \sin^3 \alpha} \cos \alpha.$$

**1.81.** Запишем второй закон Ньютона

$$m \frac{dv}{dt} = F \cos \alpha = F \cos ks.$$

Последнее равенство показывает, что ускорение явно зависит от пройденного пути. Поэтому удобно рассматривать скорость зависящей от времени через путь  $s$ , т.е.  $v(t) = v(s(t))$ . Тогда

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v$$

и

$$\frac{dv}{ds} v = \frac{F}{m} \cos ks.$$

Интегрируя это равенство, учитывая что  $v dv/ds = dv^2/2dt$ , получим

$$v = \sqrt{2g \sin \alpha / 3k}.$$

**1.84.** а) Выберем ось  $x$  в направлении постоянного вектора  $\mathbf{b}$ , тогда движение происходит вдоль оси  $x$ . Если  $p = p_x = mv_x$  - импульс частицы, то

$$\dot{p} = bt(\tau - t),$$

где  $b = |\mathbf{b}|$ . Интегрируя, получаем

$$p(\tau) = b\tau^3/6$$

или в векторном виде

$$\mathbf{p} = \frac{\tau^3}{6} \mathbf{b}.$$

б) Пройденный путь есть

$$s(\tau) = \int_0^\tau (p(t)/m) dt = \frac{b\tau^4}{12m}.$$

**1.85.**(41) Возьмем ось  $x$  в направлении постоянного вектора  $F_0$ . Тогда

$$m\ddot{x} = F_0 \sin \omega t$$

и

$$\dot{x} = -\frac{F_0}{m} \cos \omega t + C.$$

Так как  $\dot{x}(0) = 0$ , то  $C = F_0/m$ . В результате получим

$$\dot{x} = \frac{F_0}{m\omega} (1 - \sin \omega t),$$

откуда пройденный путь есть

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2} (\omega t - \sin \omega t)$$

**1.88.** Запишем уравнение движения

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^2$$

или  $dv/v^2 = -kdt$ , и учитывая, что  $dv/v^2 = -d(1/v)$ , будем иметь

$$d\left(\frac{1}{v} - \frac{kt}{m}\right) = 0$$

С учетом начального значения для скорости находим

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{kt}{m}.$$

Откуда для времени движения пули получим

$$t = \frac{m}{k} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right).$$

Чтобы найти коэффициент  $k$ , перепишем уравнение движения в виде

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = m \frac{dv}{ds} v = -kv^2,$$

где  $s$  - пройденный путь. Откуда

$$m \frac{dv}{ds} = -kv.$$

Поступая как и выше, и учитывая, что пройденный пулей путь равен  $h$ , получим

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{kh}{m}.$$

Находя из этого выражения  $k$  и подставляя его в выражение для времени полета  $t$ , получим

$$t = h(v_0 - v)/(v_0 v \ln v_0/v).$$

**1.89.** Пусть ось  $x$  прямоугольной системы координат направлена вдоль наклонной плоскости в сторону спуска. Тогда проектируя уравнение движения на оси координат, будем иметь

$$\begin{aligned} ma &= mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} \\ N &= mg \cos \alpha, \end{aligned}$$

где  $N$  - реакция опоры. Учитывая, что  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$  и  $F_{\text{тр}} = \gamma x N$ , получим

$$v \frac{dv}{dx} = g \sin \alpha - \gamma x g \cos \alpha.$$

Интегрируя это выражение

$$\int_0^v v dv = g \int_0^x (\sin \alpha - \gamma x \cos \alpha) dx,$$

найдем

$$\frac{v^2}{2} = g(x \sin \alpha - \gamma \frac{x^2}{2} \cos \alpha).$$

Пройденный путь можно найти из условия  $v = 0$ . Максимальная скорость определяется из экстремума  $v$  (или  $v^2$ ).

**1.90.** Возьмем ось  $x$  в направлении постоянного вектора  $\mathbf{b}$ . Тело будет двигаться, когда  $F \geq kN = kmg$ . Начало движения произойдет в момент  $t_0$ , когда  $F = bt_0 = kmg$ . Откуда

$$t_0 = kmg/b.$$

Записывая далее уравнение движения

$$m\ddot{x} = bt - kmg$$

и решая его, найдем путь  $x$ .

**1.91.** При решении задачи надо учесть, что весом тела называется сила  $\mathbf{P}$ , с которой тело действует на опору (или подвес). Если  $\mathbf{N}$  - реакция опоры, то  $\mathbf{P} = -\mathbf{N}$ . По величине вес равен модулю  $N = |\mathbf{N}|$ .

а) Найдем вес летчика в нижней части петли. При равномерном движении по окружности ускорение тела равно центростремительному ускорению  $a_n = v^2/R$ . Используя второй

закон Ньютона, получаем

$$P_1 = N_1 = m \left( g + \frac{v^2}{R} \right);$$

б) Верхняя точка траектории. А этом случае имеем

$$P_2 = N_2 = m \left( g - \frac{v^2}{R} \right);$$

в) Средняя точка петли. В этом случае

$$P_3 = N_3 = \frac{mv^2}{R}.$$

Сила тяжести  $mg$  в этой точке петли компенсируется реакцией опоры, действующей в вертикальном направлении.

**1.92.** а) Направим ось  $y$  вертикально вниз. Пусть  $\theta$  - угол отклонения нити от вертикали. Спроектируем уравнение движения (второй закон Ньютона) на направление касательной к траектории и на радиальное направление

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{R} &= F - mg \cos \theta \\ m\dot{v} &= mg \sin \theta, \end{aligned}$$

где  $R$  - длина нити,  $v$  - величина скорости шарика,  $F$  - натяжение нити. Если шарик движется в сторону уменьшения угла  $\theta$ , то  $v = -R\dot{\theta}$  ( $\dot{\theta} < 0$ ). Последнее уравнение в этом случае принимает вид

$$-R\ddot{\theta} = g \sin \theta.$$

Умножая последнее равенство на  $\dot{\theta}$

$$R\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\dot{\theta}g \sin \theta$$

и перепишем его как

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{g}{R} \cos \theta \right).$$

Откуда получаем

$$\frac{v^2}{R} = 2g \cos \theta.$$

Натяжение нити тогда есть  $F = 3mg \cos \theta$ .

Найдем модуль полного ускорения как

$$a^2 = a_n^2 + a_\tau^2 = \left( \frac{v^2}{R} \right)^2 + (\dot{v})^2 = g^2(1 + 3 \cos^2 \theta);$$

б) Вертикальная составляющая скорости равна

$$v_y = v \sin \theta = \sqrt{2gR \cos \theta} \sin \theta.$$

Так как  $v_y$  и  $v_y^2$  имеют максимум при одном и том же угле, то найдем этот угол из максимума  $v_y^2$

$$(v_y^2)'_{\theta} = 0.$$

Решая это уравнение, получим  $\cos \theta = 1/\sqrt{3}$ , откуда  $F = 3mg \cos \theta = \sqrt{3}mg$ ;

в) Полное ускорение есть  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau$ . По условию  $a_y = a_{ny} + a_{\tau y} = 0$  или

$$a_n \cos \theta + a_\tau \sin \theta = \frac{v^2}{R} \cos \theta - \dot{v} \sin \theta = 0.$$

Решая это уравнение, получим  $\cos \theta = 1/\sqrt{3}$ .

**1.97.** Поскольку  $v = const$ , то тангенциальное ускорение равно нулю. Тогда нормальное ускорение должно вызываться

только силой трения (других сил нет). Запишем второй закон Ньютона в радиальном направлении

$$\frac{mv^2}{r} = F = kN = mgk_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Из этого выражения можно найти максимум  $v$  или  $v^2$ , который достигается при  $r = R/2$ :

$$v_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{gk_0 R}.$$

### 1.3. Законы сохранения

**1.117.** Пусть ось  $x$  направлена вертикально вниз. Если  $x_1$  и  $x_2$  координаты масс, то координата ц.и. есть

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Учитывая, что скорости частиц равны, но противоположно направлены, для ускорения ц.и. можно записать

$$a_c = \frac{(m_1 - m_2)a_1}{m_1 + m_2},$$

где  $a_1$  - ускорение первого тела. Чтобы найти  $a_1$  запишем уравнения движения

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - T \\ m_2 a_2 &= T - m_2 g, \end{aligned}$$

где  $T$  - натяжение нити. Определяя из этой системы  $a_1$  и подставляя в выражение для  $a_c$ , получим

$$a_c = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} g$$

**1.118.** При равномерном вращении с постоянным углом  $\theta$  все точки цепочки вращаются по окружностям перпендикулярным оси вращения и движения в вертикальном направлении нет. Такое же движение, т.е. движение по окружности в плоскости перпендикулярной оси вращения, совершает и центр инерции. Запишем уравнение движения для ц.и. учитывая что на цепочку действует сила натяжения  $\mathbf{T}$  и сила тяжести  $m\mathbf{g}$

$$m\mathbf{a}_c = \mathbf{T} + m\mathbf{g}$$

Так как движения в вертикальном направлении отсутствует, то составляющая силы натяжения в вертикальном направлении уравновешивается силой тяжести. Поэтому при равномерном движении точки  $C$  по окружности будем иметь

$$\frac{mv_c^2}{\rho} = T \sin \theta \quad T \cos \theta = mg,$$

где  $\rho$  расстояние до оси вращения (центра окружности). Так как  $v_c = \rho\omega$ , то из этих равенств получаем

$$\rho = \frac{g \operatorname{tg} \theta}{\omega^2} \quad T = \frac{mg}{\cos \theta}.$$

**1.120.** При движении по круговой цилиндрической поверхности (параллельно основанию цилиндра) второй закон Ньютона для скорости ц.м., записывается в виде

$$\frac{mv^2}{R-l} = N,$$

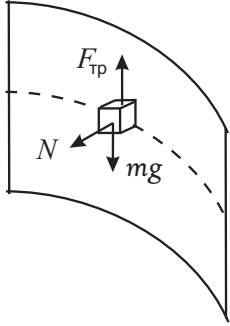


Рис. 14.

