

1.1. Кинематика

1.1 Катер, двигаясь вниз по реке, обогнал плот в пункте A . Через $\tau = 60$ мин после этого он повернул обратно и затем встретил плот на расстоянии $l = 6,0$ км ниже пункта A . Найти скорость течения, если при движении в обоих направлениях мотор катера работал в одном режиме.

Пусть скорость катера относительно реки есть v_k , а v_p - скорость реки (плота). При решении надо учесть, что скорость катера относительно берега, когда он движется по течению, есть $v_k + v_p$, а против течения, $v_k - v_p$. Задачу можно решить тремя способами.

Первый способ. Полное время до встречи можно записать как

$$\frac{l}{v_p} = \tau + \frac{(v_k + v_p)\tau - l}{v_k - v_p}.$$

Откуда находим $v_p = l/2\tau$;

Второй способ. Пусть t - время движения катера против течения. Тогда расстояние пройденное катером за время τ есть:

$$(v_k + v_p)\tau = v_p(t + \tau) + (v_k - v_p)t.$$

Учитывая, что $v_p(t + \tau) = l$, получаем $v_p = l/2\tau$.

Третий способ. Пусть скорость катера относительно реки (или плота) есть v_k . Это означает, что в системе отсчета, в которой река (плот) неподвижна, катер движется в одну и другую сторону с одной и той же скоростью v_k . Время движения от плота - τ . Поскольку в противоположном направлении скорость катера не меняется, то двигаясь в противоположном направлении катер до встречи с плотом затратит также время τ . Полное время до встречи тогда равно 2τ . За

это время плот переместится на расстояние l относительно берега. Следовательно скорость реки (плота) равна $l/2\tau$.

1.3. Пусть t_1 - время, в течение которого была пройдена первая половина пути, а t_2 - время движения со скоростью v_1 и скоростью v_2 . Тогда

$$v_{\text{ср}} = \frac{\text{пройденный путь}}{\text{затраченное время}} = \frac{v_0 t_1 + v_1 t_2 + v_2 t_2}{t_1 + 2t_2}.$$

Так как $v_0 t_1 = v_1 t_2 + v_2 t_2$, то получаем

$$v_{\text{ср}} = \frac{2v_0(v_1 + v_2)}{v_1 + v_2 + 2v_0}.$$

1.5. При равномерном движении радиус векторы частиц меняются со временем по закону

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1(t) &= \mathbf{v}_1 t + \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2(t) &= \mathbf{v}_2 t + \mathbf{r}_2. \end{aligned}$$

Момент времени столкновения t определяется из условия

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{r}_2(t)$$

и равен

$$t = \frac{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}.$$

Подставляя t в предыдущее равенство получим соотношение между векторами

$$\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|}.$$

1.7. Чтобы двигаться по прямой AB первый пловец должен учитывать течение реки и плыть под некоторым углом к AB

Найти: а) время свободного падения болта; б) перемещение и путь болта за время свободного падения в системе отсчета, связанной с шахтой лифта.

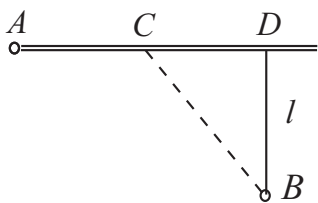


Рис. 35.

1.17. Из пункта A , находящегося на шоссе (см. рис. 35) необходимо за кратчайшее время попасть на машине в пункт B , расположенный в поле на расстоянии l . На каком расстоянии от точки D следует свернуть с шоссе, если скорость машины по полю в η раз меньше ее скорости по шоссе?

1.20. Радиус-вектор частицы меняется со временем t по закону $\mathbf{r} = \mathbf{b}t(1 - \alpha t)$, где \mathbf{b} - постоянный вектор, α - положительная постоянная. Найти: а) скорость и ускорение частицы как функции t ; б) время, через которое частица вернется в исходную точку, и пройденный при этом путь.

1.21. В момент $t = 0$ частица вышла из начала координат в положительном направлении оси x . Ее скорость меняется со временем t как $\mathbf{v} = v_0(1 - t/\tau)$, где v_0 - начальная скорость, ее модуль $v_0 = 10,0$ см/с, $\tau = 5,0$ с. Найти: а) координату x частицы, когда $t = 6,0, 10$ и 20 с; б) моменты времени, когда частица будет находиться на расстоянии $10,0$ см от начала координат.

1.22. Частица движется в положительном направлении оси x так, что ее скорость меняется по закону $v = \alpha\sqrt{x}$, где α - положительная постоянная. В момент $t = 0$ частица находилась в точке $x = 0$. Найти: а) ее скорость и ускорение как функции времени; б) среднюю скорость за время, в течение которого она пройдет первые s метров.

1.24. Точка движется в плоскости xy по закону $x = \alpha t$, $y = \beta t^2$, где α и β - положительные постоянные. Найти: а) уравнение траектории точки $y = y(x)$ и ее график; б) модули

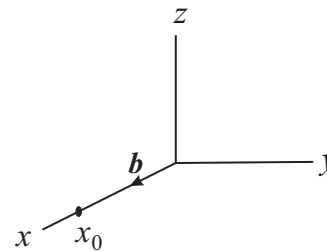


Рис. 4.

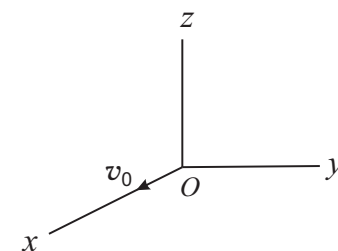


Рис. 5.

Требуется найти такое x , чтобы t было минимальное. Для этого необходимо это решить уравнение

$$\frac{dt(x)}{dx} = 0.$$

Решая уравнение, получаем

$$x = \frac{l}{\sqrt{\eta^2 - 1}}.$$

1.20. а) Дифференцируя $\mathbf{r} = \mathbf{b}t(1 - \alpha t)$ один раз, находим скорость $\mathbf{v} = \mathbf{b}(1 - 2\alpha t)$, а после дифференцирования скорости получаем ускорение $\mathbf{a} = -2\alpha\mathbf{b}$.

б) Пусть движение начинается при $t = 0$ и $\mathbf{r}(0) = 0$. Найдем все t при которых $\mathbf{r} = 0$. Легко найти, что $t_1 = 0$ и $t_2 = 1/\alpha$. Таким образом, частица через $t = 1/\alpha$ вернется в начало координат.

Найдем пройденный путь. Отметим, что частица движется вдоль прямой параллельной вектору \mathbf{b} . Выберем систему координат, в которой ось x направлена вдоль вектора \mathbf{b} (рис. 4). В такой системе координат частица движется вдоль оси x до точки x_0 останавливается в ней и движется обратно. Момент времени остановки t_0 определяется из условия

$$x(t) = bt(1 - \alpha t) \quad v = \dot{x} = b(1 - 2\alpha t) = 0,$$

где $b = |\mathbf{b}|$. Откуда получаем $t_0 = 1/2\alpha$. Пройденный путь равен $s = 2x_0 = 2x(t_0) = b/2\alpha$

1.21. В данном случае имеем прямолинейное, движение в направлении постоянного вектора v_0 . Выберем систему координат, ось x которой направлена вдоль постоянного вектора v_0 (рис. 5) В такой системе частица движется вдоль оси x со скоростью $v = |v| = v_0(1 - t/\tau)$, с ускорением $a = \dot{v} = -v_0/\tau = \text{const}$. Так как ускорение постоянно, начальное значение скорости есть v_0 и частица начинает двигаться из начала координат, то равноускоренный закон движения вдоль оси x есть

$$x = -\frac{v_0 t^2}{2\tau} + v_0 t = v_0 t \left(1 - \frac{t}{2\tau}\right).$$

Задавая в последнем равенстве t , можно определить положение частицы. Задавая расстояние x от начала координат можно определить соответствующие моменты времени.

1.22. а) Найдем ускорение точки. По определению имеем

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} \alpha \sqrt{x} = \frac{\alpha^2}{2} = \text{const}.$$

Откуда следует, что движение равноускоренное. Используя это условие и определяя начальное положение точки и начальную скорость, находим скорость и закон движения

$$v = \frac{\alpha^2 t}{2}, \quad x = \frac{\alpha^2 t^2}{4}.$$

б) Средняя скорость определяется как $v_{\text{ср}} = s/T$, где T - время движения. Определяя T из закона движения, находим

$$v_{\text{ср}} = \frac{\alpha \sqrt{s}}{2}.$$

Задачи

1.1. Катер, двигаясь вниз по реке, обогнал плот в пункте A . Через $\tau = 60$ мин после этого он повернул обратно и затем встретил плот на расстоянии $l = 6,0$ км ниже пункта A . Найти скорость течения, если при движении в обоих направлениях мотор катера работал в одном режиме.

