1.1. Кинематика

1.1 Катер, двигаясь вниз по реке, обогнал плот в пункте A. Через $\tau = 60$мин после этого он повернул обратно и затем встретил плот на расстоянии $l = 6,0$км ниже пункта A. Найти скорость течения, если при движении в обоих направлениях мотор катера работал в одном режиме.

Пусть скорость катера относительно реки есть $\upsilon_{\text{к}}$, а $\upsilon_{\text{р}}$ - скорость реки (плота). При решении надо учесть, что скорость катера относительно берега, когда он движется по течению, есть $\upsilon_{\text{к}} + \upsilon_{\text{р}}$, а против течения, $\upsilon_{\text{к}} - \upsilon_{\text{р}}$ Задачу можно решить двумя способами.
Первый способ. Полное время до встречи можно записать как

$$\frac{l}{\upsilon_{\text{р}}} = \tau + \frac{(\upsilon_{\text{к}} + \upsilon_{\text{р}})\tau - l}{\upsilon_{\text{к}} - \upsilon_{\text{р}}}\,.$$

Откуда находим $\upsilon_{\text{р}} = l/2\tau$;
Второй способ. Пусть t - время движения катера против течения. Тогда расстояние пройденное катером за время τ есть:

$$(\upsilon_{\text{к}} + \upsilon_{\text{р}})\tau = \upsilon_{\text{р}}(t+\tau) + (\upsilon_{\text{к}} - \upsilon_{\text{р}})t\,.$$

Учитывая, что $\upsilon_{\text{р}}(t+\tau) = l$, получаем $\upsilon_{\text{р}} = l/2\tau$.
1.3. Пусть t_1 - время, в течение которого была пройдена первая половина пути, а t_2 - время движения со скоростью υ_1 и скоростью υ_2. Тогда

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{\text{пройденный путь}}{\text{затраченное время}} = \frac{\upsilon_0 t_1 + \upsilon_1 t_2 + \upsilon_2 t_2}{t_1 + 2t_2}\,.$$

Так как $\upsilon_0 t_1 = \upsilon_1 t_2 + \upsilon_2 t_2$, то получаем

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{2\upsilon_0(\upsilon_1 + \upsilon_2)}{\upsilon_1 + \upsilon_2 + 2\upsilon_0}\,.$$

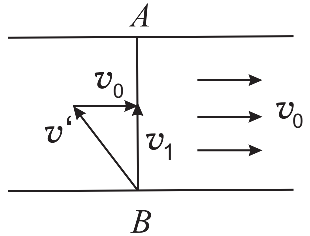

Рис. 1.

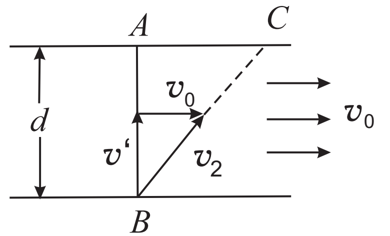

Рис. 2.

1.5. При равномерном движении радиус векторы частиц меняются со временем по закону

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1(t) &= \boldsymbol{v}_1 t + \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2(t) &= \boldsymbol{v}_2 t + \boldsymbol{r}_2\,. \end{aligned}$$

Момент времени столкновения t определяется из условия

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{r}_2(t)$$

и равен

$$t = \frac{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|}{|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|}\,.$$

Подставляя t в предыдущее равенство получим соотношение между векторами

$$\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1|}\,.$$

1.7. Чтобы двигаться по прямой AB первый пловец должен учитывать течение реки и плыть под некоторым углом к AB со скоростью v' относительно берега (см.рис. 1). Результирующая скорость равна υ_1. Второй пловец плывет вдоль AB, но за счет течения будет двигаться (относительно берега) вдоль BC со скоростью υ_2 (рис. 2).

Время движения первого пловца $t_1 = d/v_1$, время движения второго

$$t_2 = \frac{BC}{v_2} + \frac{AC}{u}\,.$$

Приравнивая t_1 к t_2 и выражая BC, AC, v_1 и v_2 через v_0 и v', получим

$$u = \frac{v_0}{\left(v'/\sqrt{v'^2 - v_0^2}\right) - 1}\,.$$

1.10.(5) Движение происходит в вертикальной плоскости (x, y). Сила тяжести действует вдоль оси y. Если $(x_1 y_1)$- координаты тела брошенного вертикально вверх, а (x_2, y_2) - координаты второго тела, то расстояние r между телами в момент t есть

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,.$$

1.15. а) Чтобы найти время падения болта на пол лифта достаточно найти ускорение болта относительно лифта и использовать равноускоренный закон движения.

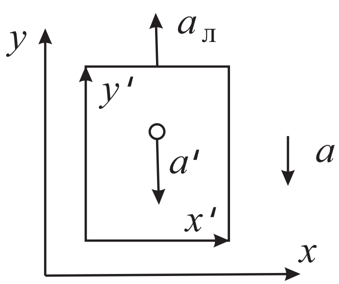

Рис. 3.

Будем рассматривать две системы отсчета, одну связанную с лифтом, а другую с шахтой (рис. 3). Первая система отсчета движется относительно второй с ускорением $a_л$. Ускорение болта относительно лифта обозначим через a', а ускорение относительно шахты через a. Тогда

$$a = a_л + a'\,.$$

Так как $a = -g$, то

$$a' = a - a_л = -(g + a_л) = \mathrm{const}\,.$$

Закон равноускоренного движения болта относительно лифта имеет вид

$$y' = \frac{a' t^2}{2} + h = -\frac{(g + a_л)t^2}{2} + h\,,$$

где h - высота лифта и время отсчитывается от момента отрыва болта от потолка. Время падения t_1 находится из условия, что при $t = t_1$, $y' = 0$ и равно

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g + a_л}}\,.$$

1.17. Пусть скорость по шоссе есть v, тогда по полю - v/η. Введем обозначения $AD = L$, а $CD = x$. Тогда полное время движения равно

$$t(x) = \frac{L - x}{v} + \frac{\eta\sqrt{l^2 + x^2}}{v}\,.$$

Требуется найти такое x, чтобы t было минимальное. Для этого необходимо это решить уравнение

$$\frac{dt(x)}{dx} = 0\,.$$

Решая уравнение, получаем

$$x = \frac{l}{\sqrt{\eta^2 - 1}}\,.$$

1.20. а) Дифференцируя $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}t(1 - \alpha t)$ один раз, находим скорость $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}(1 - 2\alpha t)$, а после дифференцирования скорости получаем ускорение $\boldsymbol{a} = -2\alpha\boldsymbol{b}$.

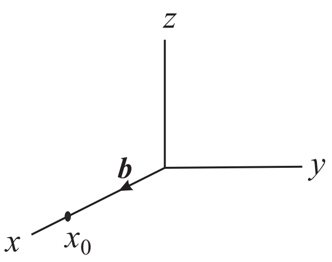

Рис. 4.

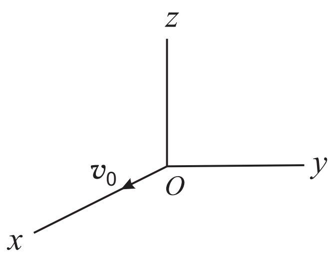

Рис. 5.

б) Пусть движение начинается при $t = 0$ и $\boldsymbol{r}(0) = 0$. Найдем все t при которых $\boldsymbol{r} = 0$. Легко найти, что $t_1 = 0$ и $t_2 = 1/\alpha$. Таким образом, частица через $t = 1/\alpha$ вернется в начало координат.

Найдем пройденный путь. Отметим, что частица движется вдоль прямой параллельной вектору $\boldsymbol{b}$. Выберем систему координат, в которой ось x направлена вдоль вектора $\boldsymbol{b}$ (рис. 4). В такой системе координат частица движется вдоль оси x до точки x_0 останавливается в ней и движется обратно. Момент времени остановки t_0 определяется из условия

$$x(t) = bt(1 - \alpha t) \qquad v = \dot{x} = b(1 - 2\alpha t) = 0\,,$$

где $b = |\boldsymbol{b}|$. Откуда получаем $t_0 = 1/2\alpha$. Пройденный путь равен $s = 2x_0 = 2x(t_0) = b/2\alpha$

1.21. В данном случае имеем прямолинейное, движение в направлении постоянного вектора v_0. Выберем систему координат, ось x которой направлена вдоль постоянного вектора v_0 (рис. 5) В такой системе частица движется вдоль оси x со скоростью $v = |\boldsymbol{v}| = v_0(1 - t/\tau)$, с ускорением $a = \dot{v} = -v_0/\tau$ $=$ const. Так как ускорение постоянно, начальное значение скорости есть v_0 и частица начинает двигаться из начала координат, то равноускоренный закон движения вдоль оси x

есть

$$x = -\frac{v_0 t^2}{2\tau} + v_0 t = v_0 t\Big(1 - \frac{t}{2\tau}\Big)\,.$$

Задавая в последнем равенстве t, можно определить положение частицы. Задавая расстояние x от начала координат можно определить соответствующие моменты времени.

1.22. а) Найдем ускорение точки. По определению имеем

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}}\,\alpha\sqrt{x} = \frac{\alpha^2}{2} = \text{const}\,.$$

Откуда следует, что движение равноускоренное. Используя это условие и определяя начальное положение точки и начальную скорость, находим скорость и закон движения

$$v = \frac{\alpha^2 t}{2}\,, \qquad x = \frac{\alpha^2 t^2}{4}\,.$$

б) Средняя скорость определяется как $v_{\text{ср}} = s/T$, где T - время движения. Определяя T из закона движения, находим

$$v_{\text{ср}} = \frac{\alpha\sqrt{s}}{2}\,.$$

1.24. а) Чтобы найти траекторию движения, $y = y(x)$, достаточно исключить время t из уравнений

$$x = \alpha t \qquad y = \beta t^2\,.$$

Выражая t из первого уравнения и подставляя во второе, получим $y = \beta x^2/\alpha^2$. Траектория парабола;

б) $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\dot{x}^{\,2} + \dot{y}^{\,2}}$; в) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\ddot{x}^{\,2} + \ddot{y}^{\,2}}$; г) $\cos\varphi = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{v}|}$.

1.28. Радиус-вектор частицы, начинающей движение из начала координат в поле силы тяжести, есть

$$\boldsymbol{r} = -\frac{\boldsymbol{g}t^2}{2} + \boldsymbol{v}_0 t\,,$$

или в проекциях

$$x = \boldsymbol{v}_0 t \cos\alpha\,, \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin\alpha$$

где $\boldsymbol{g} = (0,\, g)$ и g - ускорение свободного падения.
а) Время движения t_0 находится из условия $y = 0$. Откуда $t_0 = 2v_0 \sin\alpha/g$;
б) Чтобы найти максимальную высоту $h_{\max}$, найдем вначале время подъема $t_1 = v_0 \sin\alpha/g$ из условия $\dot{y} = 0$. Подставляя затем t_1 в $y(t)$, находим $h = v_0^2 \sin\alpha/2g$. Дальность полета определяется как $L = x_{\max} = x(t_0) = v_0^2 \sin 2\alpha/g$. Из условия $h_{\max} = x_{\max}$, находим $\cos\alpha = 1/4$. (Легко найти из уравнения $\sin 2\alpha = Lg/v_0^2$, что одному и тому же L соответствуют два α;
в) Выражая время t из закона движения вдоль оси x и подставляя его в закон движения вдоль y, получим

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2$$

- парабола.

1.29. а) Исходя из определения радиус кривизны в начале координат есть

$$\rho_0 = \frac{v_0^2}{a_n} = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}\,,$$

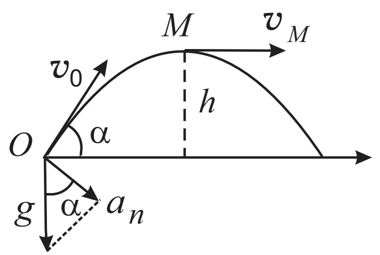

Рис. 6.

где v_0 - начальная скорость и α - угол между начальной скоростью и и горизонтальной прямой (см. 6). Так скорость в точке максимального подъема равна $v_0 \cos\alpha$, а нормальное ускорение $a_n = g$, то радиус кривизны в этой точке есть $\rho_M = v_0^2 \cos^2\alpha/g$. Тогда из условия

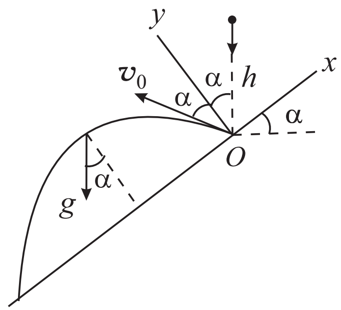

Рис. 7.