где  $N$  реакция поверхности на нормальное давление (рис. 14). Для того чтобы движение происходило бы параллельно основанию и не было бы перемещения в вертикальном направлении, сила тяжести, действующая на мотоциклиста, должна уравновешиваться силой трения покоя. Условием этого является выполнение неравенства

$$(F_{\text{тр}})_{\text{max}} \geq mg$$

или

$$(F_{\text{тр}})_{\text{max}} = kN = \frac{kmv^2}{R-l} \geq mg,$$

$k$  - коэффициент трения покоя. Из последнего неравенства получаем

$$v^2 \geq \frac{(R-l)g}{k}.$$

Минимальное значение скорости тогда есть

$$v_{\text{min}} = \sqrt{\frac{(R-l)g}{k}}$$

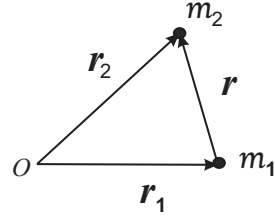


Рис. 15.

**1.122.** Пусть  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор второй частицы относительно первой, так что  $|\mathbf{r}| = l$  (рис.15). Тогда радиус-векторы и ускорения частиц связаны соотношением

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r} \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a},$$

где  $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$ . Запишем уравнение движения для каждого тела.

$$m_1 \mathbf{a}_1 = -\mathbf{F}_H \quad m_2 \mathbf{a}_2 = m_2 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a} = \mathbf{F}_H,$$

где  $\mathbf{F}_H$  - сила натяжения нити. Используя первое уравнение, получим

$$\mathbf{F}_H = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{a}.$$

Если первая частица покоится, то вторая относительно нее движется в данный момент по окружности с радиусом  $l$ . Тогда  $a = |\mathbf{a}| = v^2/l$ .

**1.124.** В момент  $t = 0$  импульс системы равен

$$\mathbf{p}_0 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2.$$

После начала движения для импульса имеем уравнение (внутренние силы - упругие силы пружинки не дают вклада, не вносят вклад в суммарную силу)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{g},$$

где  $m = m_1 + m_2$ . Из последнего уравнения находим

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + m\mathbf{g}t.$$

Если  $\mathbf{v}_c$  и  $\mathbf{r}_c$  - скорость и радиус-вектор ц.м., то

$$\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\mathbf{p}_0 + m\mathbf{g}t}{m},$$

откуда

$$\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_c(0) = \frac{\mathbf{p}_0 t}{m} + \frac{\mathbf{g} t^2}{2}.$$

**1.125.** (53) Записывая закон сохранения импульса системы и учитывая, что  $m_2/m_1 = \eta$ , найдем скорость составной частицы в виде

$$\mathbf{v} = \frac{2 + 4\eta}{1 + \eta} \mathbf{i} + \frac{3 - 5\eta}{1 + \eta} \mathbf{j}.$$

**1.128.** При движении по окружности на муфты действуют силы, направленные вдоль радиусов. Непосредственно до столкновения и сразу после столкновения можно считать, что муфты движутся вдоль общей касательной, вдоль которой силы отсутствуют (направлены по нормали). Тогда вдоль касательной будет выполняться закон сохранения импульса. Записывая закон сохранения импульса и выражая скорости муфт до и после столкновения через нормальные ускорения  $v = \sqrt{a_n R}$ , получим для нормального ускорения составной муфты

$$a = \frac{(m_1 \sqrt{a_1} - m_2 \sqrt{a_2})^2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

**1.129.** Пусть модули импульсов кусков равны  $p_1 = p_2 = mv$ ,  $p_3 = mv_3$ , тогда модуль импульса тела есть  $p_0 = 3mv_0$ . Из рис. 16 следует, что модуль импульса третьего куска равен

$$p_3 = \sqrt{2m^2 v^2 + 9m^2 v_0^2}.$$

Откуда находим скорость  $v_3 = p_3/m$ .

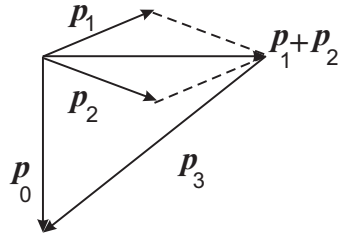


Рис. 16.

**1.131.** Пусть  $\mathbf{v}_{10}$  скорость 1-й частицы до столкновения, а  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  - скорости частиц непосредственно после столкновения. Обозначим через  $\mathbf{u}_1$  и  $\mathbf{u}_2$  скорости частиц в произвольный момент времени после столкновения.

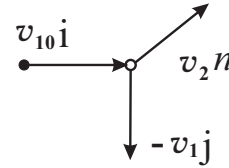


Рис. 17.

пульта

$$m_1 \mathbf{v}_{10} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2. \quad (1)$$

Чтобы определить начальные скорости разлета  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$ , рассмотрим движения частиц до их полной остановки. Для этого используем второй закон Ньютона. При прямолинейном движении, имеем

$$m_1 \frac{du_1}{dt} = -km_1 g \quad m_2 \frac{du_2}{dt} = -km_2 g.$$

Здесь имеет место равнозамедленное движение, при котором

$$u_1 = v_1 - kgt \quad u_2 = v_2 - kgt.$$

Откуда находим время до остановки каждой частицы,  $u_1 = u_2 = 0$ , и, соответственно, пройденный путь  $s_1$  и  $s_2$ . В результате найдем, что

$$v_1^2 = 2kgs_1 \quad v_2^2 = 2kgs_2.$$

Перепишем (1) в виде (см. 17)

$$-m_1 v_1 \mathbf{j} + m_2 v_2 \mathbf{n} = m_1 v_{10} \mathbf{i},$$



где  $\mathbf{i}$ ,  $-\mathbf{j}$  и  $\mathbf{n}$  - единичные орты в направлении движения. Умножим скалярно это равенство последовательно на  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$ , получим

$$v_{10} = \eta v_2 \cos \alpha \quad v_1 = \eta v_2 \cos \beta,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  - углы наклона вектора  $\mathbf{n}$  соответственно к осям  $x$  и  $y$ . Учитывая, что  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$ , получим

$$v_{10} = \sqrt{2kg(\eta^2 s_2 - s_1)}.$$

**1.146.** Если  $\Delta \mathbf{r}$  элементарное перемещение вдоль траектории, то работа силы по перемещению частицы из точки 1 в точку 2 равно

$$A = \Sigma \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \Sigma \Delta \mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -17.$$

**1.147.** Если повернуть рисунок задачи на  $90^\circ$  по часовой стрелке, то задача будет аналогична задаче о движении муфты в поле силы тяжести. Пусть ось  $y$  проходит через точку 2, ось  $x$  - через точку 1, начало координат в центре окружности. В данном случае потенциальная энергия муфты есть  $U = -Fy$  (в поле силы тяжести  $U = -mgy$ ). Искомый ответ получается после использования закона сохранения энергии, взятой в точках 1 и 2.

**1.148.** Найдем силу, действующую на локомотив вдоль пути  $s$

$$F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{ds} \dot{s} = m \frac{dv}{ds} v = \frac{m\alpha^2}{2},$$

Так как сила постоянна, то работа равна  $A = Fs$ . Находя пройденный путь получим

$$A = \frac{m\alpha^4 t}{8}.$$

**1.149.** Модуль силы равен

$$F = m\sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Учитывая, что  $v^2 = 2K/m = 2\alpha s^2/m$ , можно найдем нормальное ускорение  $a_n$ . Касательное ускорение  $a_\tau$  находим из равенства

$$\frac{dv^2}{dt} = 2v\dot{v} = 2va_\tau = \frac{4\alpha s \dot{s}}{m} = \frac{4\alpha s v}{m}.$$

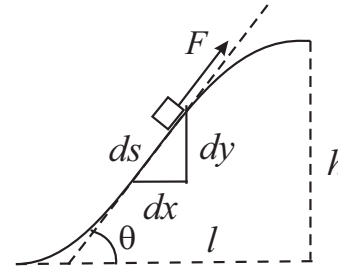


Рис. 18.