1.3. Точка прошла половину пути со скоростью v_0 . На оставшейся части пути она половину времени двигалась со скоростью v_1 , а последний участок прошла со скоростью v_2 . Найти среднюю за все время движения скорость точки.

1.5. Две частицы, 1 и 2, движутся с постоянными скоростями v_1 и v_2 . Их радиус-векторы в начальный момент времени равны \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . При каком соотношении между этими четырьмя векторами частицы испытают столкновение друг с другом?

1.7. Два пловца должны попасть из точки A на одном берегу реки в прямо противоположную точку B на другом берегу. Для этого один из них решил переплыть реку по прямой AB , другой же - все время держать курс перпендикулярно к течению, а расстояние, на которое его снесет, пройти пешком по берегу со скоростью u . При каком значении u оба пловца достигнут точки B за одинаковое время, скорость течения $v_0 = 2$ км/ч и скорость каждого пловца относительно воды $v' = 2,5$ км/ч.

1.10. Два тела бросили одновременно из одной точки: одно - вертикально вверх, другое - под углом $\theta = 60^\circ$ к горизонту. Начальная скорость каждого тела $v_0 = 25$ м/с. Найти расстояние между телами через $t = 1,70$ с.

1.15. Кабина лифта, у которой расстояние от пола до потолка $2,7$ м, начала подниматься с ускорением $1,2$ м/с². Через $2,0$ с после начала подъема с потолка кабины стал падать болт.

Собственной длиной называется линейный размер l_0 тела в той системе отсчета, относительно которой он покоится. Пусть l_0 - собственная длина стержня (в системе K'). Если l - длина этого стержня, измеренная в системе отсчета K , относительно которой стержень движется со скоростью v , то согласно преобразованию Лоренца

$$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Время отсчитанное по часам, движущимся вместе с телом, называется собственным временем этого тела. Обозначим собственное время тела через $t_0 = t'$ (в K' -системе). Пусть в одной и той же точке системы K' происходят два события с интервалом $\Delta t_0 = \Delta t'$, в системе K этим событиям отвечает интервал Δt . Из преобразования Лоренца следует, что эти промежутки времени связаны соотношением

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

1.396. Пусть l_0 - собственная длина стержня (в системе отсчета, в которой стержень покоится), а l - его длина для наблюдателя относительно, которого стержень движется со скоростью v , тогда по условию

$$l = l_0 - \eta l_0,$$

где $\eta = 0,005$. Так как

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

где c - скорость света, то подставляя, значение l в первое равенство, получим уравнение для определения v .

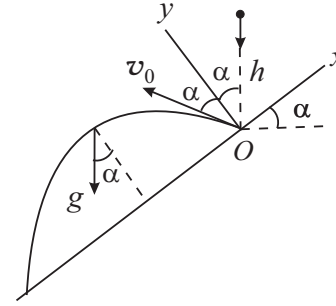


Рис. 7.

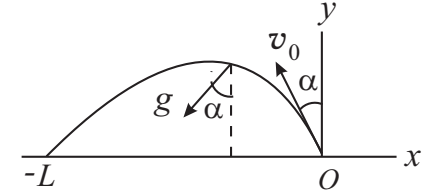


Рис. 8.

1.31. Пусть угол наклона начальной скорости к оси абсцисс есть α . Тогда время движения снаряда равно (см. задачу 1.28) $t = 2v_0 \sin \alpha / g$. Откуда $\sin \alpha = gt / 2v_0$. Так как расстояние пройденное снарядом вдоль оси абсцисс есть $L = v_0 t \cos \alpha$, то $\cos \alpha = L / v_0 t$. Используя условие $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, получим уравнение для определения t , решая которое находим

$$t_{1,2} = 2 \left(\frac{v_0}{g} \right)^2 \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{gL}{v_0^2} \right)^2} \right\}.$$

Время движения определяется в зависимости о начального угла.

1.34. а) Так как $\dot{x} = \alpha$ и $x_0 = x(0) = 0$, то $x = \alpha t + x_0 = \alpha t$. Скорость вдоль оси y равна $\dot{y} = \beta x$, тогда для ускорения имеем $\ddot{y} = \beta \dot{x} = \beta \alpha = \text{const}$. Откуда следует, что движение вдоль y равноускоренное и закон движения с учетом начальных условий есть

$$y = \frac{\alpha \beta}{2} t^2.$$

Ускорения частицы вдоль осей равны $a_x = \ddot{x} = 0$, $a_y = \ddot{y} = \alpha \beta$, поэтому величина ускорения есть $a = \alpha \beta$.

Исключая t с помощью равенства $t = x/\alpha$, получаем из последнего равенства для y уравнение траектории (парабола)

$$y = \frac{\beta}{2\alpha} x^2.$$

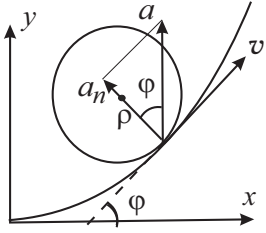


Рис. 9.

б) Радиус кривизны равен

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 x^2}{a_n}.$$

Нормальное ускорение равно (см. рис. 9) $a_n = a \cos \varphi = \alpha \beta \cos \varphi$. Так как $\operatorname{tg} \varphi = y' = \beta x/\alpha$, то находя $\cos \varphi$, в результате получим

$$\rho = \frac{\alpha}{\beta} (1 + \beta^2 x^2/\alpha^2)^{3/2}.$$

1.36. Полное ускорение равно $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$, где $a_n = v^2/R = \alpha^2 t^2/R$ - нормальное ускорение и $a_\tau = \dot{v} = \alpha$ - касательное ускорение. Находя пройденный путь S из равенства $\dot{S} = v = \alpha t$ и определяя момент времени t из условия $S = 2\pi Rn$, найдем a_n и окончательно

$$a = \alpha \sqrt{1 + (4\pi n)^2}.$$

1.38. Если φ угол между касательным ускорением a_τ и полным ускорением, то $\operatorname{tg} \varphi = a_n/a_\tau$, где a_n - нормальное ускорение. Записывая скорость как $v = ks$, где k - константа, и вычисляя ускорения, $a_\tau = \dot{v} = (dv/ds)ds/dt$, $a_n = v^2/R$, получим $\operatorname{tg} \varphi = 2s/R$.

1.39. Находя скорость движения как $v = \dot{l}$ и ускорения $a_\tau = \ddot{l}$, $a_n = v^2/R$, получим полное ускорение $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$.

- относительные удлинения, соответственно, вдоль оси стержня и в двух поперечных направлениях (стержень имеет форму прямоугольного параллелепипеда) и

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\rho g l}{2E} \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \frac{\Delta l}{l},$$

где μ - коэффициент Пуассона. Откуда получаем

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\rho g l}{2E} (1 - 2\mu).$$

1.9. Релятивистская механика

Преобразование Лоренца. Рассмотрим две инерциальные системы отсчета K и K' , причем K' движется относительно K со скоростью v . Пусть оси x и x' обеих систем координат направлены вдоль вектора v , а оси y y' и z z' - параллельны друг другу. Обозначим время в системе K через t , а в системе K' - через t' . Преобразование Лоренца выражают переход от одной системы отсчета к другой при условии, что скорость света в пустоте во всех инерциальных системах отсчета одинакова и равна c , и имеет вид ($\beta = v/c$):

$$x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (\beta/c)x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Обратное преобразование получается в результате перемены знака у v (или у β).

$$x = \frac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (\beta/c)x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Используя этот результат можно найти результирующую силу реакции воды на сосуд в случае двух отверстий.

1.8. Упругие деформации твердого тела

1.347. Согласно закона Гука сжатие (давление P) стержня связано с относительным удлинением стержня ε соотношением

$$P = E|\varepsilon|, \quad \varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0},$$

где l_0 - недеформированная длина стержня, l - его длина после деформации, E - модуль Юнга.