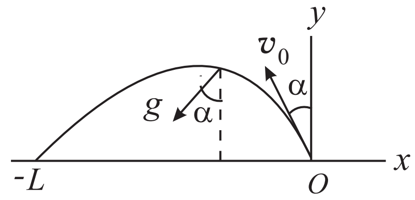

Рис. 8.

$\rho_0 = \eta\rho_M$ получаем $\cos^3\alpha = \eta^{-1}$. Откуда $\alpha = \pi/3$; б) Радиус кривизны в точке M есть $\rho_M = h = v_0^2 \sin^2\alpha/2g$ (см задачу 1.28). Тогда

$$\frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}\,.$$

1.30. Будем отсчитывать потенциальную энергию от точки O (см. рис. 7). Тогда из закона сохранения энергии следует, что шарик упадет в точку O со скоростью $v_0 = \sqrt{2gh}$. При упругом падении с такой же по величине скоростью он отскочит от плоскости. Удобно выбрать систему координат как показано на рис. 7. Тогда, в силу равенства при упругом падении угла падения и угла отражения, скорость отражения будет составлять угол α с осью y. Далее задача решается аналогично задаче 1.28, за исключением того, что сила, действующая на шарик, направлена под углом α к вертикали (см. рис. 8).

1.31. Пусть угол наклона начальной скорости к оси абсцисс есть α. Тогда время движения снаряда равно (см. задачу

1.28) $t = 2v_0 \sin\alpha/g$. Откуда $\sin\alpha = gt/2v_0$. Так как расстояние пройденное снарядом вдоль оси абсцисс есть $L = v_0 t\cos\alpha$, то $\cos\alpha = L/v_0 t$. Используя условие $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, получим уравнение для определения t, решая которое находим

$$t_{1,2} = 2\left(\frac{v_0}{g}\right)^2\left\{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{gL}{v_0^2}\right)^2}\right\}.$$

Время движения определяется в зависимости о начального угла.

1.34. а) Так как $\dot{x} = \alpha$ и $x_0 = x(0) = 0$, то $x = \alpha t + x_0 = \alpha t$. Скорость вдоль оси y равна $\dot{y} = \beta x$, тогда для ускорения имеем $\ddot{y} = \beta\dot{x} = \beta\alpha = \mathrm{const}$. Откуда следует, что движение вдоль y равноускоренное и закон движения с учетом начальных условий есть

$$y = \frac{\alpha\beta}{2}t^2.$$

Ускорения частицы вдоль осей равны $a_x = \ddot{x} = 0$, $a_y = \ddot{y} = \alpha\beta$, поэтому величина ускорения есть $a = \alpha\beta$.

Исключая t с помощью равенства $t = x/\alpha$, получаем из последнего равенства для y уравнение траектории (парабола)

$$y = \frac{\beta}{2\alpha}x^2.$$

б)Радиус кривизны равен

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 x^2}{a_n}.$$

Нормальное ускорение равно (см. рис. 9) $a_n = a\cos\varphi = \alpha\beta\cos\varphi$. Так как $\mathrm{tg}\,\varphi = y' = \beta x/\alpha$, то находя $\cos\varphi$, в результате получим

$$\rho = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 + \beta^2 x^2/\alpha^2\right)^{3/2}.$$

1.36. Полное ускорение равно $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$, где $a_n = v^2/R = \alpha^2 t^2/R$ - нормальное ускорение и $a_\tau = \dot{v} = \alpha$ - касательное ускорение. Находя пройденный путь S из равенства $\dot{S} = v = \alpha t$ и определяя момент времени t из условия $S = 2\pi R n$, найдем a_n и окончательно

$$a = \alpha\sqrt{1 + (4\pi n)^2}.$$

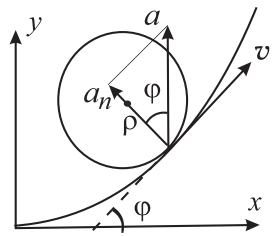

Рис. 9.

1.38. Если φ угол между касательным ускорением a_τ и полным ускорением, то $\mathrm{tg}\,\varphi = a_n/a_\tau$, где a_n - нормальное ускорение. Записывая скорость как $v = ks$, где k - константа, и вычисляя ускорения, $a_\tau = \dot{v} = (dv/ds)ds/dt$, $a_n = v^2/R$, получим $\mathrm{tg}\,\varphi = 2s/R$.

1.39. Находя скорость движения как $v = \dot{l}$ и ускорения $a_\tau = \ddot{l}$, $a_n = v^2/R$, получим полное ускорение $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$.

1.42. а)Так как величина скорости постоянна, то $a_\tau = \dot{v} = 0$. Поэтому полное ускорение совпадает с нормальным, $a = a_n$ (рис. 10). Проекции скорости частицы есть $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y} = 2\alpha x\dot{x}$ и соответственно ускорения равны $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y} = 2\alpha\dot{x}^2 + 2\alpha x\ddot{x}$.

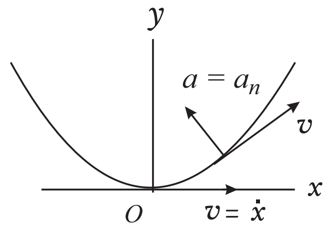

Рис. 10.

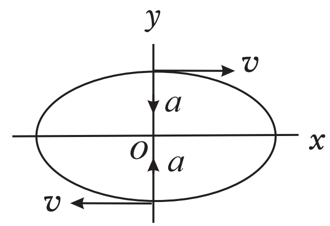

Рис. 11.

В точке $x = 0$ скорость направлена вдоль оси x (касательно к графику траектории), $v_x = v$, $v_y = 0$. Для ускорений будем иметь $a_x = a_\tau = 0$, $a_y = 2\alpha v^2$. Так как $a_y = a_n = v^2/R$, где R - радиус кривизны, то из последнего равенства получаем $R = 1/2\alpha$.

б) В точке $x = 0$ скорость направлена вдоль оси x, по касательной к графику (см. рис. 11) и ее проекции есть $v_x = \dot{x} = \pm v$, $v_y = \dot{y} = 0$, для ускорений имеем $a_x = a_\tau = 0$, $a_y = a_n = a = \ddot{y}$.

Чтобы найти проекцию ускорения $\ddot{y} = a_n$, продифференцируем уравнение эллипса $x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 = 1$ два раза по времени. После первого дифференцирования получим $\dot{y} = -(\beta/\alpha)^2(x/y)\dot{x}$. После второго, в точке $x = 0$, -

$$a = \ddot{y} = \frac{\beta v^2}{\alpha^2}\,.$$

Так как $\ddot{y} = a_n$, то $R = \alpha^2/\beta$.

1.44. Полное ускорение точки равно $a = \sqrt{\dot{v}^2 + (v^2/R)^2}$. Определяя $v = R\dot{\varphi} = R2\beta t$ и $\dot{v}$, получим $a = (v/t)\sqrt{1 + 4\beta^2 t^4}$.

1.45.(21) Пусть некоторая точка A лежит в концевой части снаряда на его поверхности и ее координата вдоль оси ствола в произвольный момент времени есть x . Если $\varepsilon = \mathrm{const}$ угловое ускорение и $\omega = \varepsilon t$ угловая скорость, то угол поворота снаряда есть

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\omega t}{2}\,.$$

Пусть за время τ точка A пройдет расстояние l вдоль ствола и совершит $n = 2$ оборота вокруг оси ствола. Тогда при $t = \tau$ из предыдущего равенства получим

$$\omega = \frac{4\pi n}{\tau}\,.$$

Чтобы найти время движения τ, достаточно воспользоваться равноускоренным законом прямолинейного движения $x = at^2/2$, связью ускорения a со скоростью v и условием того, что при $t = \tau$ $x = l$. В результате получим $\tau = 2l/v$ и $\omega = 2\pi n v/l$.

1.47. Тело остановится, когда $\omega = \dot{\varphi} = 0$. Откуда поучаем время остановки $t_0 = \sqrt{a/3b}$. Средние угловая скорость $<\omega>$ и ускорение $<\beta>$ определяются как

$$<\omega>= \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} \dot{\varphi}dt = \frac{2a}{3} \qquad <\beta>= \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} \ddot{\varphi}dt = -\sqrt{3ab}\,.$$

1.48.Точка движется по окружности, лежащей в плоскости перпендикулярной оси вращения. Величина угловой скорости находится из равенства $\dot{\omega} = \beta = \alpha t$. Из рис. 12 видно, что $\operatorname{tg}\varphi = a_n/a_\tau$. Если $v = \omega r$ - линейная скорость точки, где r - радиус окружности, то $a_\tau = \dot{v}$. Нормальное ускорение равно $a_n = v^2/r$. Откуда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha t^3}{4}\,.$$

Искомое время находим из условия

$$\alpha t^3 = 4\operatorname{tg}(\pi/3)\,.$$

1.52. а) В любой момент времени тело совершает чистое вращение вокруг мгновенной оси вращения l, проходящей через точку B касания колеса с поверхностью, перпендикулярно направлению скорости центра инерции O и плоскости колеса (см. 13). Поэтому $\omega = v/R$. Так как $\boldsymbol{v} = \mathrm{const}$, то и вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ постоянен и лежит вдоль l.

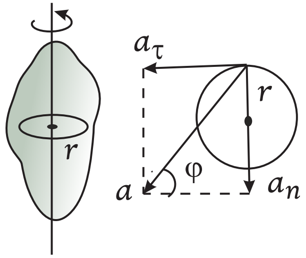

Рис. 12.

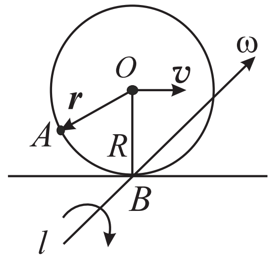

Рис. 13.

В общем случае скорость и ускорение произвольной точки A твердого тела есть

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}]$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{r}] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}]]\,,$$

где $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{a}_0$ - скорость и ускорение центра инерции колеса, а $\boldsymbol{\beta}$ - угловое ускорение. Учитывая, что $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ постоянные векторы, $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{r}$, а также, что для любых трех векторов выполняется равенство

$$[\boldsymbol{A}, [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}]] = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\,,$$

получим

$$\boldsymbol{a} = -\frac{v^2}{R}\,\frac{\boldsymbol{r}}{R}\,.$$

Так как $\boldsymbol{r}/R$ - единичный вектор, направленный из точки O в точку A, то $\boldsymbol{a}$ направлен к центру колеса (из точки A). Величина ускорения равна $a = v^2/R$.

1.2. Динамика

1.59. Из второго закона Ньютон, $m\ddot{x} = F$, получим $F = m(2\alpha - 6\beta t)]$. Искомые величины можно найти, определяя моменты времени соответствующие точке поворота, в которой $\dot{x} = 0$, и нахождению частицы в точке $x = 0$.

1.60. Для решения задачи достаточно записать закон Ньютона $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ вдоль координатных осей. Так как радиус вектор частицы равен $\boldsymbol{r} = (x,\, y) = (A\sin\omega t,\, B\cos\omega t)$, то $\boldsymbol{F} = -\omega^2\boldsymbol{r}$.

1.62. Пусть R - подъемная сила. Записывая второй закон Ньютона для массы m, а затем для массы $m - m_б$, где $m_б$ - масса балласта, получим из этих соотношений $m_б = 2ma/(a+g)$.

1.63. Если F_0 сила натяжения нити между массами m_0 и m_1, а F - между массами m_1 и m_2, то

$$\begin{aligned} m_0 a &= m_0 g - F_0 \\ m_1 a &= F_0 - k m_1 g - F \\ m_2 a &= F - k m_2 g\,. \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно a, F и F_0, получаем искомые величины.

1.67. Отношения масс случае (а) можно найти из условия, что результирующая сила, F_1, действующая на массу m_1, должна быть направлена к вершине наклонной плоскости, а результирующая сила F_2, действующая на массу m_2, - вертикально вниз вдоль катета треугольника. В случае (б) направления сил противоположны.

1.68. Для решения задачи достаточно записать второй закон Ньютона для первого тела вдоль наклонной плоскости, а для второго - вдоль катета и учесть, что сила трения равна $F_{\text{тр}} = kN$, где N - реакция на нормальное давление, и направлена против движения. Совместное решение двух получившихся уравнений дает искомую величину.