**1.150.** Пусть частица проникает на глубину  $x$  и останавливается. Тогда

$$T_2 - T_1 = A_{12}$$

где  $T$  - кинетическая энергия, а  $A_{12}$  - работа тормозящей силы. Так как  $T_2 = 0$ , то для модуля тормозящей силы  $F(x)$  мож-

но записать

$$-\frac{mv_1^2}{2} = -\int_0^x F(l)dl.$$

Подставляя в это равенство  $v = p/m = x/\alpha t$  и дифференцируя по  $x$ , получим

$$F(x) = \frac{x}{m\alpha^2}.$$

**1.151.** Слово "медленно" в данной задаче означает, что тело движется без ускорения. Тогда, если  $\theta$  - угол между направлением силы (см. 18) и горизонталью (основанием горки), то

$$F = kmg \cos \theta + mg \sin \theta.$$

На каждом малом перемещении  $ds$  вдоль горки можно считать, что тело движется по наклонной плоскости, составляющей с горизонталью угол  $\theta$ . Найдем элементарную работу

на этом перемещении

$$dA = F ds = kmg ds \cos \theta + mg ds \sin \theta .$$

Так как

$$ds \cos \theta = dx \quad ds \sin \theta = dy$$

(см. рис. 18), то после суммирования элементарных работ вдоль движения тела получим искомый ответ.

**1.152.** Брусок движется без ускорения, поэтому сила тяги равна

$$F = F_{\text{тр}} + mg \sin \alpha ,$$

где  $F_{\text{тр}}$  - модуль силы трения. Умножая это равенство на длину наклонной плоскости, найдем работу силы тяги.

$$A = -A_{\text{тр}} + mgh ,$$

здесь  $A_{\text{тр}} < 0$  - работа силы трения. Из этого равенства можно найти величину работы силы трения. При скатывании имеем для скорости в конечном положении

$$\frac{mv^2}{2} = A_{\text{тр}} + mgh ,$$

откуда находим скорость.

**1.155.** Брусок  $m_2$  придет в движение, если сила упругости растянутой пружины сравняется с максимальным значением силы трения покоя  $F_{\text{уп}} = kmg$ . Пусть это условие выполняется, если удлинение пружины равно  $l$  (рис. 19). Тогда

$$\kappa l = kmg , \quad (1)$$

где  $\kappa$  - коэффициент жесткости пружины. При минимальном значении внешней силы брусок  $m_1$  переместившись на расстояние  $l$ , остановится. Действие внешней силы будет компенсировано суммарным действием силы трения и упругой

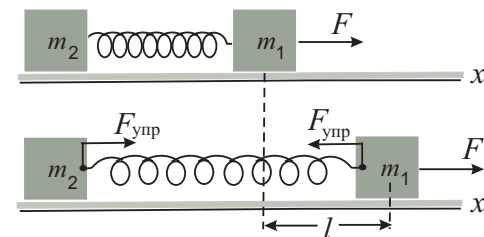


Рис. 19.

силы, направленных в противоположную сторону. При больших значениях  $F$  брусок будет продолжать движение вправо. При меньших - пружина не достигнет необходимого удлинения  $l$ . Для нахождения  $F$  используем равенство

$$A = \Delta T = 0 ,$$

где  $A$  - работа результирующей силы,  $F_{\text{рез}} = F - \kappa x - km_1g$ , перемещающей первый брусок вдоль оси  $x$ . Вычисляя работу, получим

$$Fl - \frac{\kappa l^2}{2} - km_1gl = 0$$

или

$$F - \frac{\kappa l}{2} - km_1g = 0 . \quad (2)$$

Используя (1) и (2), найдем  $F = kg(m_1 + m_2/2)$ .

**1.165.** Найдем минимальную растягивающую силу, необходимую, чтобы суммарное растяжение пружин было  $\Delta l$ . Пусть левый конец первой пружины закреплен, а к правому концу второй пружины приложена растягивающая сила (рис. 20). После растяжения пружин на нужное удлинение система придет в равновесие. Обозначим растяжение первой пружины через  $\Delta l_1$ , а второй через  $\Delta l_2$ , причем должно выполняться

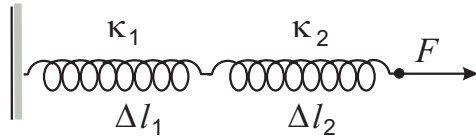


Рис. 20.

равенство

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l.$$

Условие равновесия предполагает, что силы с которыми пружины действуют друг на друга равны

$$\kappa_1 \Delta l_1 = \kappa_2 \Delta l_2.$$

Решая два уравнения совместно, можно найти  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$ . Далее используем соотношение для приращения полной энергии

$$\Delta E = \Delta T + \Delta U = A_{\text{вн}},$$

где  $\Delta T$  - приращение кинетической энергии,  $\Delta U$  - приращение потенциальной энергии, а  $A_{\text{вн}}$  - работа внешней силы. Так как  $\Delta T = 0$ , а потенциальная энергия деформированной пружины равна  $\kappa_i \Delta l_i^2 / 2$ , то

$$A_{\text{вн}} = \frac{\kappa_1 \kappa_2 \Delta l}{2(\kappa_1 + \kappa_2)}.$$

**1.215.** Момент силы равен равен

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [\mathbf{r}, \mathbf{F}] = [a\mathbf{i} + b\mathbf{j}, A\mathbf{i} + B\mathbf{j}] \\ &= (aB - bA)[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = (aB - bA)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Если  $\varphi$  угол между радиусом-вектором и силой, плечо равно

$$l = |\mathbf{r}| \sin \varphi.$$

Синус можно найти, если учесть, что

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{|\mathbf{r}| |\mathbf{F}|}$$

**1.217.** Пусть движение происходит в плоскости  $(xy)$ , тогда момент импульса равен

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= m[\mathbf{r}, \mathbf{v}] = m[x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}] = \\ &= m(xv_y - yv_x)[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = m(xv_y - yv_x)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Подставляя в это равенство координаты и проекции скорости тела, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту, получим

$$\mathbf{M} = -\frac{mgv_0 t^2}{2} \cos \alpha \mathbf{k} \quad M = |\mathbf{M}| = \frac{mgv_0 t^2}{2} \cos \alpha.$$

В наивысшей точке  $t = v_0 \sin \alpha / g$ , откуда

$$M = \frac{\sqrt{2}mv_0^3}{8g}$$

**1.219.** Момент импульса направлен за чертеж, перпендикулярно плоскости чертежа. Поэтому модуль момента относительно оси равен модулю момента относительно точки  $O$ ,  $M = lmv$ , где  $l$  - плечо момента, равное перпендикуляру, опущенному из  $O$  на наклонную плоскость, а  $v$  скорость шайбы. Подставляя  $l$  и  $v$ . получим

$$M = \frac{1}{2}mght \sin 2\alpha.$$

### 1.4. Всемирное тяготение

**1.237.** Пусть  $m$  и  $M_c$  - массы планеты и Солнца ( $M_c = 1,97 \cdot 10^{30}$  кг). На планету со стороны Солнца действует сила

$$F = \gamma \frac{mM_c}{R^2},$$

где  $R$  - радиус орбиты,  $\gamma = 6,6 \cdot 10^{-11}$  - гравитационная постоянная. Из второго закона Ньютона

$$\frac{mv^2}{R} = \gamma \frac{mM_c}{R^2}$$

найдем  $R$ , позволяющий найти угловую скорость кругового движения.

**1.238.** а) Согласно третьему закону Кеплера квадраты периодов обращения планет вокруг солнца относятся как кубы линейных размеров их орбит

$$\frac{T_{\text{Ю}}^2}{T_3^2} = \frac{R_{\text{Ю}}^3}{R_3^3},$$

где  $T_{\text{Ю}} = 12$  лет,  $T_3 = 1$  год - периоды обращения Юпитера и Земли вокруг Солнца, а  $R_{\text{Ю}}$ ,  $R_3$  - радиусы орбит. Из этого равенства находится отношение  $R_{\text{Ю}}/R_3 = \sqrt[3]{144}$ ;

б) Для нахождения скорости Юпитера используем второй закон Ньютона и находим  $v^2 = \gamma M_c/R_{\text{Ю}}$ . Выражая радиус из равенства  $v = \omega R = 2\pi R/T$ , получим

$$v = \left( \gamma \frac{2\pi}{T_{\text{Ю}}} M_c \right)^{1/3}.$$

Ускорение находится из равенства

$$a = \frac{v^2}{R}.$$

**1.239.** Обычно эллиптические траектории планет очень близки к круговым с радиусом  $R$ , равным большой полуоси эллипса  $a$

$$R = a = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Тогда период обращения вокруг солнца есть

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v}.$$

Скорость движения по круговой орбите  $v$  находим из второго закона Ньютона. Окончательно будем иметь

$$T = \pi \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{2\gamma M_c}}.$$

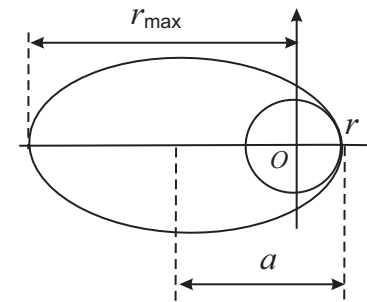


Рис. 21.