Если температура стержня изменяется на Δt , то его длина изменится как

$$l = l_0(1 + \alpha\Delta t),$$

где α - коэффициент линейного расширения. Поэтому, в результате изменения температуры удлинение стержня будет

$$\varepsilon = \alpha\Delta t.$$

Чтобы в результате нагревания длина стержня не изменилась, его необходимо сжать с таким же по величине, но отрицательным удлинением. Согласно закона Гука абсолютная величина давления будет

$$P = \alpha E\Delta t.$$

1.352. Рассмотрим малый элемент бруска dx , находящийся на расстоянии x от его левого конца (рис. 33). Сила, действующая на этот элемент, движущийся с ускорением a , равна

$$dT = dm a = \frac{m}{l} dx \frac{F_0}{m} = \frac{F_0}{l} dx,$$

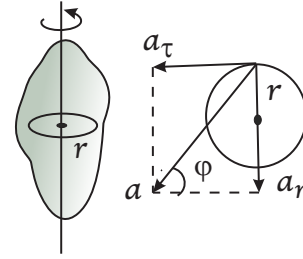


Рис. 12.

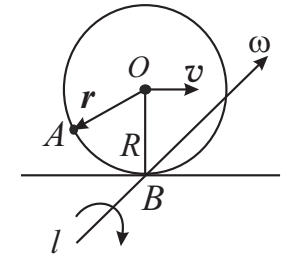


Рис. 13.

равно $a_n = v^2/r$. Откуда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha t^3}{4}.$$

Искомое время находим из условия

$$\alpha t^3 = 4 \operatorname{tg}(\pi/3).$$

1.52. а) В любой момент времени тело совершает чистое вращение вокруг мгновенной оси вращения l , проходящей через точку B касания колеса с поверхностью, перпендикулярно направлению скорости центра инерции O и плоскости колеса (см. 13). Поэтому $\omega = v/R$. Так как $v = \text{const}$, то и вектор угловой скорости ω постоянен и лежит вдоль l .

В общем случае скорость и ускорение произвольной точки A твердого тела есть

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + [\boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]],$$

где \mathbf{v}_0 , \mathbf{a}_0 - скорость и ускорение центра инерции колеса, а $\boldsymbol{\beta}$ - угловое ускорение. Учитывая, что $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ постоянные векторы, $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{v}$, $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{r}$, а также, что для любых трех

векторов выполняется равенство

$$[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

получим

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{R} \frac{\mathbf{r}}{R}.$$

Так как \mathbf{r}/R - единичный вектор, направленный из точки O в точку A , то \mathbf{a} направлен к центру колеса (из точки A). Величина ускорения равна $a = v^2/R$.

Скорость v можно найти из уравнения Бернулли

$$p_0 + \rho gh = p_0 + \rho gh_0 + \frac{\rho v^2}{2},$$

где p_0 - атмосферное давление и скорость на поверхности жидкости принимается равной нулю. После нахождения v можно найти при каком значении h_0 расстояние l принимает максимальное значение.

1.379. Рассмотрим вначале сосуд высоты h_0 с одним отверстием в боковой стенке на высоте h_1 . На свободной поверхности давление равно атмосферному давлению p_0 и скоростью точек свободной поверхности можно пренебречь. Рассмотрим линию тока, начинающуюся на свободной поверхности воды и уходящую в отверстие. Давление в вытекающей струе приблизительно равно p_0 . Тогда уравнение Бернулли дает

$$p_0 + \rho gh_0 = p_0 + \rho gh_1 + \frac{\rho v^2}{2},$$

где v - скорость вытекающей струи. Откуда

$$v = \sqrt{2gh},$$

где $h = h_0 - h_1$. За единицу времени из отверстия уносится импульс, равный

$$mv = \rho S v \cdot v = \rho S v^2 = \rho S 2gh.$$

Но, изменение импульса жидкости в единицу времени равно силе, действующей на жидкость. Поэтому на жидкость действует сила, равная $\rho S 2gh$. На жидкость действуют только стенки сосуда. В свою очередь, по третьему закону Ньютона, жидкость с такой же силой действует на сосуд, но направленной противоположно v . Таким образом, реакция вытекающей жидкости по величине равна

$$F = \rho S 2gh.$$

На тело действует сила тяжести mg и сила натяжения нити F . На диск действует сила натяжения F со стороны тела, а также сила упругости пружины, равная по закону Гука $\kappa(l_0 + \Delta l + x - l_0) = \kappa(\Delta l + x)$, при условии, что тело сместится на расстояние x из положения равновесия. Таким образом, уравнения движения записываются в виде (тело смещается вниз)

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - F \\ I\ddot{\varphi} &= RF - R\kappa(\Delta l + x), \end{aligned}$$

где φ - угол поворота диска. Учитывая, что $\dot{x} = R\dot{\varphi}$ и $\ddot{x} = R\ddot{\varphi}$, исключим силу натяжения нити F .

$$\frac{I}{R}\ddot{x} = R(mg - m\ddot{x}) - R\kappa(x + \Delta l).$$

В положении равновесия, $x = 0$, $\ddot{x} = 0$, что дает $mg = \kappa\Delta l$. Откуда

$$\ddot{x} = -\frac{\kappa R^2}{mR^2 + I}x.$$

Из этого равенства можно найти частоту и период колебаний.

1.7. Гидродинамика

1.367. Если рассмотреть физически малый элемент объема жидкости между точками 1 и 2, то он движется по искривленной траектории. Следовательно, этот элемент имеет центростремительное ускорение, направленное к центру кривизны. Отсюда следует, что на этот элемент действует сила со стороны окружающих слоев жидкости, также направленная к

Значение F в этом случае равно

$$F = \frac{kmg}{\sqrt{1+k^2}}.$$

1.74. Груз и муфта создают натяжение нити. В свою очередь нить, по третьему закону Ньютона, с той же силой натяжения действует на груз и муфту. Но так как действие нити на муфту проявляется только в виде трения, то сила натяжения нити равна силе трения $F_{\text{тр}}$ муфты о нить. С такой же по величине силой нить действует на груз.

Выберем систему отсчета, связанную с неподвижным блоком. Если ускорение груза (и следовательно нити) относительно этой системы отсчета равно a , то ускорение муфты относительно этой системы будет $a' - a$, так как муфта движется относительно нити с ускорением a' , а сама нить движется в противоположном направлении с ускорением a . Составляя далее уравнения движения для муфты и груза (используя второй закон Ньютона), получим для ускорения a

$$a = g - \frac{F_{\text{тр}}}{M}$$

и силы трения

$$F_{\text{тр}} = \frac{mM(2g - a')}{m + M}.$$

1.75. Если a' - ускорения грузов относительно кабины, то их ускорения относительно неподвижной системы отсчета есть

$$a_1 = a_0 + a' \quad a_2 = a_0 - a'$$

(m_1 движется вверх, m_2 - вниз). Записывая второй закон Ньютона для каждого тела и решая полученную систему уравнений, получим

$$a' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g - a_0).$$

Сила, действующая на потолок со стороны блока (из-за натяжения нитей) равна $F = 2T$, где T - натяжение нити. Из уравнений движения получим

$$\mathbf{F} = -\frac{4m_1m_2}{m_1 + m_2}(\mathbf{g} - \mathbf{a}_0).$$

1.76. Пусть на массу m_0 со стороны нити действует сила натяжения F_1 . На массы m_1 и m_2 со стороны нити действует сила F_2 . По третьему закону Ньютона массы m_1 и m_2 действуют на нить с противоположной силой $-F_2$. Поэтому результирующая сила, действующая на движущийся блок (блок A) есть

$$2F_2 - F_1.$$

Запишем второй закон Ньютона для всех тел, включая блок A . Пусть ускорение m_0 есть a , а ускорения m_1 , m_2 есть соответственно $\pm a'$. Пусть, например, тело m_0 движется вправо, а тело m_1 относительно блока A вверх. Тогда относительно неподвижной поверхности уравнения движения принимают вид (предполагается, что все тела движутся вниз)

$$\begin{aligned} m_0a &= F_1 \\ m_Aa &= 2F_2 - F_1 \\ m_1(a - a') &= m_1g - F_2 \\ m_2(a + a') &= m_2 - F_2. \end{aligned}$$

Решая эту систему, при условии, что масса блока A $m_A \rightarrow 0$, получим

$$a_1 = g \frac{4m_1m_2 + (m_1 - m_2)m_0}{4m_1m_2 + (m_1 + m_2)m_0}.$$

1.77. Прежде заметим, что если брусок движется с постоянной скоростью, то тело 2 не испытывает действие силы в направлении движения бруска. Когда брусок движется с ускорением