1.71. При изменении угла α длина наклонной плоскости S будет изменяться. Для ускорении a пройденный вдоль наклонной плоскости путь равен

$$S = \frac{at^2}{2}\,,$$

где t - время движения. Откуда

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2L}{a\cos\alpha}}$$

и $L = \mathrm{const}$ - длина катета, лежащего в основании наклонной плоскости. Определяя ускорение из второго закона Ньютона, получим для t

$$t(\alpha) = \frac{\sqrt{2L}}{\sqrt{g\cos\alpha(\sin\alpha - k\cos\alpha)}}\,.$$

Искомый угол находится из условия экстремума $t'(\alpha) = 0$, которое сводится к уравнению $\operatorname{tg} 2\alpha = -1/k$.

1.73. Используя второй закон Ньютона, и учитывая, что ускорение бруска равно нулю, получим для силы натяжения нити F:

$$F = \frac{kmg}{\cos\alpha + k\sin\alpha}\,.$$

Это выражение принимает минимальное значение, когда знаменатель максимален. Определяя максимум функции, найдем, что угол α удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg}\alpha = k\,.$$

Значение F в этом случае равно

$$F = \frac{kmg}{\sqrt{1+k^2}}\,.$$

1.74. Груз и муфта создают натяжение нити. В свою очередь нить, по третьему закону Ньютона, с той же силой натяжения действует на груз и муфту. Но так как действие нити на муфту проявляется только в виде трения, то сила натяжения нити равна силе трения $F_{\text{тр}}$ муфты о нить. С такой же по величине силой нить действует на груз.

Выберем систему отсчета, связанную с неподвижным блоком. Если ускорение груза (и следовательно нити) относительно этой системы отсчета равно a, то ускорение муфты относительно этой системы будет $a' - a$, так как муфта движется относительно нити с ускорением a', а сама нить движется в противоположном направлении с ускорением a. Составляя далее уравнения движения для муфты и груза (используя второй закон Ньютона), получим для ускорения a

$$a = g - \frac{F_{\text{тр}}}{M}$$

и силы трения

$$F_{\text{тр}} = \frac{mM(2g - a')}{m + M}\,.$$

1.75. Если a' - ускорения грузов относительно кабины, то их ускорения относительно неподвижной системы отсчета есть

$$a_1 = a_0 + a' \qquad a_2 = a_0 - a'$$

(m_1 движется вверх, m_2 - вниз). Записывая второй закон Ньютона для каждого тела и решая полученную систему уравнений, получим

$$\boldsymbol{a}' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}_0)\,.$$

Сила, действующая на потолок со стороны блока (из-за натяжения нитей) равна $F = 2T$, где T - натяжение нити. Из уравнений движения получим

$$\boldsymbol{F} = -\frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}_0)\,.$$

1.76. Пусть на массу m_0 со стороны нити действует сила натяжения F_1. На массы m_1 и m_2 со стороны нити действует сила F_2. По третьему закону Ньютона массы m_1 и m_2 действуют на нить с противоположной силой $-F_2$. Поэтому результирующая сила, действующая на движущийся блок (блок A) есть

$$2F_2 - F_1\,.$$

Запишем второй закон Ньютона для всех тел, включая блок A. Пусть ускорение m_0 есть a, а ускорения m_1, m_2 есть соответственно $\pm a'$. Пусть, например, тело m_0 движется вправо, а тело m_1 относительно блока A вверх. Тогда относительно неподвижной поверхности уравнения движения принимают вид (предполагается, что все тела движутся вниз)

$$\begin{aligned}
&m_0a = F_1\\
&m_Aa = 2F_2 - F_1\\
&m_1(a-a') = m_1g - F_2\\
&m_2(a+a') = m_2 - F_2\,.
\end{aligned}$$

Решая эту систему, при условии, что масса блока A $m_A \to 0$, получим

$$a_1 = g\frac{4m_1m_2 + (m_1-m_2)m_0}{4m_1m_2 + (m_1+m_2)m_0}\,.$$

1.77. Прежде заметим. что если брусок движется с постоянной скоростью, то тело 2 не испытает действие силы в направлении движения бруска. Когда брусок движется с ускорением

a, то в направление его движения на тело 2 действует сила $N_2 = ma$, представляющая реакцию боковую поверхность бруска на нормальное давление тела. Если k - коэффициент трения покоя, то при достаточно большом ускорении a максимальное значение силы трения покоя, равное $kN_2 = kma$, будет достаточно большим, чтобы тело 2 (и следовательно тело 1) оставалось бы неподвижным относительно бруска. Поэтому имеет смысл говорить о минимальном ускорении при котором тела не движутся.

Рассмотрим сначала случай, когда тела перемещаются относительно бруска. Пусть брусок перемещается с ускорением a, а тело 1 движется в противоположную сторон с ускорением a' по поверхности бруска. Записывая второй закон Ньютона для каждого тела относительно неподвижной поверхности, получим систему уравнений движения

$$\begin{aligned}
&m(a-a') = F_{\text{н}} - F_{\text{тр}\,1}\\
&mg = N_1\\
&ma' = mg - F_{\text{н}} - F_{\text{тр}\,2}\\
&ma = N_2\,,
\end{aligned}$$

где $F_{\text{тр}\,1,2}$ - силы трения, а $N_{1,2}$ - реакции опоры, действующие на тела.

Если тела неподвижны, то $a' = 0$ и

$$\begin{aligned}
F_{\text{н}} - ma &= F_{\text{тр}\,1}\\
mg - F_{\text{н}} &= F_{\text{тр}\,2}\,.
\end{aligned}$$

Для того, чтобы движения не происходило сила, действующая на тело, не должна превышать максимального значения силы трения покоя, равного kN, где k - коэффициент трения покоя. Достижение этого значения приведет к движению тела. Отсюда следует, что $F_{\text{тр}\,\text{i}} \leqslant kN_i$ и

$$\begin{aligned} F_{\text{н}} - ma &\leqslant kN_1 = kmg \\ mg - F_{\text{н}} &\leqslant kN_2 = kma\,. \end{aligned}$$

Откуда получаем

$$a \geqslant \frac{1-k}{1+k} g\,.$$

и искомое значение есть

$$a_{\min} = \frac{1-k}{1+k} g\,.$$

1.78. Если брусок неподвижен относительно призмы, то в системе отсчета связанной с неподвижной поверхностью на него действует сила ma, направленная влево. Проектируя второй закон Ньютона на наклонную плоскость и на перпендикулярное направление, найдем реакцию призмы на нормальное давление N и силу трения покоя $F_{\text{тр}}$. Движение бруска относительно призмы будет отсутствовать, если сила трения покоя не превышает своего максимального значения kN. Из этого условия находим

$$a_{max} = \frac{1 + k \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - k}\,.$$

1.80. Используя условие, что в момент t_0 отрыва тела от плоскости реакция плоскости на нормальное давление равна нулю, $N = 0$, получим $t_0 = mg/k \sin \alpha$. Скорость тела в произвольный момент $t \leqslant t_0$ можно найти из уравнения движения

$$m\ddot{x} = kt \cos \alpha\,,$$

где x координата тела (материальной точки) вдоль направления движения, при условии, что $\dot{x}(0) = 0$. Подставляя в

полученное выражение $t = t_0$, найдем

$$v_0 = \frac{mg^2}{2k \sin^2 \alpha} \cos \alpha\,.$$

При условии, что $x(0) = 0$, пройденный путь равен

$$x_0 = \int_0^{t_0} \dot{x}(t')dt' = \frac{m^2 g^3}{6k^2 \sin^3 \alpha} \cos \alpha\,.$$

1.81. Запишем второй закон Ньютона

$$m\frac{dv}{dt} = F \cos \alpha = F \cos ks\,.$$

Последнее равенство показывает, что ускорение явно зависит от пройденного пути. Поэтому удобно рассматривать скорость зависящей от времени через путь s, т.е. $v(t) = v(s(t))$. Тогда

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v$$

и

$$\frac{dv}{ds} v = \frac{F}{m} \cos ks\,.$$

Интегрируя это равенство, учитывая что $v dv/ds = dv^2/2dt$, получим

$$v = \sqrt{2g \sin \alpha / 3k}\,.$$

1.84. а) Выберем ось x в направлении постоянного вектора $\mathbf{b}$, тогда движение происходит вдоль оси x. Если $p = p_x = mv_x$ - импульс частицы, то

$$\dot{p} = bt(\tau - t)\,,$$

где $b = |\mathbf{b}|$. Интегрируя, получаем

$$p(\tau) = b\tau^3/6$$

или в векторном виде

$$\mathbf{p} = \frac{\tau^3}{6}\mathbf{b}\,.$$

б) Пройденный путь есть

$$s(\tau) = \int\limits_0^\tau (p(t)/m)\,dt = \frac{b\tau^4}{12m}\,.$$

1.85.(41) Возьмем ось x в направлении постоянного вектора F_0. Тогда

$$m\ddot{x} = F_0 \sin\omega t$$

и

$$\dot{x} = -\frac{F_0}{m}\cos\omega t + C\,.$$

Так как $\dot{x}(0) = 0$, то $C = F_0/m$. В результате получим

$$\dot{x} = \frac{F_0}{m\omega}\Big(1 - \sin\omega t\Big)\,,$$

откуда пройденный путь есть

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2}\Big(\omega t - \sin\omega t\Big)$$

1.88. Запишем уравнение движения

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

или $dv/v^2 = -kdt$, и учитывая, что $dv/v^2 = -d(1/v)$, будем иметь

$$d\Big(\frac{1}{v} - \frac{kt}{m}\Big) = 0$$

С учетом начального значения для скорости находим

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{kt}{m}\,.$$

Откуда для времени движения пули получим

$$t = \frac{m}{k}\Big(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\Big)\,.$$

Чтобы найти коэффициент k, перепишем уравнение движения в виде

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = m\frac{dv}{ds}v = -kv^2\,,$$

где s - пройденный путь. Откуда

$$m\frac{dv}{ds} = -kv\,.$$

Поступая как и выше, и учитывая, что пройденный пулей путь равен h, получим

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{kh}{m}\,.$$

Находя из этого выражения k и подставляя его в выражение для времени полета t, получим

$$t = h(v_0 - v)/(v_0 v \ln v_0/v)\,.$$

1.89. Пусть ось x прямоугольной системы координат направлена вдоль наклонной плоскости в сторону спуска. Тогда проектируя уравнение движения на оси координат, будем иметь

$$\begin{aligned} ma &= mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} \\ N &= mg\cos\alpha\,, \end{aligned}$$

где N - реакция опоры. Учитывая, что $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dv}{dx}v$ и $F_{\text{тр}} = \gamma x N$, получим

$$v\frac{dv}{dx} = g\sin\alpha - \gamma x g\cos\alpha\,.$$

Интегрируя это выражение

$$\int\limits_0^v v dv = g\int\limits_0^x (\sin\alpha - \gamma x\cos\alpha)dx\,,$$

найдем

$$\frac{v^2}{2} = g(x\sin\alpha - \gamma\frac{x^2}{2}\cos\alpha)\,.$$

Пройденный путь можно найти из условия $v = 0$. Максимальная скорость определяется из экстремума v (или v^2).

1.90. Возьмем ось x в направлении постоянного вектора $\boldsymbol{b}$. Тело будет двигаться, когда $F \geqslant kN = kmg$. Начало движения произойдет в момент t_0, когда $F = bt_0 = kmg$. Откуда

$$t_0 = kmg/b\,.$$

Записывая далее уравнение движения

$$m\ddot{x} = bt - kmg$$

и решая его, найдем путь x.

1.91. При решении задачи надо учесть, что весом тела называется сила $\boldsymbol{P}$, с которой тело действует на опору (или подвес). Если $\boldsymbol{N}$ - реакция опоры, то $\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{N}$. По величине вес равен модулю $N = |\boldsymbol{N}|$.

а) Найдем вес летчика в нижней части петли. При равномерном движении по окружности ускорение тела равно центростремительному ускорению $a_n = v^2/R$. Используя второй

закон Ньютона, получаем

$$P_1 = N_1 = m\Big(g + \frac{v^2}{R}\Big)\,;$$

б)Верхняя точка траектории. А этом случае имеем

$$P_2 = N_2 = m\Big(g - \frac{v^2}{R}\Big)\,;$$

в) Средняя точка петли. В этом случае

$$P_3 = N_3 = \frac{mv^2}{R}\,.$$

Сила тяжести mg в этой точке петли компенсируется реакцией опоры, действующей в вертикальном направлении.