**1.240.** Исходим из третьего закона Кеплера

$$\frac{T_0^2}{(\eta T_0)^2} = \frac{r^3}{a^3},$$

где  $T_0$  - период обращения по круговой орбите и  $a$  - полуось эллипса, равная  $a = (r + r_{\text{max}})/2$  (рис. 21). Подставляя это соотношение в первое равенство, найдем

$$r_{\text{max}} = r(2\eta^{2/3} - 1).$$

**1.242.** Если  $T_0$  - время обращения по эллиптической орбите, то время падения  $\tau = T_0/2$  (рис. 22). Запишем третий закон Кеплера, считая, радиус Луны  $R$  известен

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{r^3}{\left(\frac{r+R}{2}\right)^3},$$

где  $(r + R)/2$  - полуось эллипса (см.рис.22) и  $T$  - период обращения по круговой орбите. Из последнего равенства можно найти  $T_0$ . Период  $T$  находится из равенства

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T},$$

а скорость движения по круговой орбите  $v$  может быть найдена из второго закона Ньютона

$$\frac{v^2}{r} = \gamma \frac{m_{\text{л}}}{r^2},$$

где  $m_{\text{л}}$  - масса луны.

**1.243.** Найдем период  $T_R$  движения планеты солнечной системы по круговой орбите радиуса  $R$ , исходя из соотношения  $v = \omega R = 2\pi R/T_R$  и второго закона Ньютона

$$T_R = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{GM_c}},$$

где  $M_c$  - масса Солнца. Аналогично записывается период  $T_r$  движения планеты в модели солнечной системы с радиусом орбиты  $r = R/\eta$ . Рассматривая форму Солнца как шар, можно выразить массу Солнца  $m_c$  в модели солнечной системы через массу  $M_c$ . Далее следует рассмотреть отношение  $T_r/T_R$ .

**1.255.** Искомые ускорения есть

$$a_1 = g = \frac{GM_3}{R_3^2}$$

$$a_2 = \omega^2 R_3 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_3 = \frac{GM_c}{r^2},$$

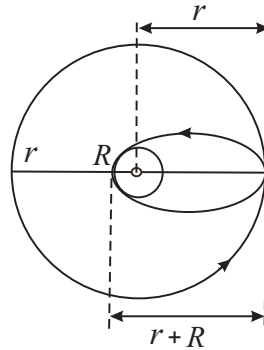


Рис. 22.

где  $M_3 = 5,98 \cdot 10^{24}$  кг - масса Земли,  $R_3 = 6,37 \cdot 10^6$  - радиус Земли,  $T = 86400$  с - продолжительность суток,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  - гравитационная постоянная,  $M_c = 1,9 \cdot 10^{30}$  кг - масса Солнца,  $r = 1,5 \cdot 10^{11}$  м - расстояния между Землей и солнцем. Подставляя численные данные, вычислить<sup>1</sup>  $a_1 : a_2 : a_3$ .

**1.256.** 1) Условие уменьшения ускорения свободного падения есть

$$g_0 - g_h = \eta g_0 \quad \text{или} \quad \eta = \frac{g_0 - g_h}{g_0},$$

где  $g_0 = GM/R$ ,  $g_h = GM/(R+h)$  - ускорения на поверхности земли и на высоте  $h$  и  $M$  - масса Земли, а  $R$  ее радиус. Подставляя выражения для ускорений в равенство для  $\eta$ , можно получить

$$2Rh = \eta R^2 = 2\eta hR + h^2(\eta^2 - 1).$$

Пренебрегая слагаемым  $(h/R)^2$  по сравнению с  $h/R$ , получим при  $\eta = 0,01$

$$h = \frac{\eta R}{2(1 - \eta)} = 32 \cdot 10^3 \text{ м};$$

2) В данном случае

$$\frac{g_0}{g_h} = n.$$

Подставляя в это равенство выражения для  $g_0$  и  $g_h$ , получим уравнение для  $h$ , положительный корень которого есть

$$h = R(\sqrt{n} - 1) = R(\sqrt{2} - 1) \approx 2640 \text{ км}.$$

**1.267.** Первая<sup>2</sup> и вторая<sup>3</sup> космические скорости равны

$$v_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad v_2 = \sqrt{2}v_1,$$

<sup>1</sup>Если  $x/y = a/b = 1/(b/a)$ , а  $y/z = b/d = (b/a)/(d/a)$ , то можно записать  $x : y : z = 1 : b/a : d/a$ .

<sup>2</sup>скорость необходимая для движения по круговой орбите в поле планеты

<sup>3</sup>начальная скорость для преодоления тяготения планеты

где  $M = 7,35 \cdot 10^{22}$  кг - масса луны,  $R = 1,7 \cdot 10^6$  м - радиус Луны. Для Земли  $v_1 \approx 8$  км/с,  $v_2 \approx 11$  км/с.

**1.247.** Используем законы сохранения энергии и момента импульса. Если  $r$  есть наибольшее или наименьшее расстояние от солнца (см. рис. 23), а  $v$  скорость планеты в соответствующих точках, то

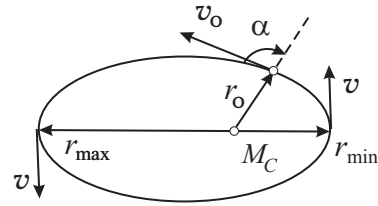


Рис. 23.

$$E = \frac{mv^2}{2} - G \frac{mM_C}{r} = \frac{mv_0^2}{2} - G \frac{mM_C}{r_0}$$

$$L = rv = r_0 v_0 \sin \alpha.$$

Выражая  $v$  из второго равенства и подставляя в первое, получим уравнение для определения  $r$

$$\frac{\eta \sin^2 \alpha}{2} x^2 - x + \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) = 0,$$

где

$$x = \frac{r_0}{r}, \quad \eta = \frac{r_0 v_0}{GM_C}.$$

Два решения этого квадратного уравнения дают наибольшее и наименьшее значения  $r$ .

## 1.5. Динамика твердого тела

**1.272.** Движение стержня описывается уравнениями

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M},$$

где  $\mathbf{L}$  - момент импульса относительно ц.и., а  $\mathbf{M}$  - результирующий момент внешних сил относительно ц.и. Так как вращения стержня нет, то  $\mathbf{M} = 0$ . Момент сил направлен перпендикулярно плоскости рисунка (вдоль оси  $z$ ). Тогда, если  $x$  - расстояние от центра инерции до точки приложения силы  $\mathbf{F}_2$ , то в скалярной форме записанные выше уравнения дают

$$ma = F_2 - F_1$$

$$M_z = (x + b)F_1 - xF_2 = 0.$$

Находя из этих уравнений  $x$ , можно найти длину стержня  $l = 2(x + b)$ .

**1.273.** На шар действуют сила  $\mathbf{F}$ , сила тяжести  $m\mathbf{g}$ , реакция на нормальное давление  $\mathbf{N}$  и сила трения  $\mathbf{F}_{\text{тр}}$  ( $F_{\text{тр}} = kN$ ). Пусть  $xy$  плоскость рисунка, причем шар движется в направлении оси  $x$ , а ось  $z$  направлена перпендикулярно чертежу, на "нас". В отсутствии вращения момент сил  $\mathbf{M}$  относительно ц.и. равен нулю (соответственно и проекция на ось  $z$ ,  $M_z = 0$ ) уравнения движения записываются в виде

$$ma = F \cos \alpha - F_{\text{тр}}$$

$$mg = N + F \sin \alpha$$

$$M_z = RF \sin \alpha - RF_{\text{тр}} = 0.$$

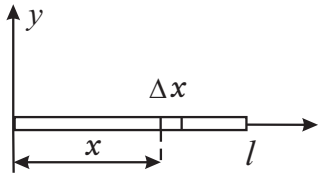


Рис. 24.

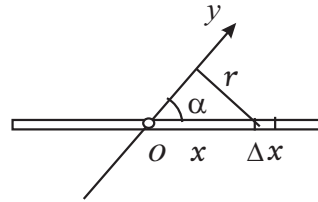


Рис. 25.