3.54. Запишем уравнение для углового момента $L_z = I\omega = I\dot{\varphi}$

$$I\ddot{\varphi} = -k\varphi,$$

которое имеет вид уравнения гармонических колебаний с $\omega^2 = k/I$. Решение этого уравнения есть

$$\varphi = A \cos \omega t + B \sin \omega t = \varphi_m \cos(\omega t + \alpha).$$

Используя начальные условия, можно найти амплитуду колебаний

$$\varphi_m = \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Энергия крутильных колебаний равна

$$E = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + U(\varphi),$$

где потенциальная энергия колебательного движения может быть определена из соотношения $U_1 - U_2 = A$, где A - работа упругих сил

$$U(0) - U(\varphi) = \int_0^\varphi N_z d\varphi = \int_0^\varphi k\varphi d\varphi.$$

При условии, что $U(0) = 0$, полная энергия равна

$$E = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{k\varphi^2}{2} = \frac{k\varphi_m^2}{2}.$$

3.66. Пусть x координата вдоль оси, направленной вертикально вниз и отсчитываемая от положения равновесия тела. Когда тело находится в равновесном положении, пружина растянута (чтобы уравновесить силу тяжести тела) до длины $l_0 + \Delta l$, где l_0 - недеформированная длина пружины, а Δl - соответствующее удлинение.

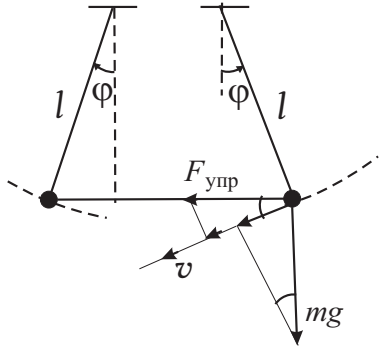


Рис. 29.

где $L - L_0$ - удлинение пружины, которое при малых φ приближенно равно

$$L - L_0 = 2l \sin \varphi \approx 2l\varphi.$$

Так как скорость равна $v = -l\dot{\varphi}$ (при движении влево $\dot{\varphi} < 0$), тангенциальное ускорение есть $a = \dot{v} = -l\ddot{\varphi}$. Записывая затем уравнение движения и приводя его к стандартному виду уравнения гармонических колебаний, получим выражение для периода.

3.18. Шарик движется из начального положения до стенки точно так же как и свободный маятник без ограничений. Поэтому его движение в интервале от β до $-\alpha$ определяется уравнением

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \quad \omega^2 = \frac{g}{l},$$

где φ - угол отклонения маятника от вертикали, при заданных начальных условиях равный

$$\varphi = \beta \cos \omega t.$$

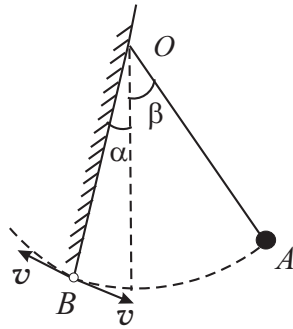


Рис. 30.

полученное выражение $t = t_0$, найдем

$$v_0 = \frac{mg^2}{2k \sin^2 \alpha} \cos \alpha.$$

При условии, что $x(0) = 0$, пройденный путь равен

$$x_0 = \int_0^{t_0} \dot{x}(t') dt' = \frac{m^2 g^3}{6k^2 \sin^3 \alpha} \cos \alpha.$$

1.81. Запишем второй закон Ньютона

$$m \frac{dv}{dt} = F \cos \alpha = F \cos ks.$$

Последнее равенство показывает, что ускорение явно зависит от пройденного пути. Поэтому удобно рассматривать скорость зависящей от времени через путь s , т.е. $v(t) = v(s(t))$. Тогда

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v$$

и

$$\frac{dv}{ds} v = \frac{F}{m} \cos ks.$$

Интегрируя это равенство, учитывая что $v dv/ds = dv^2/2dt$, получим

$$v = \sqrt{2g \sin \alpha / 3k}.$$

1.84. а) Выберем ось x в направлении постоянного вектора \mathbf{b} , тогда движение происходит вдоль оси x . Если $p = p_x = mv_x$ - импульс частицы, то

$$\dot{p} = bt(\tau - t),$$

где $b = |\mathbf{b}|$. Интегрируя, получаем

$$p(\tau) = b\tau^3/6$$

или в векторном виде

$$\mathbf{p} = \frac{\tau^3}{6} \mathbf{b}.$$

б) Пройденный путь есть

$$s(\tau) = \int_0^{\tau} (p(t)/m) dt = \frac{b\tau^4}{12m}.$$

1.85.(41) Возьмем ось x в направлении постоянного вектора F_0 . Тогда

$$m\ddot{x} = F_0 \sin \omega t$$

и

$$\dot{x} = -\frac{F_0}{m} \cos \omega t + C.$$

Так как $\dot{x}(0) = 0$, то $C = F_0/m$. В результате получим

$$\dot{x} = \frac{F_0}{m\omega} (1 - \sin \omega t),$$

откуда пройденный путь есть

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2} (\omega t - \sin \omega t)$$

1.88. Запишем уравнение движения

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^2$$

или $dv/v^2 = -kdt$, и учитывая, что $dv/v^2 = -d(1/v)$, будем иметь

$$d\left(\frac{1}{v} - \frac{kt}{m}\right) = 0$$

вводя новые постоянные a и α посредством равенств

$$A = a \cos \alpha \quad B = -a \sin \alpha.$$

3.11. а) Показать, что имеет место равенство

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

Чтобы определить направление движения, найти \dot{x} , \dot{y} и определить их значения, например, при $t = 0$ и $\omega t = \pi/2$

б) Найти \ddot{x} , \ddot{y} и выразить их через координаты частицы x и y .

3.13. уравнение движения частицы имеет вид

$$m\ddot{x} = F(x) = -\frac{dU}{dx} = -U_0 a \sin ax.$$

Положение равновесия определяется из условия $F(x) = 0$ и равно $x = 0$. При малых колебаниях смещения из положения равновесия малы, поэтому

$$F(x) = -U_0 a \sin ax \approx -U_0 a^2 x.$$

Используя это выражение в правой части уравнения движения, можно найти период.

3.17. При движении маятников частицы движутся по дугам окружностей радиуса l (см. рис. 29). Рассмотрим, например, движение правой частицы к положению равновесия. Левая частица движется навстречу. Вдоль касательной на частицу действует проекция силы тяжести $mg \sin \varphi \approx mg\varphi$ и проекция упругой силы пружины, равная по закону Гука

$$F_{\text{упр}} \cos \varphi = \kappa(L - L_0) \cos \varphi \approx \kappa(L - L_0),$$

Здесь F_1 и F_2 - силы натяжения, соответственно, между блоком и m_1 и блоком и m_2 , I - момент инерции относительно оси диска, ε - его угловое ускорение, r - радиус диска, a ускорение тел. Решая эту систему, найдем a ;

б) Работа силы трения равна

$$A = -F_{\text{тр}}S,$$

где $S = at^2/2$ - пройденный телом 1 путь. Откуда

$$A = -km_1g\frac{at^2}{2}.$$

1.316. На шар действуют силы тяжести, трения $F_{\text{тр}}$ и реакция на нормальное давление N_n . Уравнения движения есть

$$\begin{aligned} ma &= mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} \\ I\varepsilon &= F_{\text{тр}}R \\ N_n &= mg \cos \alpha, \end{aligned}$$

где a - ускорение ц.м., ε - угловое ускорение шара, $I = 2mR^2/5$ - момент инерции шара относительно оси, проходящей через его центр.

Точка шара, соприкасающаяся с наклонной плоскостью в данный момент времени, покоится относительно этой плоскости и шар совершает чистое вращение вокруг оси, перпендикулярной направлению движения. Поэтому

$$a = R\varepsilon.$$

Решая совместно записанные выше уравнения и исключая силу трения, получим

$$a = \frac{5}{7}g \sin \alpha.$$

закон Ньютона, получаем

$$P_1 = N_1 = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right);$$

б) Верхняя точка траектории. А этом случае имеем

$$P_2 = N_2 = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right);$$

в) Средняя точка петли. В этом случае

$$P_3 = N_3 = \frac{mv^2}{R}.$$

Сила тяжести mg в этой точке петли компенсируется реакцией опоры, действующей в вертикальном направлении.