1.92. а) Направим ось y вертикально вниз. Пусть θ - угол отклонения нити от вертикали. Спроектируем уравнение движения (второй закон Ньютона) на направление касательной к траектории и на радиальное направление

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{R} &= F - mg\cos\theta \\ m\dot{v} &= mg\sin\theta\,, \end{aligned}$$

где R - длина нити, v - величина скорости шарика, F - натяжение нити. Если шарик движется в сторону уменьшения угла θ, то $v = -R\dot{\theta}$ ($\dot{\theta} < 0$). Последнее уравнение в этом случае принимает вид

$$-R\ddot{\theta} = g\sin\theta\,.$$

Умножая последнее равенство на $\dot{\theta}$

$$R\ddot{\theta}\dot{\theta} = -\dot{\theta}g\sin\theta$$

и перепишем его как

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{R}\cos\theta\right) .$$

Откуда получаем

$$\frac{v^2}{R} = 2g\cos\theta .$$

Натяжение нити тогда есть $F = 3mg\cos\theta$.

Найдем модуль полного ускорения как

$$a^2 = a_n^2 + a_\tau^2 = \left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + (\dot{v})^2 = g^2(1 + 3\cos^2\theta) ;$$

б) Вертикальная составляющая скорости равна

$$v_y = v\sin\theta = \sqrt{2gR\cos\theta}\,\sin\theta .$$

Так как v_y и v_y^2 имеют максимум при одном и том же угле, то найдем этот угол из максимума v_y^2

$$\left(v_y^2\right)'_\theta = 0 .$$

Решая это уравнение, получим $\cos\theta = 1/\sqrt{3}$, откуда $F = 3mg\cos\theta = \sqrt{3}mg$;

в) Полное ускорение есть $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_\tau$. По условию $a_y = a_{ny} + a_{\tau y} = 0$ или

$$a_n\cos\theta + a_\tau\sin\theta = \frac{v^2}{R}\cos\theta - \dot{v}\sin\theta = 0 .$$

Решая это уравнение, получим $\cos\theta = 1/\sqrt{3}$.

1.97. Поскольку $v = const$, то тангенциальное ускорение равно нулю. Тогда нормальное ускорение должно вызываться

только силой трения (других сил нет). Запишем второй закон Ньютона в радиальном направлении

$$\frac{mv^2}{r} = F = kN = mgk_0\left(1 - \frac{r}{R}\right) .$$

Из этого выражения можно найти максимум v или v^2, который достигается при $r = R/2$:

$$v_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{gk_0R} .$$

1.3. Законы сохранения

1.117. Пусть ось x направлена вертикально вниз. Если x_1 и x_2 координаты масс, то координата ц.и. есть

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} .$$

Учитывая, что скорости частиц равны, но противоположно направлены, для ускорения ц.и. можно записать

$$a_c = \frac{(m_1 - m_2)a_1}{m_1 + m_2} ,$$

где a_1 - ускорение первого тела. Чтобы найти a_1 запишем уравнения движения

$$\begin{aligned} m_1a_1 &= m_1g - T \\ m_2a_2 &= T - m_2g , \end{aligned}$$

где T - натяжение нити. Определяя из этой системы a_1 и подставляя в выражение для a_c, получим

$$a_c = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} g$$

1.118. При равномерном вращении с постоянным углом θ все точки цепочки вращаются по окружностям перпендикулярным оси вращения и движения в вертикальном направлении нет. Такое же движение, т.е. движение по окружности в плоскости перпендикулярной оси вращения, совершает и центр инерции . Запишем уравнение движения для ц.и. учитывая что на цепочку действует сила натяжения $\boldsymbol{T}$ и сила тяжести $m\boldsymbol{g}$

$$m\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g}$$

Так как движения в вертикальном направлении отсутствует, то составляющая силы натяжения в вертикальном направлении уравновешивается силой тяжести. Поэтому при равномерном движении точки C по окружности будем иметь

$$\frac{mv_c^2}{\rho} = T\sin\theta \qquad T\cos\theta = mg\,,$$

где ρ расстояние до оси вращения (центра окружности). Так как $v_c = \rho\omega$, то из этих равенств получаем

$$\rho = \frac{g\,\mathrm{tg}\,\theta}{\omega^2} \qquad T = \frac{mg}{\cos\theta}\,.$$

1.120. При движении по круговой цилиндрической поверхности (параллельно основанию цилиндра) второй закон Ньютона для скорости ц.м., записывается в виде

$$\frac{mv^2}{R-l} = N\,,$$

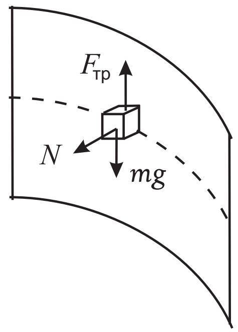

Рис. 14.

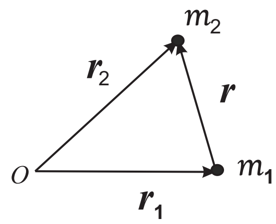

Рис. 15.

где N реакция поверхности на нормальное давление (рис. 14). Для того чтобы движение происходило бы параллельно основанию и не было бы перемещения в вертикальном направлении, сила тяжести, действующая на мотоциклиста, должна уравновешиваться силой трения покоя. Условием этого является выполнение неравенства

$$(F_{\text{тр}})_{max} \geq mg$$

или

$$(F_{\text{тр}})_{max} = kN = \frac{kmv^2}{R-l} \geq mg\,,$$

k - коэффициент трения покоя. Из последнего неравенства получаем

$$v^2 \geq \frac{(R-l)g}{k}\,.$$

Минимальное значение скорости тогда есть

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{(R-l)g}{k}}$$

1.122. Пусть $\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор второй частицы относительно первой, так что $|\boldsymbol{r}| = l$ (рис.15). Тогда радиус-векторы и ускорения частиц связаны соотношением

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}\,,$$

где $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}$. Запишем уравнение движения для каждого тела.

$$m_1\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{F}_{\text{н}} \qquad m_2\boldsymbol{a}_2 = m_2\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{\text{н}}\,,$$

где $\boldsymbol{F}_{\text{н}}$ - сила натяжения нити. Используя первое уравнение, получим

$$\boldsymbol{F}_{\text{н}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{a}\,.$$

Если первая частица покоится, то вторая относительно нее движется в данный момент по окружности с радиусом l. Тогда $a = |\boldsymbol{a}| = v^2/l$.

1.124. В момент $t = 0$ импульс системы равен

$$\boldsymbol{p}_0 = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2\,.$$

После начала движения для импульса имеем уравнение (внутренние силы - упругие силы пружинки не дают вклада, не вносят вклад в суммарную силу)

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\boldsymbol{g}\,,$$

где $m = m_1 + m_2$. Из последнего уравнения находим

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + m\boldsymbol{g}t\,.$$

Если $\boldsymbol{v}_c$ и $\boldsymbol{r}_c$ - скорость и радиус-вектор ц.м., то

$$\boldsymbol{v}_c = \frac{d\boldsymbol{r}_c}{dt} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} = \frac{\boldsymbol{p}_0 + m\boldsymbol{g}t}{m}\,,$$

откуда

$$\boldsymbol{r}_c - \boldsymbol{r}_c(0) = \frac{\boldsymbol{p}_0 t}{m} + \frac{\boldsymbol{g}t^2}{2}\,.$$

1.125. (53) Записывая закон сохранения импульса системы и учитывая, что $m_2/m_1 = \eta$, найдем скорость составной частицы в виде

$$\boldsymbol{v} = \frac{2 + 4\eta}{1 + \eta}\mathbf{i} + \frac{3 - 5\eta}{1 + \eta}\mathbf{j}\,.$$

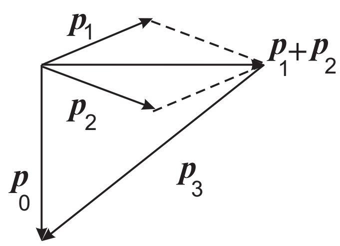

Рис. 16.

1.128. При движении по окружности на муфты действует силы, направленные вдоль радиусов. Непосредственно до столкновения и сразу после столкновения можно считать, что муфты движутся вдоль общей касательной, вдоль которой силы отсутствуют (направлены по нормали) Тогда вдоль касательной будет выполняться закон сохранения импульса. Записывая закон сохранения импульса и выражая скорости муфт до и после столкновения через нормальные ускорения $v = \sqrt{a_n R}$, получим для нормального ускорения составной муфты

$$a = \frac{(m_1\sqrt{a_1} - m_2\sqrt{a_2})^2}{(m_1 + m_2)^2}\,.$$

1.129. Пусть модули импульсов кусков равны $p_1 = p_2 = mv$, $p_3 = mv_3$, тогда модуль импульса тела есть $p_0 = 3mv_0$. Из рис. 16 следует, что модуль импульса третьего куска равен

$$p_3 = \sqrt{2m^2v^2 + 9m^2v_0^2}\,.$$

Откуда находим скорость $v_3 = p_3/m$.

1.131.Пусть $\boldsymbol{v}_{10}$ скорость 1-й частицы до столкновения, а $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ - скорости частиц непосредственно после столкновения. Обозначим через $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_1$ скорости частиц в произвольный момент времени после столкновения.

Рассмотрим бесконечный малый интервал времени, охватывающий момент столкновения ($t = 0$). В течение такого интервала силы трения не успевают изменить скорости и приближенно можно считать, что внешних сил нет и выполняется закон сохранения импульса

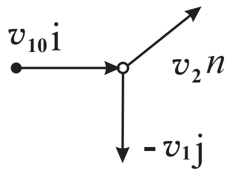

Рис. 17.

$$m_1\boldsymbol{v}_{10} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2\,. \qquad (1)$$

Чтобы определить начальные скорости разлета $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, рассмотрим движения частиц до их полной остановки. Для этого используем второй закон Ньютона. При прямолинейном движении, имеем

$$m_1\frac{du_1}{dt} = -km_1g \qquad m_2\frac{du_2}{dt} = -km_1g\,.$$

Здесь имеет место равнозамедленное движение , при котором

$$u_1 = v_1 - kgt \qquad u_2 = v_2 - kgt\,.$$

Откуда находим время до остановки каждой частицы, $u_1 = u_2 = 0$, и, соответственно, пройденный путь s_1 и s_2. В результате найдем, что

$$v_1^2 = 2kgs_1 \qquad v_2^2 = 2kgs_2\,.$$

Перепишем (1) в виде (см. 17)

$$-m_1v_1\mathbf{j} + m_2v_2\boldsymbol{n} = m_1v_{10}\mathbf{i}\,,$$

где $\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$ и $\boldsymbol{n}$ - единичные орты в направлении движения. Умножим скалярно это равенство последовательно на $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, получим

$$v_{10} = \eta v_2\cos\alpha \qquad v_1 = \eta v_2\cos\beta\,,$$

где α и β - углы наклона вектора $\boldsymbol{n}$ соответственно к осям x и y. Учитывая, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, получим

$$v_{10} = \sqrt{2kg(\eta^2 s_2 - s_1)}\,.$$

1.146. Если $\Delta\boldsymbol{r}$ элементарное перемещение вдоль траектории, то работа силы по перемещению частицы из точки 1 в точку 2 равно

$$A = \Sigma\,\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}\cdot\Sigma\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = -17\,.$$

1.147. Если повернуть рисунок задачи на 90° по часовой стрелке, то задача будет аналогична задаче о движении муфты в поле силы тяжести. Пусть ось y проходит через точку 2, ось x - через точку 1, начало координат в центре окружности. В данном случае потенциальная энергия муфты есть $U = -Fy$ (в поле силы тяжести $U = -mgy$). Искомый ответ получается после использования закона сохранения энергии, взятой в точках 1 и 2.

1.148. Найдем силу, действующую на локомотив вдоль пути s

$$F = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\dot{s} = m\frac{dv}{ds}v = \frac{m\alpha^2}{2},.$$

Так как сила постоянна, то работа равна $A = Fs$. Находя пройденный путь получим

$$A = \frac{m\alpha^4 t}{8}\,.$$

1.149. Модуль силы равен

$$F = m\sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}\,.$$

Учитывая, что $v^2 = 2K/m = 2\alpha s^2/m$, можно найдем нормальное ускорение a_n. Касательное ускорение a_τ находим из равенства

$$\frac{dv^2}{dt} = 2v\dot{v} = 2va_\tau = \frac{4\alpha s\dot{s}}{m} = \frac{4\alpha sv}{m}\,.$$

1.150. Пусть частица проникает на глубину x и останавливается. Тогда

$$T_2 - T_1 = A_{12}$$

где T - кинетическая энергия, а A_{12} - работа тормозящей силы. Так как $T_2 = 0$, то для модуля тормозящей силы $F(x)$ можно записать

$$-\frac{mv_1^2}{2} = -\int\limits_0^x F(l)dl\,.$$

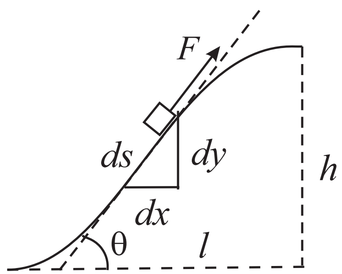

Рис. 18.