Решение этой системы уравнений дает искомые величины.  
**1.277.** а) Пусть масса элемента  $\Delta x$  есть  $\Delta m$  (см. рис. 24). Тогда момент инерции относительно оси  $y$  есть

$$I_y = \sum x^2 \Delta m.$$

Так как стержень однородный, то для плотности можно записать

$$\frac{m}{l} = \frac{\Delta m}{\Delta x},$$

откуда

$$\Delta m = \frac{m}{l} \Delta x.$$

Поэтому

$$I_y = \frac{m}{l} \sum x^2 \Delta x.$$

Устремляя  $\Delta x \rightarrow 0$  и переходя от суммирования к интегрированию, получим

$$I_y = \frac{ml^2}{3};$$

б) В данном случае (рис. 25) расстояние от элемента  $\Delta x$  до оси  $y$  равно  $r = x \sin \alpha$ , откуда

$$I_y = \sum r^2 \Delta m \rightarrow \frac{m}{l} \sin^2 \alpha \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx.$$

**1.281.** Момент инерции равен

$$I_z = \sum \Delta m \rho^2,$$

где  $\rho$  - расстояние от элемента дуги  $\Delta s$  до оси  $z$  (см. рис. 26) и  $\Delta m$  - масса этого элемента, равная

$$\Delta m = \frac{m}{2\pi a} \Delta s = \frac{m}{2\pi} \Delta \varphi.$$

Используем это соотношение в выражении для момента инерции. Устремляя затем  $\Delta \varphi \rightarrow 0$ , получим, после перехода к интегрированию,

$$I_z = \frac{ma^2}{2\pi} \sum \cos^2 \varphi \Delta \varphi \rightarrow \frac{ma^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{ma^2}{2}.$$

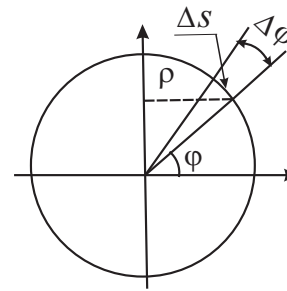


Рис. 26.

**1.287.а)** Пусть груз движется вертикально вниз. Если  $F$  - натяжение нити,  $I = mR^2/2$  момент инерции цилиндра относительно своей оси, а  $\varepsilon$  - угловое ускорение цилиндра, то движение системы описывается следующими уравнениями

$$ma = mg - F$$

$$I\varepsilon = RF$$

$$a = R\varepsilon.$$

Из решения этой системы найдем для углового ускорения

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{g}{R(1 + M/2m)},$$

откуда

$$\omega = \frac{gt}{R(1 + M/2m)} \quad (\omega(0) = 0);$$

б) Учитывая, что скорость груза  $v = R\omega$ , кинетическая энергия системы вычисляется из выражения

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

**1.292.** Запишем уравнения движения. Пусть тело  $m_1$  движется вертикально вверх, тогда

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_1 - m_1 g \\ m_2 a &= m_2 g - F_2 \\ I\beta &= M_z = R(F_2 - F_1) \\ a &= R\beta, \end{aligned}$$

где  $\beta$  - угловое ускорение цилиндра,  $I = mR^2/2$  - момент инерции цилиндра, последнее равенство выражает связь линейного ускорения и углового. Решая эту систему уравнений, можно найти  $\beta$  и  $F_1/F_2$ . Для отношения сил получим

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{4 + m/m_2}{4 + m/m_1}.$$

При  $m \rightarrow 0$ ,  $F_1 \rightarrow F_2$ .

**1.293.** а) Уравнения движения есть

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_1 - kN \\ m_2 a &= m_2 g - F_2 \\ I\varepsilon &= -rF_1 + rF_2 \\ a &= \varepsilon r; \quad N = m_1 g \end{aligned}$$

Здесь  $F_1$  и  $F_2$  - силы натяжения, соответственно, между блоком и  $m_1$  и блоком и  $m_2$ ,  $I$  - момент инерции относительно оси диска,  $\varepsilon$  - его угловое ускорение,  $r$  - радиус диска,  $a$  ускорение тел. Решая эту систему, найдем  $a$ ;

б) Работа силы трения равна

$$A = -F_{\text{тр}}S,$$

где  $S = at^2/2$  - пройденный телом 1 путь. Откуда

$$A = -km_1 g \frac{at^2}{2}.$$

**1.316.** На шар действуют силы тяжести, трения  $F_{\text{тр}}$  и реакция на нормальное давление  $N_n$ . Уравнения движения есть

$$\begin{aligned} ma &= mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} \\ I\varepsilon &= F_{\text{тр}}R \\ N_n &= mg \cos \alpha, \end{aligned}$$

где  $a$  - ускорение ц.м.,  $\varepsilon$  - угловое ускорение шара,  $I = 2mR^2/5$  - момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр.

Точка шара, соприкасающаяся с наклонной плоскостью в данный момент времени, покоится относительно этой плоскости и шар совершает чистое вращение вокруг оси, перпендикулярной направлению движения. Поэтому

$$a = R\varepsilon.$$

Решая совместно записанные выше уравнения и исключая силу трения, получим

$$a = \frac{5}{7}g \sin \alpha.$$



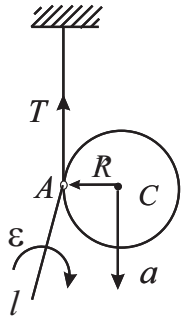


Рис. 27.

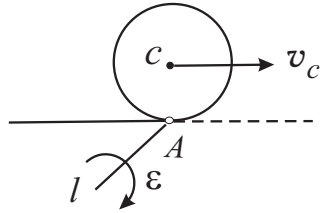


Рис. 28.

Из последнего равенства можно найти скорость центра инерции  $v = at$  и угловую скорость  $\omega = \varepsilon t$ , что позволяет вычислить кинетическую энергию

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{I}{2}\omega^2$$

**1.320.** а) Запишем уравнение для ц.м. и уравнение для момента импульса относительно ц.м. (рис. 27).

$$\begin{aligned} ma &= mg - T \\ I\varepsilon &= TR, \end{aligned}$$

где  $T$  - сила натяжения нити,  $I$  - момент инерции цилиндра,  $\varepsilon$  - угловое ускорение ц.м. Точка  $A$  (см. рис. 27) цилиндра в данный момент покоится и цилиндр совершает чистое вращение вокруг оси  $l$ , проходящей через точку  $A$  перпендикулярно плоскости рисунка. Это аналогично движению цилиндра по неподвижной поверхности, где точка  $A$  - точка соприкосновения цилиндра и плоскости и цилиндр совершает чистое вращение вокруг оси  $l$  (рис. 28). Поэтому точка  $C$  в данный

момент движется по окружности радиуса  $R$  и  $a = R\varepsilon$ . Решая совместно последнее уравнение с первыми двумя, получим

$$\varepsilon = \frac{2g}{3R};$$

б) Мощность равна  $P = mgv$ .

## 1.6. Колебания

**3.1.** б) Требуется построить графики зависимости  $a_x$  и  $v_x$  от смещения  $x$ . Для этого покажите, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} a_x &= -\omega^2 x \\ \frac{v_x^2}{\omega^2 A^2} + \frac{x^2}{A^2} &= 1. \end{aligned}$$

**3.2.** а) Представить координату частицы в виде

$$x - \frac{A}{2} = -\frac{A}{2} \sin 2\omega t.$$

Отсюда видно, что частица совершает колебания около положения равновесия  $A/2$ . Последнее равенство позволяет определить амплитуду колебаний и период.

б) Показать, что имеет место равенство

$$\frac{v_x^2}{\omega^2 A^2} + \frac{(x - A/2)^2}{(A/2)^2} = 1.$$

**3.3.** Представить смещение  $x$  в виде

$$x = a \cos(\omega t + \alpha),$$

вводя новые постоянные  $a$  и  $\alpha$  посредством равенств

$$A = a \cos \alpha \quad B = -a \sin \alpha.$$

**3.11.** а) Показать, что имеет место равенство

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Чтобы определить направление движения, найти  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$  и определить их значения, например, при  $t = 0$  и  $\omega t = \pi/2$

б) Найти  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  и выразить их через координаты частицы  $x$  и  $y$ .

**3.13.** уравнение движения частицы имеет вид

$$m\ddot{x} = F(x) = -\frac{dU}{dx} = -U_0 a \sin ax.$$

Положение равновесия определяется из условия  $F(x) = 0$  и равно  $x = 0$ . При малых колебаниях смещения из положения равновесия малы, поэтому

$$F(x) = -U_0 a \sin ax \approx -U_0 a^2 x.$$

Используя это выражение в правой части уравнения движения, можно найти период.