1.92. а) Направим ось y вертикально вниз. Пусть θ - угол отклонения нити от вертикали. Спроектируем уравнение движения (второй закон Ньютона) на направление касательной к траектории и на радиальное направление

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{R} &= F - mg \cos \theta \\ m\dot{v} &= mg \sin \theta, \end{aligned}$$

где R - длина нити, v - величина скорости шарика, F - натяжение нити. Если шарик движется в сторону уменьшения угла θ , то $v = -R\dot{\theta}$ ($\dot{\theta} < 0$). Последнее уравнение в этом случае принимает вид

$$-R\ddot{\theta} = g \sin \theta.$$

Умножая последнее равенство на $\dot{\theta}$

$$R\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\dot{\theta}g \sin \theta$$

и перепишем его как

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{g}{R} \cos \theta \right).$$

Откуда получаем

$$\frac{v^2}{R} = 2g \cos \theta.$$

Натяжение нити тогда есть $F = 3mg \cos \theta$.

Найдем модуль полного ускорения как

$$a^2 = a_n^2 + a_\tau^2 = \left(\frac{v^2}{R} \right)^2 + (\dot{v})^2 = g^2(1 + 3 \cos^2 \theta);$$

б) Вертикальная составляющая скорости равна

$$v_y = v \sin \theta = \sqrt{2gR \cos \theta} \sin \theta.$$

Так как v_y и v_y^2 имеют максимум при одном и том же угле, то найдем этот угол из максимума v_y^2

$$(v_y^2)'_{\theta} = 0.$$

Решая это уравнение, получим $\cos \theta = 1/\sqrt{3}$, откуда $F = 3mg \cos \theta = \sqrt{3}mg$;

в) Полное ускорение есть $\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_\tau$. По условию $a_y = a_{ny} + a_{\tau y} = 0$ или

$$a_n \cos \theta + a_\tau \sin \theta = \frac{v^2}{R} \cos \theta - \dot{v} \sin \theta = 0.$$

Решая это уравнение, получим $\cos \theta = 1/\sqrt{3}$.

1.97. Поскольку $v = const$, то тангенциальное ускорение равно нулю. Тогда нормальное ускорение должно вызываться

откуда

$$\omega = \frac{gt}{R(1 + M/2m)} \quad (\omega(0) = 0);$$

б) Учитывая, что скорость груза $v = R\omega$, кинетическая энергия системы вычисляется из выражения

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

1.292. Запишем уравнения движения. Пусть тело m_1 движется вертикально вверх, тогда

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_1 - m_1 g \\ m_2 a &= m_2 g - F_2 \\ I \beta &= M_z = R(F_2 - F_1) \\ a &= R\beta, \end{aligned}$$

где β - угловое ускорение цилиндра, $I = mR^2/2$ - момент инерции цилиндра, последнее равенство выражает связь линейного ускорения и углового. Решая эту систему уравнений, можно найти β и F_1/F_2 . Для отношения сил получим

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{4 + m/m_2}{4 + m/m_1}.$$

При $m \rightarrow 0$, $F_1 \rightarrow F_2$.

1.293. а) Уравнения движения есть

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_1 - kN \\ m_2 a &= m_2 g - F_2 \\ I \varepsilon &= -rF_1 + rF_2 \\ a &= \varepsilon r; \quad N = m_1 g \end{aligned}$$

1.5. Динамика твердого тела

1.272. Движение стержня описывается уравнениями

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \\ \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \mathbf{M}, \end{aligned}$$

где \mathbf{L} - момент импульса относительно ц.и., а \mathbf{M} - результирующий момент внешних сил относительно ц.и. Так как вращения стержня нет, то $\mathbf{M} = 0$. Момент сил направлен перпендикулярно плоскости рисунка (вдоль оси z). Тогда, если x - расстояние от центра инерции до точки приложения силы \mathbf{F}_2 , то в скалярной форме записанные выше уравнения дают

$$\begin{aligned} ma &= F_2 - F_1 \\ M_z &= (x + b)F_1 - xF_2 = 0. \end{aligned}$$

Находя из этих уравнений x , можно найти длину стержня $l = 2(x + b)$.

1.273. На шар действуют сила \mathbf{F} , сила тяжести $m\mathbf{g}$, реакция на нормальное давление \mathbf{N} и сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ ($F_{\text{тр}} = kN$). Пусть xy плоскость рисунка, причем шар движется в направлении оси x , а ось z направлена перпендикулярно чертежу, на "нас". В отсутствии вращения момент сил \mathbf{M} относительно ц.и. равен нулю (соответственно и проекция на ось z , $M_z = 0$) уравнения движения записываются в виде

$$\begin{aligned} ma &= F \cos \alpha - F_{\text{тр}} \\ mg &= N + F \sin \alpha \\ M_z &= RF \sin \alpha - RF_{\text{тр}} = 0. \end{aligned}$$

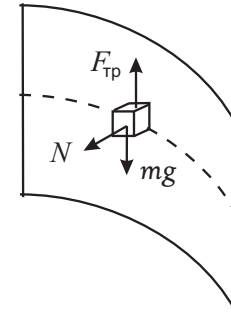


Рис. 14.

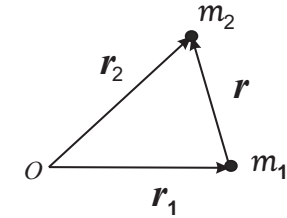


Рис. 15.

где N реакция поверхности на нормальное давление (рис. 14). Для того чтобы движение происходило бы параллельно основанию и не было бы перемещения в вертикальном направлении, сила тяжести, действующая на мотоциклиста, должна уравновешиваться силой трения покоя. Условием этого является выполнение неравенства

$$(F_{\text{тр}})_{\text{max}} \geq mg$$

или

$$(F_{\text{тр}})_{\text{max}} = kN = \frac{kmv^2}{R-l} \geq mg,$$

k - коэффициент трения покоя. Из последнего неравенства получаем

$$v^2 \geq \frac{(R-l)g}{k}.$$

Минимальное значение скорости тогда есть

$$v_{\text{min}} = \sqrt{\frac{(R-l)g}{k}}$$

1.122. Пусть \mathbf{r} - радиус-вектор второй частицы относительно первой, так что $|\mathbf{r}| = l$ (рис.15). Тогда радиус-векторы и ускорения частиц связаны соотношением

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r} \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a},$$

где $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}$. Запишем уравнение движения для каждого тела.

$$m_1 \mathbf{a}_1 = -\mathbf{F}_H \quad m_2 \mathbf{a}_2 = m_2 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a} = \mathbf{F}_H,$$

где \mathbf{F}_H - сила натяжения нити. Используя первое уравнение, получим

$$\mathbf{F}_H = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{a}.$$

Если первая частица покоится, то вторая относительно нее движется в данный момент по окружности с радиусом l . Тогда $a = |\mathbf{a}| = v^2/l$.

1.124. В момент $t = 0$ импульс системы равен

$$\mathbf{p}_0 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2.$$

После начала движения для импульса имеем уравнение (внутренние силы - упругие силы пружинки не дают вклада, не вносят вклад в суммарную силу)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\mathbf{g},$$

где $m = m_1 + m_2$. Из последнего уравнения находим

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + m\mathbf{g}t.$$

Если \mathbf{v}_c и \mathbf{r}_c - скорость и радиус-вектор ц.м., то

$$\mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\mathbf{p}_0 + m\mathbf{g}t}{m},$$

где $M = 7,35 \cdot 10^{22}$ кг - масса луны, $R = 1,7 \cdot 10^6$ м - радиус Луны. Для Земли $v_1 \approx 8$ км/с, $v_2 \approx 11$ км/с.

1.247. Используем законы сохранения энергии и момента импульса. Если r есть наибольшее или наименьшее расстояние от солнца (см. рис. 23), а v скорость планеты в соответствующих точках, то

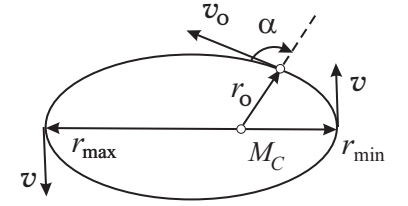


Рис. 23.

$$E = \frac{mv^2}{2} - G \frac{mM_C}{r} = \frac{mv_0^2}{2} - G \frac{mM_C}{r_0}$$

$$L = rv = r_0 v_0 \sin \alpha.$$

Выражая v из второго равенства и подставляя в первое, получим уравнение для определения r

$$\frac{\eta \sin^2 \alpha}{2} x^2 - x + \left(1 - \frac{\eta}{2}\right) = 0,$$

где

$$x = \frac{r_0}{r}, \quad \eta = \frac{r_0 v_0}{GM_C}.$$

Два решения этого квадратного уравнения дают наибольшее и наименьшее значения r .