Подставляя в это равенство $v = p/m = x/\alpha m$ и дифференцируя по x, получим

$$F(x) = \frac{x}{m\alpha^2}\,.$$

1.151. Слово "медленно"в данной задаче означает, что тело движется без ускорения. Тогда, если θ - угол между направлением силы (см. 18) и горизонталью (основанием горки), то

$$F = kmg\cos\theta + mg\sin\theta\,.$$

На каждом малом перемещении ds вдоль горки можно считать, что тело движется по наклонной плоскости, составляющей с горизонталью угол θ. Найдем элементарную работу

на этом перемещении

$$dA = Fds = kmg\,ds\cos\theta + mg\,ds\sin\theta\,.$$

Так как

$$ds\cos\theta = dx \qquad ds\sin\theta = dy$$

(см. рис. 18), то после суммирования элементарных работ вдоль движения тела получим искомый ответ.

1.152. Брусок движется без ускорения, поэтому сила тяги равна

$$F = F_{\text{тр}} + mg\sin\alpha\,,$$

где $F_{\text{тр}}$ - модуль силы трения. Умножая это равенство на длину наклонной плоскости, найдем работу силы тяги.

$$A = -A_{\text{тр}} + mgh\,,$$

здесь $A_{\text{тр}} < 0$ - работа силы трения. Из этого равенства можно найти величину работы силы трения. При скатывании имеем для скорости в конечном положении

$$\frac{mv^2}{2} = A_{\text{тр}} + mgh\,,$$

откуда находим скорость.

1.155. Брусок m_2 придет в движение, если сила упругости растянутой пружины сравняется с максимальным значением силы трения покоя $F_{\text{уп}} = kmg$. Пусть это условие выполняется, если удлинение пружины равно l (рис. 19). Тогда

$$\varkappa l = kmg\,, \tag{1}$$

где $\varkappa$ - коэффициент жесткости пружины. При минимальном значении внешней силы брусок m_1 переместившись на расстояние l, остановится. Действие внешней силы будет компенсировано суммарным действием силы трения и упругой

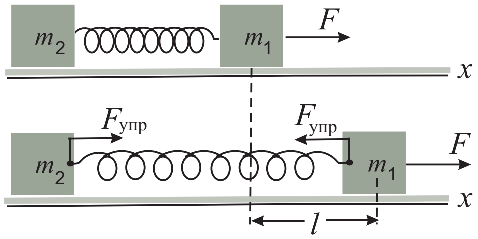

Рис. 19.

силы, направленных в противоположную сторону. При больших значениях F брусок будет продолжать движение вправо. При меньших - пружина не достигнет необходимого удлинения l. Для нахождения F используем равенство

$$A = \Delta T = 0\,,$$

где A - работа результирующей силы, $F_{\text{рез}} = F - \varkappa x - km_1 g$, перемещающей первый брусок вдоль оси x. Вычисляя работу, получим

$$Fl - \frac{\varkappa l^2}{2} - km_1 gl = 0$$

или

$$F - \frac{\varkappa l}{2} - km_1 g = 0\,. \qquad (2)$$

Используя (1) и (2), найдем $F = kg(m_1 + m_2/2)$.

1.165. Найдем минимальную растягивающую силу, необходимую, чтобы суммарное растяжение пружин было Δl. Пусть левый конец первой пружины закреплен, а к правому концу второй пружины приложена растягивающая сила (рис. 20). После растяжения пружин на нужное удлинение система придет в равновесие. Обозначим растяжение первой пружины через Δl_1, а второй через Δl_2, причем должно выполняться

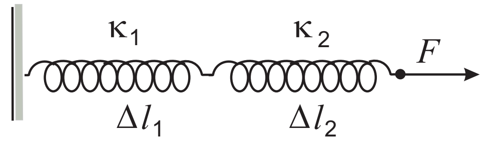

Рис. 20.

равенство

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l\,.$$

Условие равновесия предполагает, что силы с которыми пружины действуют друг на друга равны

$$\varkappa_1 \Delta l_1 = \varkappa_2 \Delta l_2\,.$$

Решая два уравнения совместно, можно найти Δl_1 и Δl_2. Далее используем соотношение для приращения полной энергии

$$\Delta E = \Delta T + \Delta U = A_{\text{вн}}\,,$$

где ΔT - приращение кинетической энергии, ΔU - приращение потенциальной энергии, а $A_{\text{вн}}$ - работа внешней силы. Так как $\Delta T = 0$, а потенциальная энергия деформированной пружины равна $\varkappa_i \Delta l_i^2/2$, то

$$A_{\text{вн}} = \frac{\varkappa_1 \varkappa_2 \Delta l}{2(\varkappa_1 + \varkappa_2)}\,.$$

1.215. Момент силы равен равен

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N} &= [\boldsymbol{r}\,, \boldsymbol{F}] = [a\mathbf{i} + b\mathbf{j}\,, A\mathbf{i} + B\mathbf{j}] \\ &= (aB - bA)[\mathbf{i}\,, \mathbf{j}] = (aB - bA)\mathbf{k}\,. \end{aligned}$$

Если φ угол между радиусом-вектором и силой,плечо равно

$$l = |\boldsymbol{r}| \sin\varphi\,.$$

Синус можно найти, если учесть, что

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{F}}{|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{F}|}$$

1.217. Пусть движение происходит в плоскости (xy), тогда момент импульса равен

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M} &= m[\boldsymbol{r}\,,\boldsymbol{v}] = m[x\mathbf{i}+y\mathbf{j}\,,v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}\,] = \\ &= m(xv_y - yv_x)[\boldsymbol{i}\,,\boldsymbol{j}] = m(xv_y-yv_x)\mathbf{k}\,.\end{aligned}$$

Подставляя в это равенство координаты и проекции скорости тела, брошенного под углом α к горизонту, получим

$$\boldsymbol{M} = -\frac{mgv_0t^2}{2}\cos\alpha\,\mathbf{k} \qquad M = |\boldsymbol{M}| = \frac{mgv_0t^2}{2}\cos\alpha\,.$$

В наивысшей точке $t = v_0\sin\alpha/g$, откуда

$$M = \frac{\sqrt{2}mv_0^3}{8g}$$

1.219. Момент импульса направлен за чертеж, перпендикулярно плоскости чертежа. Поэтому модуль момента относительно оси равен модулю момента относительно точки O, $M = lmv$, где l - плечо момента, равное перпендикуляру, опущенному из O на наклонную плоскость, а v скорость шайбы. Подставляя l и v. получим

$$M = \frac{1}{2}mght\sin 2\alpha\,.$$

1.4. Всемирное тяготение

1.237. Пусть m и M_c - массы планеты и Солнца ($M_c = 1,97\cdot 10^{30}$кг). На планету со стороны Солнца действует сила

$$F = \gamma\frac{mM_c}{R^2}\,,$$

где R - радиус орбиты, $\gamma = 6,6\cdot 10^{-11}$ - гравитационная постоянная. Из второго закона Ньютона

$$\frac{mv^2}{R} = \gamma\frac{mM_c}{R^2}$$

найдем R, позволяющий найти угловую скорость кругового движения.

1.238. а) Согласно третьему закону Кеплера квадраты периодов обращения планет вокруг солнца относятся как кубы линейных размеров их орбит

$$\frac{T_{\text{ю}}^2}{T_{\text{з}}^2} = \frac{R_{\text{ю}}^3}{R_{\text{з}}^3}\,,$$

где $T_{\text{ю}} = 12$лет, $T_{\text{з}} = 1$год - периоды обращения Юпитера и Земли вокруг Солнца, а $R_{\text{ю}}$, $R_{\text{з}}$ - радиусы орбит. Из этого равенства находится отношение $R_{\text{ю}}/R_{\text{з}} = \sqrt[3]{144}$;
б) Для нахождения скорости Юпитера используем второй закон Ньютона и находим $v^2 = \gamma M_c/R_{\text{ю}}$. Выражая радиус из равенства $v = \omega R = 2\pi R/T$, получим

$$v = \left(\gamma\frac{2\pi}{T_{\text{ю}}}M_c\right)^{1/3}\,.$$

Ускорение находится из равенства

$$a = \frac{v^2}{R}\,.$$

1.239. Обычно эллиптические траектории планет очень близки к круговым с радиусом R, равным большой полуоси эллипса a
$$R = a = \frac{r_1 + r_2}{2}\,.$$
Тогда период обращения вокруг солнца есть
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v}\,.$$
Скорость движения по круговой орбите v находим из второго закона Ньютона. Окончательно будем иметь
$$T = \pi\sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{2\gamma M_c}}\,.$$

1.240. Исходим из третьего закона Кеплера
$$\frac{T_0^2}{(\eta T_0)^2} = \frac{r^3}{a^3}\,,$$
где T_0 - период обращения по круговой орбите и a - полуось эллипса, равная $a = (r + r_{\max})/2$ (рис. 21). Подставляя это соотношение в первое равенство, найдем

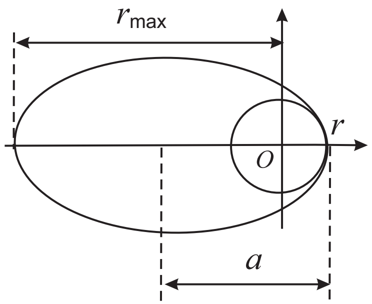

Рис. 21.

$$r_{\max} = r(2\eta^{2/3} - 1)\,.$$

1.242. Если T_0 - время обращения по эллиптической орбите, то время падения $\tau = T_0/2$ (рис. 22). Запишем третий закон Кеплера, считая, радиус Луны R известен
$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{r^3}{\left(\dfrac{r+R}{2}\right)^3}\,,$$

где $(r+R)/2$ - полуось эллипса (см.рис.22) и T - период обращения по круговой орбите. Из последнего равенства можно найти T_0. Период T находится из равенства
$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T}\,,$$
а скорость движения по круговой орбите v может быть найдена из второго закона Ньютона
$$\frac{v^2}{r} = \gamma\frac{m_л}{r^2}\,,$$
где $m_л$ - масса луны.

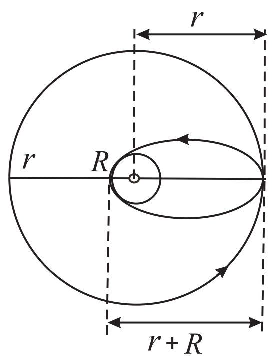

Рис. 22.

1.243. Найдем период T_R движения планеты солнечной системы по круговой орбите радиуса R, исходя из соотношения $v = \omega R = 2\pi R/T_R$ и второго закона Ньютона
$$T_R = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{GM_c}}\,,$$
где M_c - масса Солнца. Аналогично записывается период T_r движения планеты в модели солнечной системы с радиусом орбиты $r = R/\eta$. Рассматривая форму Солнца как шар, можно выразить массу Солнца m_c в модели солнечной системы через массу M_c. Далее следует рассмотреть отношение T_r/T_R.

1.255. Искомые ускорения есть
$$a_1 = g = \frac{GM_з}{R_з^2}$$
$$a_2 = \omega^2 R_з = \frac{2\pi}{T}$$
$$a_3 = \frac{GM_c}{r^2}\,,$$

где $M_{\text{з}} = 5,98 \cdot 10^{24}$кг - масса Земли, $R_{\text{з}} = 6,37 \cdot 10^6$ - радиус Земли, $T = 86400$с - продолжительность суток, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ - гравитационная постоянная, $M_c = 1,9 \cdot 10^{30}$кг - масса Солнца, $r = 1,5 \cdot 10^{11}$м - расстояния между Землей и солнцем. Подставляя численные данные, вычислить[1] $a_1 : a_2 : a_3$.