**3.17.** При движении маятников частицы движутся по дугам окружностей радиуса  $l$  (см. рис. 29). Рассмотрим, например, движение правой частицы к положению равновесия. Левая частица движется навстречу. Вдоль касательной на частицу действует проекция силы тяжести  $mg \sin \varphi \approx mg\varphi$  и проекция упругой силы пружины, равная по закону Гука

$$F_{\text{упр}} \cos \varphi = \kappa(L - L_0) \cos \varphi \approx \kappa(L - L_0),$$

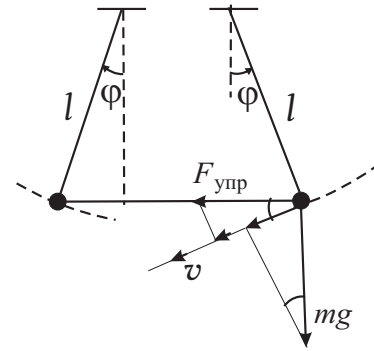


Рис. 29.

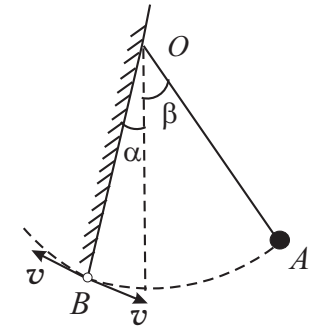


Рис. 30.

где  $L - L_0$  - удлинение пружины, которое при малых  $\varphi$  приближенно равно

$$L - L_0 = 2l \sin \varphi \approx 2l\varphi.$$

Так как скорость равна  $v = -l\dot{\varphi}$  (при движении влево  $\dot{\varphi} < 0$ ), тангенциальное ускорение есть  $a = \dot{v} = -l\ddot{\varphi}$ . Записывая затем уравнение движения и приводя его к стандартному виду уравнения гармонических колебаний, получим выражение для периода.

**3.18.** Шарик движется из начального положения до стенки точно так же как и свободный маятник без ограничений. Поэтому его движение в интервале от  $\beta$  до  $-\alpha$  определяется уравнением

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \quad \omega^2 = \frac{g}{l},$$

где  $\varphi$  - угол отклонения маятника от вертикали, при заданных начальных условиях равный

$$\varphi = \beta \cos \omega t.$$

При упругом отражении от стенки шарик меняет свою скорость на противоположную и опять движется как свободный маятник. Время  $t_{AB}$ , которое затрачивает свободный маятник при движении от  $A$  к  $B$  (см. рис. 30) совпадает со временем его перемещения<sup>1</sup> из  $B$  к  $A$ . Отсюда следует, что период маятника со стенкой равен

$$T = 2t_{AB}.$$

Время движения  $t_{AB}$  находится из уравнения

$$-\alpha = \beta \cos \omega t_{AB}.$$

При решении этого уравнения использовать равенства

$$\begin{aligned} \arccos(-a) &= \pi - \arccos(a) \\ \arccos(a) + \arcsin(a) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

**3.25.** Пусть  $x$  - координата тела, отсчитываемая вдоль оси пружины (ось  $x$  направлена вправо) и недеформированному положению пружин соответствует значение  $x = 0$ . Пусть тело переместилось, например, вправо. Тогда на него действует со стороны левой пружины сила упругости  $F_1$ , направленная влево и стремящаяся вернуть тело в положение равновесия. По закону Гука

$$F_1 = -\kappa \delta l_1 = -\kappa(l_1 - l_0) = -\kappa x,$$

<sup>1</sup>При движении свободного маятника в прямом и обратном направлении, в одной и той же точке траектории его скорости отличаются только направлением. Это следует из закона сохранения энергии. Поэтому время затрачиваемое на движение в разных направлениях вдоль одного и того же участка траектории будет одинаковым.

где  $\delta l_1 = l_1 - l_0 = x$  - удлинение левой пружины. Со стороны правой сжатой пружины действует сила упругости<sup>1</sup>,

$$F_2 = \kappa \delta l_2 = \kappa(l_2 - l_0) = -\kappa x,$$

где  $\delta l_2 = (l_2 - l_0) = -x$  - удлинение второй пружины, также стремящаяся вернуть тело в положение равновесия. Записывая далее уравнение движения, можно найти период.

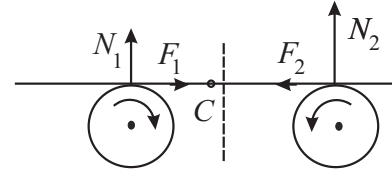


Рис. 31.

**3.27.** Пусть, например, центр масс стержня сместился влево на величину  $x$  относительно середины расстояния между осями дисков (ось  $x$  направлена вправо). Со стороны дисков на стержень действуют силы

реакции на нормальное давление  $N_1$ ,  $N_2$  и силы трения  $F_1 = kN_1$  и  $F_2 = -kN_2$  (см. рис. 31).

Запишем уравнение движения ц.м. стержня, условие отсутствия вращения относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости чертежа (равенство нулю суммарного момента сил относительно этой оси) и условие отсутствия движения в вертикальном направлении

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= kN_2 - kN_1 \\ (l/2 - x)N_1 &= (l/2 + x)N_2 \\ mg &= N_1 + N_2. \end{aligned}$$

Уравнение для смещения ц.м. можно привести к виду уравнения гармонических колебаний

$$m\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

если исключить реакции дисков. Откуда можно найти период  $T = 2\pi/\omega$ .

<sup>1</sup>Если правый конец пружины закреплен, то легко убедиться, что правильное выражение для силы упругости, действующей на левый конец, равно  $F = \kappa \delta l$  (без знака минус), где  $\delta l$  - удлинение пружины, которое может быть как положительным, так и отрицательным

**3.54.** Запишем уравнение для углового момента  $L_z = I\omega = I\dot{\varphi}$

$$I\ddot{\varphi} = -k\varphi,$$

которое имеет вид уравнения гармонических колебаний с  $\omega^2 = k/I$ . Решение этого уравнения есть

$$\varphi = A \cos \omega t + B \sin \omega t = \varphi_m \cos(\omega t + \alpha).$$

Используя начальные условия, можно найти амплитуду колебаний

$$\varphi_m = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Энергия крутильных колебаний равна

$$E = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + U(\varphi),$$

где потенциальная энергия колебательного движения может быть определена из соотношения  $U_1 - U_2 = A$ , где  $A$  - работа упругих сил

$$U(0) - U(\varphi) = \int_0^\varphi N_z d\varphi = \int_0^\varphi k\varphi d\varphi.$$

При условии, что  $U(0) = 0$ , полная энергия равна

$$E = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{k\varphi^2}{2} = \frac{k\varphi_m^2}{2}.$$

**3.66.** Пусть  $x$  координата вдоль оси, направленной вертикально вниз и отсчитываемая от положения равновесия тела. Когда тело находится в равновесном положении, пружина растянута (чтобы уравновесить силу тяжести тела) до длины  $l_0 + \Delta l$ , где  $l_0$  - недеформированная длина пружины, а  $\Delta l$  - соответствующее удлинение.

На тело действует сила тяжести  $mg$  и сила натяжения нити  $F$ . На диск действует сила натяжения  $F$  со стороны тела, а также сила упругости пружины, равная по закону Гука  $\kappa(l_0 + \Delta l + x - l_0) = \kappa(\Delta l + x)$ , при условии, что тело сместится на расстояние  $x$  из положения равновесия. Таким образом, уравнения движения записываются в виде (тело смещается вниз)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - F \\ I\ddot{\varphi} &= RF - R\kappa(\Delta l + x), \end{aligned}$$

где  $\varphi$  - угол поворота диска. Учитывая, что  $\dot{x} = R\dot{\varphi}$  и  $\ddot{x} = R\ddot{\varphi}$ , исключим силу натяжения нити  $F$ .

$$\frac{I}{R}\ddot{x} = R(mg - m\ddot{x}) - R\kappa(x + \Delta l).$$

В положении равновесия,  $x = 0$ ,  $\ddot{x} = 0$ , что дает  $mg = \kappa\Delta l$ . Откуда

$$\ddot{x} = -\frac{\kappa R^2}{mR^2 + I}x.$$

Из этого равенства можно найти частоту и период колебаний.

## 1.7. Гидродинамика

**1.367.** Если рассмотреть физически малый элемент объема жидкости между точками 1 и 2, то он движется по искривленной траектории. Следовательно, этот элемент имеет центростремительное ускорение, направленное к центру кривизны. Отсюда следует, что на этот элемент действует сила со стороны окружающих слоев жидкости, также направленная к

центру кривизны. Эта сила пропорционально разности давлений. Поэтому чем дальше слой жидкости от центра кривизны, тем большим давлением он обладает. Таким образом, давление  $p_1 > p_2$ . Для рассмотрения соотношения между скоростями, нужно рассмотреть уравнение Бернулли для линий тока, проходящих через точки 1 и 2

$$\begin{aligned}\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 &= \text{const} \\ \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 &= \text{const}.\end{aligned}$$

Константы в этих равенствах одинаковые, так как вдоль верхнего сечения скорости, высоты и давления совпадают. Пренебрегая разностью высот в точках 1 и 2, из этих равенств можно найти соотношение между скоростями.