1.239. Обычно эллиптические траектории планет очень близки к круговым с радиусом R , равным большой полуоси эллипса a

$$R = a = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Тогда период обращения вокруг солнца есть

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v}.$$

Скорость движения по круговой орбите v находим из второго закона Ньютона. Окончательно будем иметь

$$T = \pi \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{2\gamma M_c}}.$$

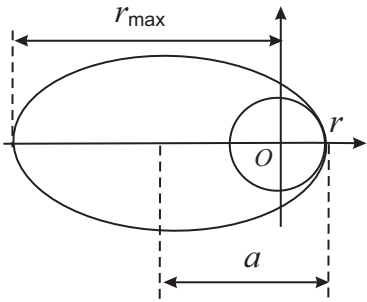


Рис. 21.

1.240. Исходим из третьего закона Кеплера

$$\frac{T_0^2}{(\eta T_0)^2} = \frac{r^3}{a^3},$$

где T_0 - период обращения по круговой орбите и a - полуось эллипса, равная $a = (r + r_{\max})/2$ (рис. 21). Подставляя это соотношение в первое равенство, найдем

$$r_{\max} = r(2\eta^{2/3} - 1).$$

1.242. Если T_0 - время обращения по эллиптической орбите, то время падения $\tau = T_0/2$ (рис. 22). Запишем третий закон Кеплера, считая, радиус Луны R известен

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{r^3}{\left(\frac{r+R}{2}\right)^3},$$

где \mathbf{i} , $-\mathbf{j}$ и \mathbf{n} - единичные орты в направлении движения. Умножим скалярно это равенство последовательно на \mathbf{i} и \mathbf{j} , получим

$$v_{10} = \eta v_2 \cos \alpha \quad v_1 = \eta v_2 \cos \beta,$$

где α и β - углы наклона вектора \mathbf{n} соответственно к осям x и y . Учитывая, что $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$, получим

$$v_{10} = \sqrt{2kg(\eta^2 s_2 - s_1)}.$$

1.146. Если $\Delta \mathbf{r}$ элементарное перемещение вдоль траектории, то работа силы по перемещению частицы из точки 1 в точку 2 равно

$$A = \Sigma \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \Sigma \Delta \mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -17.$$

1.147. Если повернуть рисунок задачи на 90° по часовой стрелке, то задача будет аналогична задаче о движении муфты в поле силы тяжести. Пусть ось y проходит через точку 2, ось x - через точку 1, начало координат в центре окружности. В данном случае потенциальная энергия муфты есть $U = -Fy$ (в поле силы тяжести $U = -mgy$). Искомый ответ получается после использования закона сохранения энергии, взятой в точках 1 и 2.

1.148. Найдем силу, действующую на локомотив вдоль пути s

$$F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{ds} \dot{s} = m \frac{dv}{ds} v = \frac{m\alpha^2}{2},$$

Так как сила постоянна, то работа равна $A = Fs$. Находя пройденный путь получим

$$A = \frac{m\alpha^4 t}{8}.$$

1.149. Модуль силы равен

$$F = m\sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

Учитывая, что $v^2 = 2K/m = 2\alpha s^2/m$, можно найдем нормальное ускорение a_n . Касательное ускорение a_τ находим из равенства

$$\frac{dv^2}{dt} = 2v\dot{v} = 2va_\tau = \frac{4\alpha s\dot{s}}{m} = \frac{4\alpha sv}{m}.$$

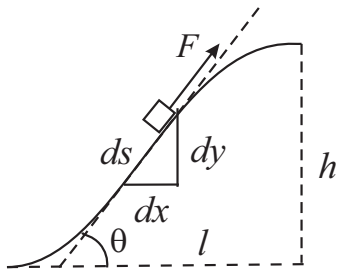


Рис. 18.

можно записать

$$-\frac{mv_1^2}{2} = -\int_0^x F(l)dl.$$

Подставляя в это равенство $v = p/m = x/\alpha t$ и дифференцируя по x , получим

$$F(x) = \frac{x}{m\alpha^2}.$$

1.151. Слово "медленно" в данной задаче означает, что тело движется без ускорения. Тогда, если θ - угол между направлением силы (см. 18) и горизонталью (основанием горки), то

$$F = kmg \cos \theta + mg \sin \theta.$$

На каждом малом перемещении ds вдоль горки можно считать, что тело движется по наклонной плоскости, составляющей с горизонталью угол θ . Найдем элементарную работу

1.150. Пусть частица проникает на глубину x и останавливается. Тогда

$$T_2 - T_1 = A_{12}$$

где T - кинетическая энергия, а A_{12} - работа тормозящей силы. Так как $T_2 = 0$, то для модуля тормозящей силы $F(x)$ мож-

1.4. Всемирное тяготение

1.237. Пусть m и M_c - массы планеты и Солнца ($M_c = 1,97 \cdot 10^{30}$ кг). На планету со стороны Солнца действует сила

$$F = \gamma \frac{mM_c}{R^2},$$

где R - радиус орбиты, $\gamma = 6,6 \cdot 10^{-11}$ - гравитационная постоянная. Из второго закона Ньютона

$$\frac{mv^2}{R} = \gamma \frac{mM_c}{R^2}$$

найдем R , позволяющий найти угловую скорость кругового движения.

1.238. а) Согласно третьему закону Кеплера квадраты периодов обращения планет вокруг солнца относятся как кубы линейных размеров их орбит

$$\frac{T_{Ю}^2}{T_3^2} = \frac{R_{Ю}^3}{R_3^3},$$

где $T_{Ю} = 12$ лет, $T_3 = 1$ год - периоды обращения Юпитера и Земли вокруг Солнца, а $R_{Ю}$, R_3 - радиусы орбит. Из этого равенства находится отношение $R_{Ю}/R_3 = \sqrt[3]{144}$;

б) Для нахождения скорости Юпитера используем второй закон Ньютона и находим $v^2 = \gamma M_c/R_{Ю}$. Выражая радиус из равенства $v = \omega R = 2\pi R/T$, получим

$$v = \left(\gamma \frac{2\pi}{T_{Ю}} M_c \right)^{1/3}.$$

Ускорение находится из равенства

$$a = \frac{v^2}{R}.$$

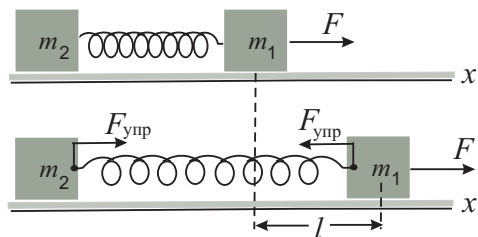


Рис. 19.

силы, направленных в противоположную сторону. При больших значениях F брусок будет продолжать движение вправо. При меньших - пружина не достигнет необходимого удлинения l . Для нахождения F используем равенство

$$A = \Delta T = 0,$$

где A - работа результирующей силы, $F_{\text{рез}} = F - \kappa x - km_1g$, перемещающей первый брусок вдоль оси x . Вычисляя работу, получим

$$Fl - \frac{\kappa l^2}{2} - km_1gl = 0$$

или

$$F - \frac{\kappa l}{2} - km_1g = 0. \quad (2)$$

Используя (1) и (2), найдем $F = kg(m_1 + m_2/2)$.

1.165. Найдем минимальную растягивающую силу, необходимую, чтобы суммарное растяжение пружин было Δl . Пусть левый конец первой пружины закреплен, а к правому концу второй пружины приложена растягивающая сила (рис. 20). После растяжения пружин на нужное удлинение система придет в равновесие. Обозначим растяжение первой пружины через Δl_1 , а второй через Δl_2 , причем должно выполняться

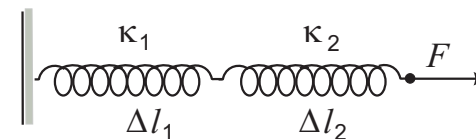


Рис. 20.