1.256. 1) Условие уменьшения ускорения свободного падения есть

$$g_0 - g_h = \eta g_0 \quad \text{или} \quad \eta = \frac{g_0 - g_h}{g_0},$$

где $g_0 = GM/R$, $g_h = GM/(R+h)$ - ускорения на поверхности земли и на высоте h и M - масса Земли, а R ее радиус. Подставляя выражения для ускорений в равенство для η, можно получить

$$2Rh = \eta R^2 = 2\eta hR + h^2(\eta^2 - 1)\,.$$

Пренебрегая слагаемым $(h/R)^2$ по сравнению с h/R, получим при $\eta = 0,01$

$$h = \frac{\eta R}{2(1-\eta)} = 32 \cdot 10^3\text{м}\,;$$

2) В данном случае

$$\frac{g_0}{g_h} = n\,.$$

Подставляя в это равенство выражения для g_0 и g_h, получим уравнение для h, положительный корень которого есть

$$h = R(\sqrt{n} - 1) = R(\sqrt{2} - 1) \approx 2640\text{км}\,.$$

1.267. Первая [2] и вторая [3] космические скорости равны

$$v_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{\frac{GM}{R}} \qquad v_2 = \sqrt{2}v_1\,,$$

[1]Если $x/y = a/b = 1/(b/a)$, а $y/z = b/d = (b/a/(d/a)$, то можно записать $x : y : z = 1 : b/a : d/a$.

[2]скорость необходимая для движения по круговой орбите в поле планеты

[3]начальная скорость для преодоления тяготения планеты

где $M = 7,35 \cdot 10^{22}$кг - масса луны, $R = 1,7 \cdot 10^6$м - радиус Луны. Для Земли $v_1 \approx 8$км/с, $v_2 \approx 11$км/с.

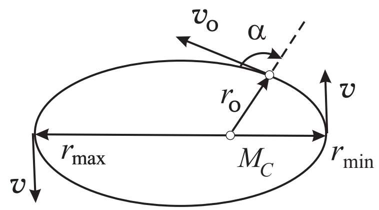

Рис. 23.

1.247. Используем законы сохранения энергии и момента импульса. Если r есть наибольшее или наименьшее расстояние от солнца (см. рис. 23), а v скорость планеты в соответствующих точках, то

$$E = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM_C}{r} = \frac{mv_0^2}{2} - G\frac{mM_C}{r_0}$$
$$L = rv = r_0 v_0 \sin\alpha\,.$$

Выражая v из второго равенства и подставляя в первое, получим уравнение для определения r

$$\frac{\eta \sin^2\alpha}{2}x^2 - x + \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) = 0\,,$$

где

$$x = \frac{r_0}{r}\,, \qquad \eta = \frac{r_0 v_0}{GM_C}\,.$$

Два решения этого квадратного уравнения дают наибольшее и наименьшее значения r.

1.5. Динамика твердого тела

1.272. Движение стержня описывается уравнениями

$$\begin{aligned} m\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \\ \frac{d\boldsymbol{L}}{dt} &= \boldsymbol{M}\,, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{L}$ - момент импульса относительно ц.и., а $\boldsymbol{M}$ - результирующий момент внешних сил относительно ц.и. Так как вращения стержня нет, то $\boldsymbol{M} = 0$. Момент сил направлен перпендикулярно плоскости рисунка (вдоль оси z). Тогда, если x - расстояние от центра инерции до точки приложения силы $\boldsymbol{F}_2$, то в скалярной форме записанные выше уравнения дают

$$\begin{aligned} ma &= F_2 - F_1 \\ M_z &= (x+b)F_1 - xF_2 = 0\,. \end{aligned}$$

Находя из этих уравнений x, можно найти длину стержня $l = 2(x+b)$.

1.273. На шар действуют сила $\boldsymbol{F}$, сила тяжести $m\boldsymbol{g}$, реакция на нормальное давление $\boldsymbol{N}$ и сила трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ ($F_{\text{тр}} = kN$). Пусть xy плоскость рисунка, причем шар движется в направлении оси x, а ось z направлена перпендикулярно чертежу, на "нас". В отсутствии вращения момент сил $\boldsymbol{M}$ относительно ц.и. равен нулю (соответственно и проекция на ось z, $M_z = 0$) уравнения движения записываются в виде

$$\begin{aligned} ma &= F\cos\alpha - F_{\text{тр}} \\ mg &= N + F\sin\alpha \\ M_z &= = RF\sin\alpha - RF_{\text{тр}} = 0\,. \end{aligned}$$

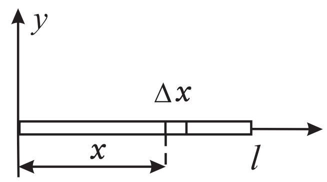

Рис. 24.

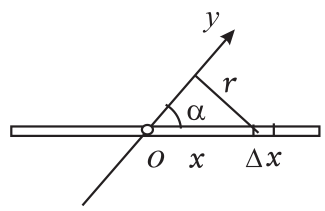

Рис. 25.

Решение этой системы уравнений дает искомые величины.

1.277. а) Пусть масса элемента элемента Δx есть Δm (см. рис. 24). Тогда момент инерции относительно оси y есть

$$I_y = \sum x^2 \Delta m\,.$$

Так как стержень однородный, то для плотности можно записать

$$\frac{m}{l} = \frac{\Delta m}{\Delta x}\,,$$

откуда

$$\Delta m = \frac{m}{l}\Delta x\,.$$

Поэтому

$$I_y = \frac{m}{l}\sum x^2 \Delta x\,.$$

Устремляя $\Delta x \to 0$ и переходя от суммирования к интегрированию, получим

$$I_y = \frac{ml^2}{3}\,;$$

б) В данном случае (рис. 25) расстояние от элемента Δx до оси y равно $r = x\sin\alpha$, откуда

$$I_y = \sum r^2 \Delta m \to \frac{m}{l}\sin^2\alpha \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx\,.$$

1.281. Момент инерции равен

$$I_z = \sum \Delta m \rho^2 ,$$

где ρ - расстояние от элемента дуги Δs до оси z (см. рис. 26) и Δm - масса этого элемента, равная

$$\Delta m = \frac{m}{2\pi a}\Delta s = \frac{m}{2\pi}\Delta\varphi .$$

Используем это соотношение в выражении для момента инерции. Устремляя затем $\Delta\varphi \to 0$, получим, после перехода к интегрированию,

$$I_z = \frac{ma^2}{2\pi}\sum \cos^2\varphi\Delta\varphi \to \frac{ma^2}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi = \frac{ma^2}{2} .$$

1.287. а) Пусть груз движется вертикально вниз. Если F - натяжение нити, $I = mR^2/2$ момент инерции цилиндра относительно своей оси, а ε - угловое ускорение цилиндра, то движение системы описывается следующими уравнениями

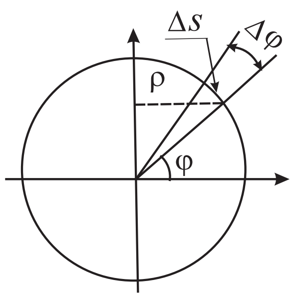

Рис. 26.

$$\begin{aligned} ma &= mg - F \\ I\varepsilon &= RF \\ a &= R\varepsilon . \end{aligned}$$

Из решения этой системы найдем для углового ускорения

$$\varepsilon = \dot\omega = \frac{g}{R(1+M/2m)} ,$$

откуда

$$\omega = \frac{gt}{R(1+M/2m)} \qquad (\omega(0)=0) ;$$

б) Учитывая, что скорость груза $v = R\omega$, кинетическая энергия системы вычисляется из выражения

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}I\omega^2 .$$

1.292. Запишем уравнения движения. Пусть тело m_1 движется вертикально вверх, тогда

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_1 - m_1 g \\ m_2 a &= m_2 g - F_2 \\ I\beta &= M_z = R(F_2 - F_1) \\ a &= R\beta , \end{aligned}$$

где β - угловое ускорение цилиндра, $I = mR^2/2$ - момент инерции цилиндра, последнее равенство выражает связь линейного ускорения и углового. Решая эту систему уравнений, можно найти β и F_1/F_2. Для отношения сил получим

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{4+m/m_2}{4+m/m_1} .$$

При $m \to 0$, $F_1 \to F_2$.

1.293. а) Уравнения движения есть

$$\begin{aligned} &m_1 a = F_1 - kN \\ &m_2 a = m_2 g - F_2 \\ &I\varepsilon = -rF_1 + rF_2 \\ &a = \varepsilon r ; \qquad N = m_1 g \end{aligned}$$

Здесь F_1 и F_2 - силы натяжения, соответственно, между блоком и m_1 и блоком и m_2, I - момент инерции относительно оси диска, ε - его угловое ускорение, r - радиус диска, a ускорение тел. Решая эту систему, найдем a;

б) Работа силы трения равна

$$A = -F_{\text{тр}}S\,,$$

где $S = at^2/2$ - пройденный телом 1 путь. Откуда

$$A = -km_1g\frac{at^2}{2}\,.$$

1.316. На шар действуют силы тяжести, трения $F_{\text{тр}}$ и реакция на нормальное давление N_n. Уравнения движения есть

$$\begin{aligned} ma &= mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} \\ I\varepsilon &= F_{\text{тр}}R \\ N_n &= mg\cos\alpha\,, \end{aligned}$$

где a - ускорение ц.м., ε - угловое ускорение шара, $I = 2mR^2/5$ - момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр.

Точка шара, соприкасающаяся с наклонной плоскостью в данный момент времени, покоится относительно этой плоскости и шар совершает чистое вращение вокруг оси, перпендикулярной направлению движения. Поэтому

$$a = R\varepsilon\,.$$

Решая совместно записанные выше уравнения и исключая силу трения, получим

$$a = \frac{5}{7}g\sin\alpha\,.$$

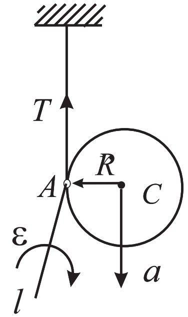

Рис. 27.

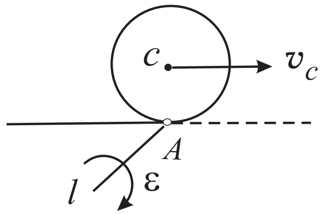

Рис. 28.

Из последнего равенства можно найти скорость центра инерции $v = at$ и угловую скорость $\omega = \varepsilon t$, что позволяет вычислить кинетическую энергию

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{I}{2}\omega^2$$

1.320. а) Запишем уравнение для ц.м. и уравнение для момента импульса относительно ц.м. (рис. 27).

$$\begin{aligned} ma &= mg - T \\ I\varepsilon &= TR\,, \end{aligned}$$

где T - сила натяжения нити, I - момент инерции цилиндра, ε - угловое ускорение ц.м. Точка A (см. рис. 27) цилиндра в данный момент покоится и цилиндр совершает чистое вращение вокруг оси l, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости рисунка. Это аналогично движению цилиндра по неподвижной поверхности, где точка A - точка соприкосновения цилиндра и плоскости и цилиндр совершает чистое вращение вокруг оси l (рис. 28). Поэтому точка C в данный момент движется по окружности радиуса R и $a = R\varepsilon$. Решая совместно последнее уравнение с первыми двумя, получим

$$\varepsilon = \frac{2g}{3R};$$

б) Мощность равна $P = mgv$.

1.6. Колебания

3.1. б) Требуется построить графики зависимости a_x и v_x от смещения x. Для этого покажите, что имеют место равенства

$$a_x = -\omega^2 x$$

$$\frac{v_x^2}{\omega^2 A^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1\,.$$

3.2. а) Представить координату частицы в виде

$$x - \frac{A}{2} = -\frac{A}{2}\sin 2\omega t\,.$$

Отсюда видно, что частица совершает колебания около положения равновесия $A/2$. Последнее равенство позволяет определить амплитуду колебаний и период.

б) Показать, что имеет место равенство

$$\frac{v_x^2}{\omega^2 A^2} + \frac{(x - A/2)^2}{(A/2)^2} = 1\,.$$

3.3. Представить смещение x в виде

$$x = a\cos(\omega t + \alpha)\,,$$

вводя новые постоянные a и α посредством равенств

$$A = a\cos\alpha \qquad B = -a\sin\alpha\,.$$

3.11. а) Показать, что имеет место равенство

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1\,.$$

Чтобы определить направление движения, найти $\dot{x}$, $\dot{y}$ и определить их значения, например, при $t = 0$ и $\omega t = \pi/2$

б) Найти $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ и выразить их через координаты частицы x и y.