**1.368.** Искомый объем равен

$$Q = v_1 S_1,$$

где  $v_1$  - скорость в сечении  $S_1$ . Поэтому достаточно найти  $v_1$ . Из условия неразрывности (несжимаемости) жидкости,

$$v_1 S_1 = v_2 S_2,$$

где  $v_2$  - скорость в сечении  $S_2$ , следует, что при  $S_1 < S_2$ ,  $v_1 > v_2$ . А из уравнения Бернулли на линии тока

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

следует, что  $p_1 < p_2$ . Поэтому высота столба жидкости будет больше во второй трубке. Так как давление в трубках меняется по закону

$$p_{1,2} = p_0 + \rho g h_{1,2},$$

где  $p_0$  - атмосферное давление, то используя это равенство, уравнение Бернулли и условие неразрывности, можно найти скорость  $v_1$  и искомую величину  $Q = v_1 S_1$ .

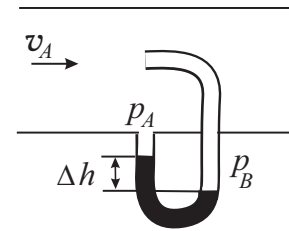


Рис. 32.

**1.369.** Вне трубки скорость и давление газа во всех точках трубопровода одинаковы. Пусть давление и скорость в трубопроводе равны  $v_A$  и  $p_A$  (рис. 32). Искомый объем равен  $Q = v_A S$ . Газ в трубке находится в равновесии с жидкостью. Для газа силой тяжести можно пренебречь, поэтому давление газа в трубке, выходящей навстречу потоку, везде постоянно. Обозначим его как  $p_B$ . Давление в трубке, находящейся в нижней части трубопровода, такое же как и в потоке и равно  $p_A$ .

На линии тока упирающейся в трубку, уравнение Бернулли имеет вид

$$p_A + \frac{\rho v_A^2}{2} = p_B \quad (v_B = 0).$$

Условие равновесия жидкости в трубке имеет вид

$$p_A + \rho_0 g \Delta h = p_B.$$

Из этих равенств может быть найдено  $v_A$  и далее  $Q = v_A S$ .

**1.372.** Если элемент жидкости вылетает из отверстия со скоростью  $v$ , то его дальнейшее движение аналогично движению материальной точки, брошенной на высоте  $h_0$  с начальной скоростью  $v_{0x} = v$  параллельной оси  $x$ . Пройденное расстояние вдоль оси  $x$  равно

$$l = v \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

Скорость  $v$  можно найти из уравнения Бернулли

$$p_0 + \rho gh = p_0 + \rho gh_0 + \frac{\rho v^2}{2},$$

где  $p_0$  - атмосферное давление и скорость на поверхности жидкости принимается равной нулю. После нахождения  $v$  можно найти при каком значении  $h_0$  расстояние  $l$  принимает максимальное значение.

**1.379.** Рассмотрим вначале сосуд высоты  $h_0$  с одним отверстием в боковой стенке на высоте  $h_1$ . На свободной поверхности давление равно атмосферному давлению  $p_0$  и скоростью точек свободной поверхности можно пренебречь. Рассмотрим линию тока, начинающуюся на свободной поверхности воды и уходящую в отверстие. Давление в вытекающей струе приблизительно равно  $p_0$ . Тогда уравнение Бернулли дает

$$p_0 + \rho gh_0 = p_0 + \rho gh_1 + \frac{\rho v^2}{2},$$

где  $v$  - скорость вытекающей струи. Откуда

$$v = \sqrt{2gh},$$

где  $h = h_0 - h_1$ . За единицу времени из отверстия уносится импульс, равный

$$mv = \rho S v \cdot v = \rho S v^2 = \rho S 2gh.$$

Но, изменение импульса жидкости в единицу времени равно силе, действующей на жидкость. Поэтому на жидкость действует сила, равная  $\rho S 2gh$ . На жидкость действуют только стенки сосуда. В свою очередь, по третьему закону Ньютона, жидкость с такой же силой действует на сосуд, но направленной противоположно  $v$ . Таким образом, реакция вытекающей жидкости по величине равна

$$F = \rho S 2gh.$$

Используя этот результат можно найти результирующую силу реакции воды на сосуд в случае двух отверстий.

## 1.8. Упругие деформации твердого тела

**1.347.** Согласно закона Гука сжатие (давление  $P$ ) стержня связано с относительным удлинением стержня  $\varepsilon$  соотношением

$$P = E|\varepsilon|, \quad \varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0},$$

где  $l_0$  - недеформированная длина стержня,  $l$  - его длина после деформации,  $E$  - модуль Юнга.

Если температура стержня изменяется на  $\Delta t$ , то его длина изменится как

$$l = l_0(1 + \alpha \Delta t),$$

где  $\alpha$  - коэффициент линейного расширения. Поэтому, в результате изменения температуры удлинение стержня будет

$$\varepsilon = \alpha \Delta t.$$

Чтобы в результате нагревания длина стержня не изменилась, его необходимо сжать с таким же по величине, но отрицательным удлинением. Согласно закона Гука абсолютная величина давления будет

$$P = \alpha E \Delta t.$$

**1.352.** Рассмотрим малый элемент бруска  $dx$ , находящийся на расстоянии  $x$  от его левого конца (рис. 33). Сила, действующая на этот элемент, движущийся с ускорением  $a$ , равна

$$dT = dm a = \frac{m}{l} dx \frac{F_0}{m} = \frac{F_0}{l} dx,$$

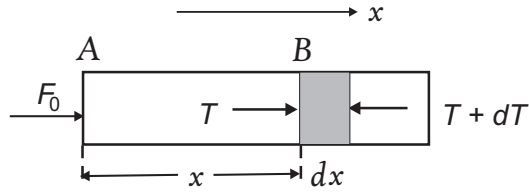


Рис. 33.

где  $m$  - масса бруска, а  $l$  - его деформированная длина. Результирующая сила, действующая на часть  $AB$  бруска и равная<sup>1</sup>  $F_0 - T(x)$ , представляет собой сумму элементарных сил  $dT$

$$F_0 - T(x) = \int_0^x dT = \int_0^x \frac{F_0}{l} dx = \frac{F_0}{l} x,$$

откуда сила сжатия в сечении  $B$  есть

$$T(x) = F_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

Найдем удлинение, которое испытывает произвольный элемент бруска  $dx$  при деформации, используя закон Гука

$$\Delta(dx) = -\frac{T(x)}{ES} dx.$$

При малых деформациях можно пренебречь добавкой  $\Delta T$  и считать, что элемент сжимается силами  $T$ , действующими на его торцах. Чтобы найти суммарное удлинение нужно просуммировать удлинение каждого малого элемента  $\Delta(dx)$ . В результате для удлинения всего бруска получим

$$-\Delta l = \int_0^l \frac{T(x)}{ES} dx = \frac{F_0 l}{2ES}$$

<sup>1</sup>Сила  $T$  действует на элемент  $dx$ , на часть  $AB$  действует сила  $-T$

и относительное удлинение есть

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{F_0}{2ES}$$

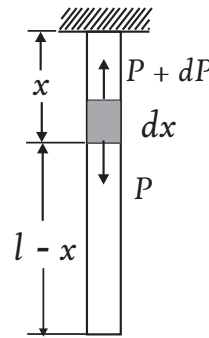


Рис. 34.