равенство

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l.$$

Условие равновесия предполагает, что силы с которыми пружины действуют друг на друга равны

$$\kappa_1 \Delta l_1 = \kappa_2 \Delta l_2.$$

Решая два уравнения совместно, можно найти Δl_1 и Δl_2 . Далее используем соотношение для приращения полной энергии

$$\Delta E = \Delta T + \Delta U = A_{\text{вн}},$$

где ΔT - приращение кинетической энергии, ΔU - приращение потенциальной энергии, а $A_{\text{вн}}$ - работа внешней силы. Так как $\Delta T = 0$, а потенциальная энергия деформированной пружины равна $\kappa_i \Delta l_i^2 / 2$, то

$$A_{\text{вн}} = \frac{\kappa_1 \kappa_2 \Delta l}{2(\kappa_1 + \kappa_2)}.$$

1.215. Момент силы равен равен

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= [\mathbf{r}, \mathbf{F}] = [a\mathbf{i} + b\mathbf{j}, A\mathbf{i} + B\mathbf{j}] \\ &= (aB - bA)[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = (aB - bA)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Если φ угол между радиусом-вектором и силой, плечо равно

$$l = |\mathbf{r}| \sin \varphi.$$

Синус можно найти, если учесть, что

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}}{|\mathbf{r}| |\mathbf{F}|}$$

1.217. Пусть движение происходит в плоскости (xy) , тогда момент импульса равен

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= m[\mathbf{r}, \mathbf{v}] = m[x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}] = \\ &= m(xv_y - yv_x)[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = m(xv_y - yv_x)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Подставляя в это равенство координаты и проекции скорости тела, брошенного под углом α к горизонту, получим

$$\mathbf{M} = -\frac{mgv_0 t^2}{2} \cos \alpha \mathbf{k} \quad M = |\mathbf{M}| = \frac{mgv_0 t^2}{2} \cos \alpha.$$

В наивысшей точке $t = v_0 \sin \alpha / g$, откуда

$$M = \frac{\sqrt{2}mv_0^3}{8g}$$

1.219. Момент импульса направлен за чертеж, перпендикулярно плоскости чертежа. Поэтому модуль момента относительно оси равен модулю момента относительно точки O , $M = lmv$, где l - плечо момента, равное перпендикуляру, опущенному из O на наклонную плоскость, а v скорость шайбы. Подставляя l и v . получим

$$M = \frac{1}{2}mght \sin 2\alpha.$$

на этом перемещении

$$dA = F ds = kmg ds \cos \theta + mg ds \sin \theta.$$

Так как

$$ds \cos \theta = dx \quad ds \sin \theta = dy$$

(см. рис. 18), то после суммирования элементарных работ вдоль движения тела получим искомый ответ.

1.152. Брусок движется без ускорения, поэтому сила тяги равна

$$F = F_{\text{тр}} + mg \sin \alpha,$$

где $F_{\text{тр}}$ - модуль силы трения. Умножая это равенство на длину наклонной плоскости, найдем работу силы тяги.

$$A = -A_{\text{тр}} + mgh,$$

здесь $A_{\text{тр}} < 0$ - работа силы трения. Из этого равенства можно найти величину работы силы трения. При скатывании имеем для скорости в конечном положении

$$\frac{mv^2}{2} = A_{\text{тр}} + mgh,$$

откуда находим скорость.

1.155. Брусок m_2 придет в движение, если сила упругости растянутой пружины сравняется с максимальным значением силы трения покоя $F_{\text{уп}} = kmg$. Пусть это условие выполняется, если удлинение пружины равно l (рис. 19). Тогда

$$\kappa l = kmg, \quad (1)$$

где κ - коэффициент жесткости пружины. При минимальном значении внешней силы брусок m_1 переместившись на расстояние l , остановится. Действие внешней силы будет компенсировано суммарным действием силы трения и упругой

1.131. Пусть \mathbf{v}_{10} скорость 1-й частицы до столкновения, а \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 - скорости частиц непосредственно после столкновения. Обозначим через \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 скорости частиц в произвольный момент времени после столкновения.

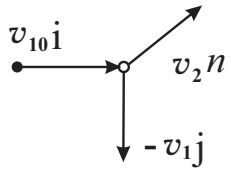


Рис. 17.

Рассмотрим бесконечный малый интервал времени, охватывающий момент столкновения ($t = 0$). В течение такого интервала силы трения не успевают изменить скорости и приближенно можно считать, что внешних сил нет и выполняется закон сохранения импульса

$$m_1\mathbf{v}_{10} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2. \quad (1)$$

Чтобы определить начальные скорости разлета \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 , рассмотрим движения частиц до их полной остановки. Для этого используем второй закон Ньютона. При прямолинейном движении, имеем

$$m_1 \frac{du_1}{dt} = -km_1g \quad m_2 \frac{du_2}{dt} = -km_2g.$$

Здесь имеет место равнозамедленное движение, при котором

$$u_1 = v_1 - kgt \quad u_2 = v_2 - kgt.$$

Откуда находим время до остановки каждой частицы, $u_1 = u_2 = 0$, и, соответственно, пройденный путь s_1 и s_2 . В результате найдем, что

$$v_1^2 = 2kgs_1 \quad v_2^2 = 2kgs_2.$$

Перепишем (1) в виде (см. 17)

$$-m_1v_1\mathbf{j} + m_2v_2\mathbf{n} = m_1v_{10}\mathbf{i},$$

где $(r+R)/2$ - полуось эллипса (см.рис.22) и T - период обращения по круговой орбите. Из последнего равенства можно найти T_0 . Период T находится из равенства

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T},$$

а скорость движения по круговой орбите v может быть найдена из второго закона Ньютона

$$\frac{v^2}{r} = \gamma \frac{m_{\text{л}}}{r^2},$$

где $m_{\text{л}}$ - масса луны.

1.243. Найдем период T_R движения планеты солнечной системы по круговой орбите радиуса R , исходя из соотношения $v = \omega R = 2\pi R/T_R$ и второго закона Ньютона

$$T_R = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{GM_c}},$$

где M_c - масса Солнца. Аналогично записывается период T_r движения планеты в модели солнечной системы с радиусом орбиты $r = R/\eta$. Рассматривая форму Солнца как шар, можно выразить массу Солнца m_c в модели солнечной системы через массу M_c . Далее следует рассмотреть отношение T_r/T_R .

1.255. Искомые ускорения есть

$$\begin{aligned} a_1 &= g = \frac{GM_3}{R_3^2} \\ a_2 &= \omega^2 R_3 = \frac{2\pi}{T} \\ a_3 &= \frac{GM_c}{r^2}, \end{aligned}$$

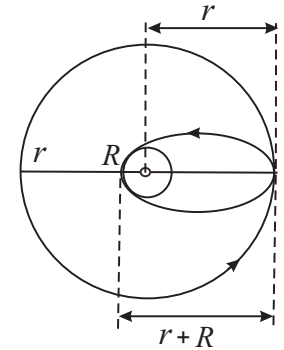


Рис. 22.

где $M_3 = 5,98 \cdot 10^{24}$ кг - масса Земли, $R_3 = 6,37 \cdot 10^6$ - радиус Земли, $T = 86400$ с - продолжительность суток, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ - гравитационная постоянная, $M_c = 1,9 \cdot 10^{30}$ кг - масса Солнца, $r = 1,5 \cdot 10^{11}$ м - расстояния между Землей и солнцем. Подставляя численные данные, вычислить¹ $a_1 : a_2 : a_3$.

1.256. 1) Условие уменьшения ускорения свободного падения есть

$$g_0 - g_h = \eta g_0 \quad \text{или} \quad \eta = \frac{g_0 - g_h}{g_0},$$

где $g_0 = GM/R$, $g_h = GM/(R+h)$ - ускорения на поверхности земли и на высоте h и M - масса Земли, а R ее радиус. Подставляя выражения для ускорений в равенство для η , можно получить

$$2Rh = \eta R^2 = 2\eta hR + h^2(\eta^2 - 1).$$

Пренебрегая слагаемым $(h/R)^2$ по сравнению с h/R , получим при $\eta = 0,01$

$$h = \frac{\eta R}{2(1 - \eta)} = 32 \cdot 10^3 \text{ м};$$

2) В данном случае

$$\frac{g_0}{g_h} = n.$$

Подставляя в это равенство выражения для g_0 и g_h , получим уравнение для h , положительный корень которого есть

$$h = R(\sqrt{n} - 1) = R(\sqrt{2} - 1) \approx 2640 \text{ км}.$$

1.267. Первая² и вторая³ космические скорости равны

$$v_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad v_2 = \sqrt{2}v_1,$$

¹Если $x/y = a/b = 1/(b/a)$, а $y/z = b/d = (b/a)/(d/a)$, то можно записать $x : y : z = 1 : b/a : d/a$.