3.13. уравнение движения частицы имеет вид

$$m\ddot{x} = F(x) = -\frac{dU}{dx} = -U_0 a\sin ax\,.$$

Положение равновесия определяется из условия $F(x) = 0$ и равно $x = 0$. При малых колебаниях смещения из положения равновесия малы, поэтому

$$F(x) = -U_0 a\sin ax \approx -U_0 a^2 x\,.$$

Используя это выражение в правой части уравнения движения, можно найти период.

3.17. При движении маятников частицы движутся по дугам окружностей радиуса l (см. рис. 29). Рассмотрим, например, движение правой частицы к положению равновесия. Левая частица движется навстречу. Вдоль касательной на частицу действует проекция силы тяжести $mg\sin\varphi \approx mg\varphi$ и проекция упругой силы пружины, равная по закону Гука

$$F_{\text{упр}}\cos\varphi = \varkappa(L - L_0)\cos\varphi \approx \varkappa(L - L_0)\,,$$

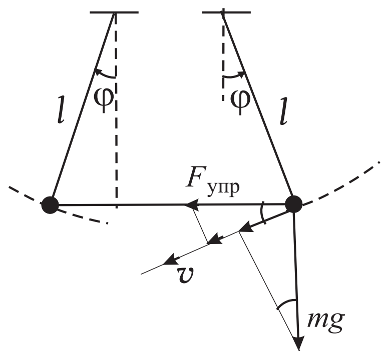

Рис. 29.

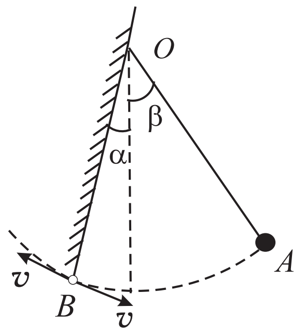

Рис. 30.

где $L - L_0$ - удлинение пружины, которое при малых φ приближенно равно

$$L - L_0 = 2l\sin\varphi \approx 2l\varphi\,.$$

Так как скорость равна $v = -l\dot{\varphi}$ (при движении влево $\dot{\varphi} < 0$), тангенциальное ускорение есть $a = \dot{v} = -l\ddot{\varphi}$. Записывая затем уравнение движения и приводя его к стандартному виду уравнения гармонических колебаний, получим выражение для периода.

3.18. Шарик движется из начального положения до стенки точно так же как и свободный маятник без ограничений. Поэтому его движение в интервале от β до $-\alpha$ определяется уравнением

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0 \qquad \omega^2 = \frac{g}{l}\,,$$

где φ - угол отклонения маятника от вертикали, при заданных начальных условиях равный

$$\varphi = \beta\cos\omega t\,.$$

При упругом отражении от стенки шарик меняет свою скорость на противоположную и опять движется как свободный маятник. Время t_{AB}, которое затрачивает свободный маятник при движении от A к B (см. рис. 30) совпадает со временем его перемещения[1] из B к A. Отсюда следует, что период маятника со стенкой равен

$$T = 2t_{AB}\,.$$

Время движения t_{AB} находится из уравнения

$$-\alpha = \beta\cos\omega t_{AB}\,.$$

При решении этого уравнения использовать равенства

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos(a)$$
$$\arccos(a) + \arcsin(a) = \frac{\pi}{2}\,.$$

3.25. Пусть x - координата тела, отсчитываемая вдоль оси пружины (ось x направлена вправо) и недеформированному положению пружин соответствует значение $x = 0$. Пусть тело переместилось, например, вправо. Тогда на него действует со стороны левой пружины сила упругости F_1, направленная влево и стремящаяся вернуть тело в положение равновесия. По закону Гука

$$F_1 = -\varkappa\delta l_1 = -\varkappa(l_1 - l_0) = -\varkappa x\,,$$

[1] При движении свободного маятника в прямом и обратном направлении, в одной и той же точке траектории его скорости отличаются только направлением. Это следует из закона сохранения энергии. Поэтому время затрачиваемое на движение в разных направлениях вдоль одного и того же участка траектории будет одинаковым.

где $\delta l_1 = l_1 - l_0 = x$ - удлинение левой пружин. Со стороны правой сжатой пружины действует сила упругости[1],

$$F_2 = \varkappa \delta l_2 = \varkappa (l_2 - l_0) = -\varkappa x\,,$$

где $\delta l_2 = (l_2 - l_0) = -x$ - удлинение второй пружины, также стремящаяся вернуть тело в положение равновесия. Записывая далее уравнение движения, можно найти период.

3.27. Пусть, например, центр масс стержня сместился влево на величину x относительно середины расстояния между осями дисков (ось x направлена вправо). Со стороны дисков на стержень действуют силы реакции на нормальное давление N_1, N_2 и силы трения $F_1 = kN_1$ и $F_2 = -kN_2$ (см. рис. 31).

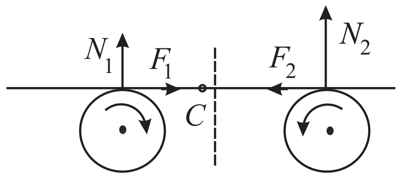

Рис. 31.

Запишем уравнение движения ц.м. стержня, условие отсутствия вращения относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости чертежа (равенство нулю суммарного момента сил относительно этой оси) и условие отсутствия движения в вертикальном направлении

$$\begin{aligned} &m\ddot{x} = kN_2 - kN_1 \\ &(l/2 - x)N_1 = (l/2 + x)N_1 \\ &mg = N_1 + N_2\,. \end{aligned}$$

Уравнение для смещения ц.м. можно привести к виду уравнения гармонических колебаний

$$m\ddot{x} + \omega^2 x = 0\,,$$

если исключить реакции дисков. Откуда можно найти период $T = 2\pi/\omega$.

[1]Если правый конец пружины закреплен, то легко убедиться, что правильное выражение для силы упругости, действующей на левый конец, равно $F = \varkappa \delta l$ (без знака минус), где δl -удлинение пружины, которое может быть как положительным, так и отрицательным

3.54. Запишем уравнение для углового момента $L_z = I\omega = I\dot{\varphi}$

$$I\ddot{\varphi} = -k\varphi\,,$$

которое имеет вид уравнения гармонических колебаний с $\omega^2 = k/I$. Решение этого уравнения есть

$$\varphi = A\cos\omega t + B\sin\omega t = \varphi_m \cos(\omega t + \alpha)\,.$$

Используя начальные условия, можно найти амплитуду колебаний

$$\varphi_m = \sqrt{A^2 + B^2}\,.$$

Энергия крутильных колебаний равна

$$E = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + U(\varphi)\,,$$

где потенциальная энергия колебательного движения может быть определена из соотношения $U_1 - U_2 = A$, где A - работа упругих сил

$$U(0) - U(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} N_z d\varphi = \int\limits_0^{\varphi} k\varphi d\varphi\,.$$

При условии, что $U(0) = 0$, полная энергия равна

$$E = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{k\varphi^2}{2} = \frac{k\varphi_m^2}{2}\,.$$

3.66. Пусть x координата вдоль оси, направленной вертикально вниз и отсчитываемая от положения равновесия тела. Когда тело находится в равновесном положении, пружина растянута (чтобы уравновесить силу тяжести тела) до длины $l_0 + \Delta l$, где l_0 - недеформированная длина пружины, а Δl - соответствующее удлинение.

На тело действует сила тяжести mg и сила натяжения нити F. На диск действует сила натяжения F со стороны тела, а также сила упругости пружины, равная по закону Гука $\varkappa(l_0+\Delta l+x-l_0) = \varkappa(\Delta l+x)$, при условии, что тело сместится на расстояние x из положения равновесия. Таким образом, уравнения движения записываются в виде (тело смещается вниз)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - F \\ I\ddot{\varphi} &= RF - R\varkappa(\Delta l + x)\,, \end{aligned}$$

где φ - угол поворота диска. Учитывая, что $\dot{x} = R\dot{\varphi}$ и $\ddot{x} = R\ddot{\varphi}$, исключим силу натяжения нити F.

$$\frac{I}{R}\ddot{x} = R(mg - m\ddot{x}) - R\varkappa(x + \Delta l)\,.$$

В положении равновесия, $x = 0$, $\ddot{x} = 0$, что дает $mg = \varkappa\Delta l$. Откуда

$$\ddot{x} = -\frac{\varkappa R^2}{mR^2 + I}x\,.$$

Из этого равенства можно найти частоту и период колебаний.

1.7. Гидродинамика

1.367. Если рассмотреть физически малый элемент объема жидкости между точками 1 и 2, то он движется по искривленной траектории. Следовательно, этот элемент имеет центростремительное ускорение, направленное к центру кривизны. Отсюда следует, что на этот элемент действует сила со стороны окружающих слоев жидкости, также направленная к

центру кривизны. Эта сила пропорционально разности давлений. Поэтому чем дальше слой жидкости от центра кривизны, тем большим давлением он обладает. Таким образом, давление $p_1 > p_2$. Для рассмотрения соотношения между скоростями, нужно рассмотреть уравнение Бернулли для линий тока, проходящих через точки 1 и 2

$$\begin{aligned} \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \mathrm{const} \\ \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \mathrm{const}\,. \end{aligned}$$

Константы в этих равенствах одинаковые, так как вдоль верхнего сечения скорости, высоты и давления совпадают. Пренебрегая разностью высот в точках 1 и 2, из этих равенств можно найти соотношение между скоростями.

1.368. Искомый объем равен

$$Q = v_1 S_1\,,$$

где v_1 - скорость в сечении S_1. Поэтому достаточно найти v_1. Из условия неразрывности (несжимаемости) жидкости,

$$v_1 S_1 = v_2 S_2\,,$$

где v_2 - скорость в сечении S_2, следует, что при $S_1 < S_2$, $v_1 > v_2$. А из уравнения Бернулли на линии тока

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

следует, что $p_1 < p_2$. Поэтому высота столба жидкости будет больше во второй трубке. Так как давление в трубках меняется по закону

$$p_{1,2} = p_0 + \rho g h_{1,2}\,,$$

где p_0 - атмосферное давление, то используя это равенство, уравнение Бернулли и условие неразрывности, можно найти скорость v_1 и искомую величину $Q = v_1 S_1$.

1.369. Вне трубки скорость и давление газа во всех точках трубопровода одинаковы. Пусть давление и скорость в трубопроводе равны v_A и p_A (рис. 32). Искомый объем равен $Q = v_A S$. Газ в трубке находится в равновесии с жидкостью. Для газа силой тяжести можно пренебречь, поэтому давление газа в трубке, выходящей навстречу потоку, везде постоянно. Обозначим его как p_B. Давление в трубке, находящейся в нижней части трубопровода, такое же как и в потоке и равно p_A.

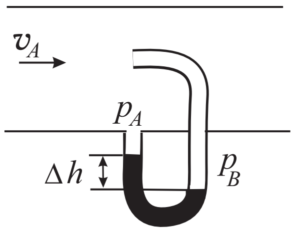

Рис. 32.

На линии тока упирающейся в трубку, уравнение Бернулли имеет вид

$$p_A + \frac{\rho v_A^2}{2} = p_B \qquad (v_B = 0)\,.$$

Условие равновесия жидкости в трубке имеет вид

$$p_A + \rho_0 g \Delta h = p_B\,.$$

Из этих равенств может быть найдено v_A и далее $Q = v_A S$.

1.372. Если элемент жидкости вылетает из отверстия со скоростью v, то его дальнейшее движение аналогично движению материальной точки, брошенной на высоте h_0 с начальной скоростью $v_{0x} = v$ параллельной оси x. Пройденное расстояние вдоль оси x равно

$$l = v\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\,.$$

Скорость v можно найти из уравнения Бернулли

$$p_0 + \rho g h = p_0 + \rho g h_0 + \frac{\rho v^2}{2}\,,$$

где p_0 - атмосферное давление и скорость на поверхности жидкости принимается равной нулю. После нахождения v можно найти при каком значении h_0 расстояние l принимает максимальное значение.

1.379. Рассмотрим вначале сосуд высоты h_0 с одним отверстием в боковой стенке на высоте h_1. На свободной поверхности давление равно атмосферному давлению p_0 и скоростью точек свободной поверхности можно пренебречь. Рассмотрим линию тока, начинающуюся на свободной поверхности воды и уходящую в отверстие. Давление в вытекающей струе приблизительно равно p_0. Тогда уравнение Бернулли дает

$$p_0 + \rho g h_0 = p_0 + \rho g h_1 + \frac{\rho v^2}{2}\,,$$

где v - скорость вытекающей струи. Откуда

$$v = \sqrt{2gh}\,,$$

где $h = h_0 - h_0$. За единицу времени из отверстия уносится импульс, равный

$$mv = \rho S v \cdot v = \rho S v^2 = \rho S 2gh\,.$$

Но, изменение импульса жидкости в единицу времени равно силе, действующей на жидкость. Поэтому на жидкость действует сила, равная $\rho S 2gh$. На жидкость действуют только стенки сосуда. В свою очередь, по третьему закону Ньютона, жидкость с такой же силой действует на сосуд, но направленной противоположно v. Таким образом, реакция вытекающей жидкости по величине равна

$$F = \rho S 2gh\,.$$

Используя этот результат можно найти результирующую силу реакции воды на сосуд в случае двух отверстий.