**1.355.** а) Рассмотрим элемент стержня  $dx$  (рис. 34). Со стороны нижней части на этот элемент действует сила тяжести  $P(x) = \rho g(l - x)S$ , где  $\rho$  - плотность,  $S$  - площадь поперечного сечения стержня. Со сторон верхней части на этот элемент действует сила  $P + dP = \rho g(l - x + dx)S$ . При вычислении удлинения малого элемента длины можно пренебречь добавкой  $dP$  и считать, что на боковые грани элемента действуют растягивающие силы  $P(x)$ . Тогда по закону Гука удлинение элемента вдоль его оси есть

$$\Delta(dx) = \frac{P}{SE} dx = \frac{\rho g}{E} (l - x) dx.$$

Суммируя все удлинения будем иметь для удлинения всего стержня

$$\Delta l = \int_0^l \frac{\rho g}{E} (l - x) dx = \frac{\rho g l^2}{2E}.$$

б) Относительное удлинение объема стержня есть

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

где

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{\Delta l}{l} \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_y} \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta l_z}{l_z}$$

- относительные удлинения, соответственно, вдоль оси стержня и в двух поперечных направлениях (стержень имеет форму прямоугольного параллелепипеда) и

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\rho g l}{2E} \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \frac{\Delta l}{l},$$

где  $\mu$  - коэффициент Пуассона. Откуда получаем

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\rho g l}{2E}(1 - 2\mu).$$

### 1.9. Релятивистская механика

**Преобразование Лоренца.** Рассмотрим две инерциальные системы отсчета  $K$  и  $K'$ , причем  $K'$  движется относительно  $K$  со скоростью  $\mathbf{v}$ . Пусть оси  $x$  и  $x'$  обеих систем координат направлены вдоль вектора  $\mathbf{v}$ , а оси  $y$   $y'$  и  $z$   $z'$  - параллельны друг другу. Обозначим время в системе  $K$  через  $t$ , а в системе  $K'$  - через  $t'$ . Преобразование Лоренца выражают переход от одной системы отсчета к другой при условии, что скорость света в пустоте во всех инерциальных системах отсчета одинакова и равна  $c$ , и имеет вид ( $\beta = v/c$ ):

$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (\beta/c)x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Обратное преобразование получается в результате перемены знака у  $v$  ( или у  $\beta$ ).

$$x = \frac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (\beta/c)x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Собственной длиной называется линейный размер  $l_0$  тела в той системе отсчета, относительно которой он покоится. Пусть  $l_0$  - собственная длина стержня (в системе  $K'$ ). Если  $l$  - длина этого стержня, измеренная в системе отсчета  $K$ , относительно которой стержень движется со скоростью  $v$ , то согласно преобразованию Лоренца

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Время отсчитанное по часам, движущимся вместе с телом, называется собственным временем этого тела. Обозначим собственное время тела через  $t_0 = t'$  (в  $K'$ -системе). Пусть в одной и той же точке системы  $K'$  происходят два события с интервалом  $\Delta t_0 = \Delta t'$ , в системе  $K$  этим событиям отвечает интервал  $\Delta t$ . Из преобразования Лоренца следует, что эти промежутки времени связаны соотношением

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

**1.396.** Пусть  $l_0$  - собственная длина стержня (в системе отсчета, в которой стержень покоится), а  $l$  - его длина для наблюдателя относительно, которого стержень движется со скоростью  $v$ , тогда по условию

$$l = l_0 - \eta l_0,$$

где  $\eta = 0,005$ . Так как

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

где  $c$  - скорость света, то подставляя, значение  $l$  в первое равенство, получим уравнение для определения  $v$ .



**1.397.** Пусть второй катет треугольника есть  $b$  и прилежащий к катету  $a$  угол есть  $\alpha$ , тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Соответственно для наблюдателя в системе  $K'$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{b}{a'}.$$

Используя связь между собственной длиной катета  $a$  и его длиной  $a'$  в движущейся системе отсчета, можно найти тангенс угла  $\alpha'$ .

Длину гипотенузы в  $K'$  можно найти из равенства

$$l' = \frac{a'}{\cos \alpha'}.$$

**1.398.** Собственная длина  $l_0$  стержня (в  $K'$  - системе) равна

$$l_0 = \sqrt{a'^2 + b'^2},$$

где  $a'$ ,  $b'$  проекции  $l_0$  на оси координат и ось  $x'$  направлена воль направления движения.

Если  $a$  и  $b$  соответственно проекции стержня в  $K$  системе, то

$$a = a' \sqrt{1 - \beta^2} \quad b = b'.$$

Учитывая, что  $a = l \cos \theta$ ,  $b = l \sin \theta$ , из последних равенств можно найти  $a'$ ,  $b'$ , а затем  $l_0$ .

**1.399.** Пусть метки расположены в  $K$ -системе вдоль оси  $x$ . Найдем скорость и длину стержня в  $K$ -системе. Скорость равна

$$v = \frac{\Delta x}{t_2 - t_1}.$$

Длина стержня равна

$$l = v(t_3 - t_2).$$

Откуда можно найти собственную длину стержня

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

**1.400.** Если  $t_0$  - собственное время (в  $K'$  - системе), а  $t$  время в системе  $K$ , то

$$t_0 = t \sqrt{1 - v^2/c^2} = t - \Delta t.$$

Решая это уравнение, можно найти искомую скорость.

**1.401.** В  $K$  - системе длина стержня равна  $l = vt$  (в течение интервала  $\Delta t$  левый конец стержня пройдет расстояние до метки, равное длине стержня  $l$ .)

В  $K'$  - системе собственная длина стержня равна  $l_0 = v \Delta t_0$  (в течение промежутка  $\Delta t_0$  метка пройдет расстояние  $l_0$  со скоростью  $v$ ). Так как

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2},$$

то подставляя  $l$  и  $l_0$ , получим уравнение для определения  $v$ .

## Задачи

**1.1.** Катер, двигаясь вниз по реке, обогнал плот в пункте  $A$ . Через  $\tau = 60$  мин после этого он повернул обратно и затем встретил плот на расстоянии  $l = 6,0$  км ниже пункта  $A$ . Найти скорость течения, если при движении в обоих направлениях мотор катера работал в одном режиме.

**1.3.** Точка прошла половину пути со скоростью  $v_0$ . На оставшейся части пути она половину времени двигалась со скоростью  $v_1$ , а последний участок прошла со скоростью  $v_2$ . Найти среднюю за все время движения скорость точки.

**1.5.** Две частицы, 1 и 2, движутся с постоянными скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Их радиус-векторы в начальный момент времени равны  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . При каком соотношении между этими четырьмя векторами частицы испытают столкновение друг с другом?

**1.7.** Два пловца должны попасть из точки  $A$  на одном берегу реки в прямо противоположную точку  $B$  на другом берегу. Для этого один из них решил переплыть реку по прямой  $AB$ , другой же - все время держать курс перпендикулярно к течению, а расстояние, на которое его снесет, пройти пешком по берегу со скоростью  $u$ . При каком значении  $u$  оба пловца достигнут точки  $B$  за одинаковое время, скорость течения  $v_0 = 2$  км/ч и скорость каждого пловца относительно воды  $v' = 2,5$  км/ч.

**1.10.** Два тела бросили одновременно из одной точки: одно - вертикально вверх, другое - под углом  $\theta = 60^\circ$  к горизонту. Начальная скорость каждого тела  $v_0 = 25$  м/с. Найти расстояние между телами через  $t = 1,70$  с.

**1.15.** Кабина лифта, у которой расстояние от пола до потолка  $2,7$  м, начала подниматься с ускорением  $1,2$  м/с<sup>2</sup>. Через  $2,0$  с после начала подъема с потолка кабины стал падать болт.

Найти: а) время свободного падения болта; б) перемещение и путь болта за время свободного падения в системе отсчета, связанной с шахтой лифта.

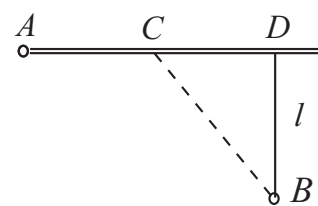


Рис. 35.

**1.17.** Из пункта  $A$ , находящегося на шоссе (см. рис. 35) необходимо за кратчайшее время попасть на машине в пункт  $B$ , расположенный в поле на расстоянии  $l$ . На каком расстоянии от точки  $D$  следует свернуть с шоссе, если скорость машины по полю в  $\eta$  раз меньше ее скорости по шоссе?

**1.20.** Радиус-вектор частицы меняется со временем  $t$  по закону  $\mathbf{r} = \mathbf{b}t(1 - \alpha t)$ , где  $\mathbf{b}$  - постоянный вектор,  $\alpha$  - положительная постоянная. Найти: а) скорость и ускорение частицы как функции  $t$ ; б) время, через которое частица вернется в исходную точку, и пройденный при этом путь.

**1.21.** В момент  $t = 0$  частица вышла из начала координат в положительном направлении оси  $x$ . Ее скорость меняется со временем  $t$  как  $\mathbf{v} = v_0(1 - t/\tau)$ , где  $v_0$  - начальная скорость, ее модуль  $v_0 = 10,0$  см/с,  $\tau = 5,0$  с. Найти: а) координату  $x$  частицы, когда  $t = 6,0, 10$  и  $20$  с; б) моменты времени, когда частица будет находиться на расстоянии  $10,0$  см от начала координат.

**1.22.** Частица движется в положительном направлении оси  $x$  так, что ее скорость меняется по закону  $v = \alpha\sqrt{x}$ , где  $\alpha$  - положительная постоянная. В момент  $t = 0$  частица находилась в точке  $x = 0$ . Найти: а) ее скорость и ускорение как функции времени; б) среднюю скорость за время, в течение которого она пройдет первые  $s$  метров.

**1.24.** Точка движется в плоскости  $xy$  по закону  $x = \alpha t$ ,  $y = \beta t^2$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  - положительные постоянные. Найти: а) уравнение траектории точки  $y = y(x)$  и ее график; б) модули

скорости и ускорения точки как функции  $t$ ; в) угол  $\varphi$  между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{v}$  как функцию  $t$ .