1.8. Упругие деформации твердого тела

1.347. Согласно закона Гука сжатие (давление P) стержня связано с относительным удлинением стержня ε соотношением

$$P = E|\varepsilon|, \qquad \varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0},$$

где l_0 - недеформированная длина стержня, l - его длина после деформации, E - модуль Юнга.

Если температура стержня изменяется на Δt, то его длина изменится как

$$l = l_0(1 + \alpha \Delta t),$$

где α - коэффициент линейного расширения. Поэтому, в результате изменения температуры удлинение стержня будет

$$\varepsilon = \alpha \Delta t .$$

Чтобы в результате нагревания длина стержня не изменилась, его необходимо сжать с таким же по величине, но отрицательным удлинением. Согласно закона Гука абсолютная величина давления будет

$$P = \alpha E \Delta t .$$

1.352. Рассмотрим малый элемент бруска dx, находящийся на расстоянии x от его левого конца (рис. 33). Сила, действующая на этот элемент, движущийся с ускорением a, равна

$$dT = dm\, a = \frac{m}{l}\, dx \frac{F_0}{m} = \frac{F_0}{l} dx,$$

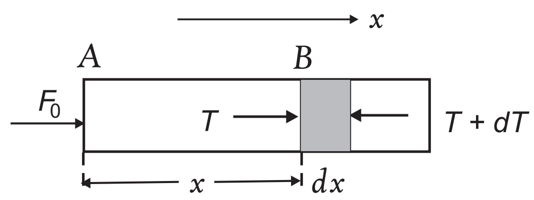

Рис. 33.

где m - масса бруска, а l - его деформированная длина. Результирующая сила, действующая на часть AB бруска и равная[1] $F_0 - T(x)$, представляет собой сумму элементарных сил dT

$$F_0 - T(x) = \int_0^x dT = \int_0^x \frac{F_0}{l} dx = \frac{F_0}{l} x,$$

откуда сила сжатия в сечении B есть

$$T(x) = F_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

Найдем удлинение, которое испытывает произвольный элемент бруска dx при деформации, используя закон Гука

$$\Delta(dx) = -\frac{T(x)}{ES} dx .$$

При малых деформациях можно пренебречь добавкой ΔT и считать, что элемент сжимается силами T, действующими на его торцах. Чтобы найти суммарное удлинение нужно просуммировать удлинение каждого малого элемента $\Delta(dx)$. В результате для удлинения всего бруска получим

$$-\Delta l = \int_0^x \frac{T(x)}{ES} dx = \frac{F_0 l}{2ES}$$

[1] Сила T действует на элемент dx, на часть AB действует сила $-T$

и относительное удлинение есть

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{F_0}{2ES}$$

1.355. а) Рассмотрим элемент стержня dx (рис. 34). Со стороны нижней части на этот элемент действует сила тяжести $P(x) = \rho g(l - S)$, где ρ - плотность, S - площадь поперечного сечения стержня. Со сторон верхней части на этот элемент действует сила $P + dP = \rho g(l - x + dx)S$. При вычислении удлинения малого элемента длины можно пренебречь добавкой dP и считать, что на боковые грани элемента действуют растягивающие силы $P(x)$. Тогда по закону Гука удлинение элемента вдоль его оси есть

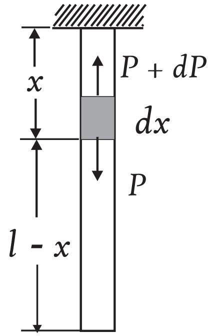

Рис. 34.

$$\Delta(dx) = \frac{P}{SE}dx = \frac{\rho g}{E}(l - x)dx\,.$$

Суммируя все удлинения будем иметь для удлинения всего стержня

$$\Delta l = \int_0^l \frac{\rho g}{E}(l - x)dx = \frac{\rho g l^2}{2E}\,.$$

б) Относительное удлинение объема стержня есть

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\,,$$

где

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{\Delta l}{l} \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_y} \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta l_z}{l_z}$$

- относительные удлинения, соответственно, вдоль оси стержня и в двух поперечных направлениях (стержень имеет форму прямоугольного параллелепипеда) и

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\rho g l}{2E} \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\frac{\Delta l}{l}\,,$$

где μ - коэффициент Пуассона. Откуда получаем

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\rho g l}{2E}(1 - 2\mu)\,.$$

1.9. Релятивистская механика

Преобразование Лоренца. Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K', причем K' движется относительно K со скоростью $\boldsymbol{v}$. Пусть оси x и x' обеих систем координат направлены вдоль вектора $\boldsymbol{v}$, а оси y y' и z z' - параллельны друг другу. Обозначим время в системе K через t, а в системе K' - через t'. Преобразование Лоренца выражают переход от одной системы отсчета к другой при условии, что скорость света в пустоте во всех инерциальных системах отсчета одинакова и равна c, и имеет вид ($\beta = v/c$):

$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{t - (\beta/c)x}{\sqrt{1 - \beta^2}}\,.$$

Обратное преобразование получается в результате перемены знака у v (или у β).

$$x = \frac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = \frac{t' + (\beta/c)x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}\,.$$

Собственной длиной называется линейный размер l_0 тела в той системе отсчета, относительно которой он покоится. Пусть l_0 - собственная длина стержня (в системе K'). Если l - длина этого стержня, измеренная в системе отсчета K, относительно которой стержень движется со скоростью v, то согласно преобразованию Лоренца

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2}\,.$$

Время отсчитанное по часам, движущимся вместе с телом, называется собственным временем этого тела. Обозначим собственное время тела через $t_0 = t'$ (в K'-системе). Пусть в одной и той же точке системы K' происходят два события с интервалом $\Delta t_0 = \Delta t'$, в системе K этим событиям отвечает интервал Δt. Из преобразования Лоренца следует, что эти промежутки времени связаны соотношением

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

1.396. Пусть l_0 - собственная длина стержня (в системе отсчета, в которой стержень покоится), а l - его длина для наблюдателя относительно, которого стержень движется со скоростью v, тогда по условию

$$l = l_0 - \eta l_0\,,$$

где $\eta = 0,005$. Так как

$$l = l_0\sqrt{1-v^2/c^2}\,,$$

где c - скорость света, то подставляя, значение l в первое равенство, получим уравнение для определения v.

1.397. Пусть второй катет треугольника есть b и прилежащий к катету a угол есть α, тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}\,.$$

Соответственно для наблюдателя в системе K'

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{b}{a'}\,.$$

Используя связь между собственной длиной катета a и его длиной a' в движущейся системе отсчета, можно найти тангенс угла α'.

Длину гипотенузы в K' можно найти из равенства

$$l' = \frac{a'}{\cos\alpha'}\,.$$

1.398. Собственная длина l_0 стержня (в K' - системе) равна

$$l_0 = \sqrt{a'^2 + b'^2}\,,$$

где a', b' проекции l_0 на оси координат и ось x' направлена воль направления движения.

Если a и b соответственно проекции стержня в K системе, то

$$a = a'\sqrt{1-\beta^2} \qquad b = b'\,.$$

Учитывая, что $a = l\cos\theta$, $b = l\sin\theta$, из последних равенств можно найти a', b', а затем l_0.

1.399. Пусть метки расположены в K-системе вдоль оси x. Найдем скорость и длину стержня в K-системе. Скорость равна

$$v = \frac{\Delta x}{t_2 - t_1}\,.$$

Длина стержня равна

$$l = v(t_3 - t_2)\,.$$

Откуда можно найти собственную длину стержня

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,.$$

1.400. Если t_0 - собственное время (в K' - системе), а t время в системе K, то

$$t_0 = t\sqrt{1 - v^2/c^2} = t - \Delta t\,.$$

Решая это уравнение, можно найти искомую скорость.
1.401. В K - системе длина стержня равна $l = vt$ (в течение интервала Δt левый конец стержня пройдет расстояние до метки, равное длине стержня l.)

В K' - системе собственная длина стержня равна $l_0 = v\Delta t_0$ (в течение промежутка Δt_0 метка пройдет расстояние l_0 со скоростью v). Так как

$$l = l_0\sqrt{1 - \beta^2}\,,$$

то подставляя l и l_0, получим уравнение для определения v.

Задачи

1.1. Катер, двигаясь вниз по реке, обогнал плот в пункте A. Через $\tau = 60$мин после этого он повернул обратно и затем встретил плот на расстоянии $l = 6,0$км ниже пункта A. Найти скорость течения, если при движении в обоих направлениях мотор катера работал в одном режиме.
1.3. Точка прошла половину пути со скоростью v_0. На оставшейся части пути она половину времени двигалась со скоростью v_1, а последний участок прошла со скоростью v_2. Найти среднюю за все время движения скорость точки.
1.5. Две частицы , 1 и 2, движутся с постоянными скоростями v_1 и v_2. Их радиус-векторы в начальный момент времени равны $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$. При каком соотношении между этими четырьмя векторами частицы испытают столкновение друг с другом?
1.7. Два пловца должны попасть из точки A на одном берегу реки в прямо противоположную точку B на другом берегу. Для этого один из них решил переплыть реку по прямой AB, другой же - все время держать курс перпендикулярно к течению, а расстояние, на которое его снесет, пройти пешком по берегу со скоростью u. При каком значении u оба пловца достигнут точки точки B за одинаковое время, скорость течения $v_0 = 2$км/ч и скорость каждого пловца относительно воды $v' = 2,5$км/ч.
1.10. Два тела бросили одновременно из одной точки: одно - вертикально вверх, другое - под углом $\theta = 60°$ к горизонту. Начальная скорость каждого тела $v_0 = 25$м/с. Найти расстояние между телами через $t = 1,70$с.
1.15. Кабина лифта, у которой расстояние от пола до потолка 2,7 м, начала подниматься с ускорением 1,2м/с^2. Через 2,0 с после начала подъема с потолка кабины стал падать болт.

Найти: а) время свободного падения болта; б) перемещение и путь болта за время свободного падения в системе отсчета, связанной с шахтой лифта.

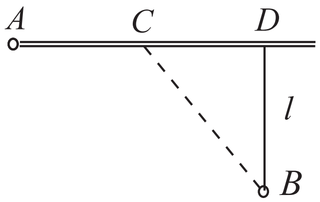

Рис. 35.

1.17. Из пункта A, находящегося на шоссе (см. рис. 35) необходимо за кратчайшее время попасть на машине в пункт B, расположенный в поле на расстоянии l. На каком расстоянии от точки D следует свернуть с шоссе, если скорость машины по полю в η раз меньше ее скорости по шоссе?

1.20. Радиус-вектор частицы меняется со временем t по закону $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}t(1 - \alpha t)$, где $\boldsymbol{b}$ - постоянный вектор, α - положительная постоянная. Найти: а) скорость и ускорение частицы как функции t; б) время, через которое частица вернется в исходную точку, и пройденный при этом путь.

1.21. В момент $t = 0$ частица вышла из начала координат в положительном направлении оси x. Ее скорость меняется со временем t как $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0(1 - t/\tau)$, где v_0 - начальная скорость, ее модуль $v_0 = 10,0$см/с, $\tau = 5,0$с. Найти: а)координату x частицы, когда $t = 6,0$, 10 и 20с; б) моменты времени, когда частица будет находится на расстоянии 10,0 см от начала координат.

1.22. Частица движется в положительном направлении оси x так, что ее скорость меняется по закону $v = \alpha\sqrt{x}$, где α - положительная постоянная. В момент $t = 0$ частица находилась в точке $x = 0$. Найти: а) ее скорость и ускорение как функции времени; б) среднюю скорость за время, в течение которого она пройдет первые s метров.

1.24. Точка движется в плоскости xy по закону $x = \alpha t$, $y = \beta t^2$, где α и β - положительные постоянные. Найти: а) уравнение траектории точки $y = y(x)$ и ее график; б)модули

скорости и ускорения точки как функции t; в) угол φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}$ как функцию t.