²скорость необходимая для движения по круговой орбите в поле планеты

³начальная скорость для преодоления тяготения планеты

откуда

$$\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_c(0) = \frac{\mathbf{p}_0 t}{m} + \frac{\mathbf{g} t^2}{2}.$$

1.125. (53) Записывая закон сохранения импульса системы и учитывая, что $m_2/m_1 = \eta$, найдем скорость составной частицы в виде

$$\mathbf{v} = \frac{2 + 4\eta}{1 + \eta} \mathbf{i} + \frac{3 - 5\eta}{1 + \eta} \mathbf{j}.$$

1.128. При движении по окружности на муфты действуют силы, направленные вдоль радиусов. Непосредственно до столкновения и сразу после столкновения можно считать, что муфты движутся вдоль общей касательной, вдоль которой силы отсутствуют (направлены по нормали) Тогда вдоль касательной будет выполняться закон сохранения импульса. Записывая закон сохранения импульса и выражая скорости муфт до и после столкновения через нормальные ускорения $v = \sqrt{a_n R}$, получим для нормального ускорения составной муфты

$$a = \frac{(m_1 \sqrt{a_1} - m_2 \sqrt{a_2})^2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

1.129. Пусть модули импульсов кусков равны $p_1 = p_2 = mv$, $p_3 = mv_3$, тогда модуль импульса тела есть $p_0 = 3mv_0$. Из рис. 16 следует, что модуль импульса третьего куска равен

$$p_3 = \sqrt{2m^2 v^2 + 9m^2 v_0^2}.$$

Откуда находим скорость $v_3 = p_3/m$.

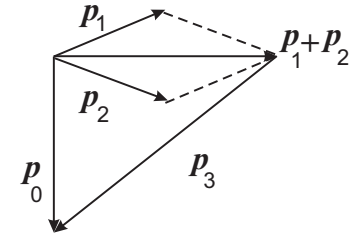


Рис. 16.

где T - натяжение нити. Определяя из этой системы a_1 и подставляя в выражение для a_c , получим

$$a_c = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} g$$

1.118. При равномерном вращении с постоянным углом θ все точки цепочки вращаются по окружностям перпендикулярным оси вращения и движения в вертикальном направлении нет. Такое же движение, т.е. движение по окружности в плоскости перпендикулярной оси вращения, совершает и центр инерции. Запишем уравнение движения для ц.и. учитывая что на цепочку действует сила натяжения \mathbf{T} и сила тяжести $m\mathbf{g}$

$$m\mathbf{a}_c = \mathbf{T} + m\mathbf{g}$$

Так как движения в вертикальном направлении отсутствует, то составляющая силы натяжения в вертикальном направлении уравновешивается силой тяжести. Поэтому при равномерном движении точки C по окружности будем иметь

$$\frac{mv_c^2}{\rho} = T \sin \theta \quad T \cos \theta = mg,$$

где ρ расстояние до оси вращения (центра окружности). Так как $v_c = \rho\omega$, то из этих равенств получаем

$$\rho = \frac{g \operatorname{tg} \theta}{\omega^2} \quad T = \frac{mg}{\cos \theta}.$$

1.120. При движении по круговой цилиндрической поверхности (параллельно основанию цилиндра) второй закон Ньютона для скорости ц.м., записывается в виде

$$\frac{mv^2}{R-l} = N,$$

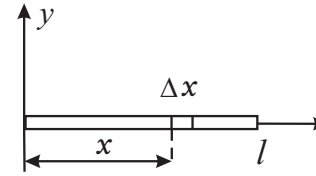


Рис. 24.

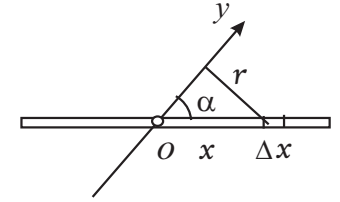


Рис. 25.

Решение этой системы уравнений дает искомые величины. **1.277.** а) Пусть масса элемента Δx есть Δm (см. рис. 24). Тогда момент инерции относительно оси y есть

$$I_y = \sum x^2 \Delta m.$$

Так как стержень однородный, то для плотности можно записать

$$\frac{m}{l} = \frac{\Delta m}{\Delta x},$$

откуда

$$\Delta m = \frac{m}{l} \Delta x.$$

Поэтому

$$I_y = \frac{m}{l} \sum x^2 \Delta x.$$

Устремляя $\Delta x \rightarrow 0$ и переходя от суммирования к интегрированию, получим

$$I_y = \frac{ml^2}{3};$$

б) В данном случае (рис. 25) расстояние от элемента Δx до оси y равно $r = x \sin \alpha$, откуда

$$I_y = \sum r^2 \Delta m \rightarrow \frac{m}{l} \sin^2 \alpha \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx.$$

1.281. Момент инерции равен

$$I_z = \sum \Delta m \rho^2,$$

где ρ - расстояние от элемента дуги Δs до оси z (см. рис. 26) и Δm - масса этого элемента, равная

$$\Delta m = \frac{m}{2\pi a} \Delta s = \frac{m}{2\pi} \Delta \varphi.$$

Используем это соотношение в выражении для момента инерции. Устремляя затем $\Delta \varphi \rightarrow 0$, получим, после перехода к интегрированию,

$$I_z = \frac{ma^2}{2\pi} \sum \cos^2 \varphi \Delta \varphi \rightarrow \frac{ma^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{ma^2}{2}.$$

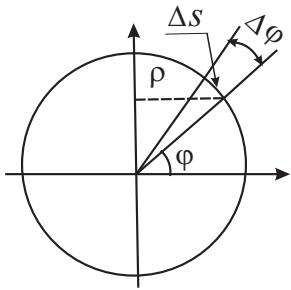


Рис. 26.

1.287.а) Пусть груз движется вертикально вниз. Если F - натяжение нити, $I = mR^2/2$ момент инерции цилиндра относительно своей оси, а ε - угловое ускорение цилиндра, то движение системы описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} ma &= mg - F \\ I\varepsilon &= RF \\ a &= R\varepsilon. \end{aligned}$$

Из решения этой системы найдем для углового ускорения

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{g}{R(1 + M/2m)},$$

только силой трения (других сил нет). Запишем второй закон Ньютона в радиальном направлении

$$\frac{mv^2}{r} = F = kN = mgk_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Из этого выражения можно найти максимум v или v^2 , который достигается при $r = R/2$:

$$v_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{gk_0 R}.$$

1.3. Законы сохранения

1.117. Пусть ось x направлена вертикально вниз. Если x_1 и x_2 координаты масс, то координата ц.и. есть

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Учитывая, что скорости частиц равны, но противоположно направлены, для ускорения ц.и. можно записать

$$a_c = \frac{(m_1 - m_2)a_1}{m_1 + m_2},$$

где a_1 - ускорение первого тела. Чтобы найти a_1 запишем уравнения движения

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 g - T \\ m_2 a_2 &= T - m_2 g, \end{aligned}$$

где N - реакция опоры. Учитывая, что $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v$ и $F_{\text{тр}} = \gamma x N$, получим

$$v \frac{dv}{dx} = g \sin \alpha - \gamma x g \cos \alpha.$$

Интегрируя это выражение

$$\int_0^v v dv = g \int_0^x (\sin \alpha - \gamma x \cos \alpha) dx,$$

найдем

$$\frac{v^2}{2} = g(x \sin \alpha - \gamma \frac{x^2}{2} \cos \alpha).$$

Пройденный путь можно найти из условия $v = 0$. Максимальная скорость определяется из экстремума v (или v^2).

1.90. Возьмем ось x в направлении постоянного вектора \mathbf{b} . Тело будет двигаться, когда $F \geq kN = kmg$. Начало движения произойдет в момент t_0 , когда $F = bt_0 = kmg$. Откуда

$$t_0 = kmg/b.$$

Записывая далее уравнение движения

$$m\ddot{x} = bt - kmg$$

и решая его, найдем путь x .

1.91. При решении задачи надо учесть, что весом тела называется сила \mathbf{P} , с которой тело действует на опору (или подвес). Если \mathbf{N} - реакция опоры, то $\mathbf{P} = -\mathbf{N}$. По величине вес равен модулю $N = |\mathbf{N}|$.

а) Найдем вес летчика в нижней части петли. При равномерном движении по окружности ускорение тела равно центростремительному ускорению $a_n = v^2/R$. Используя второй

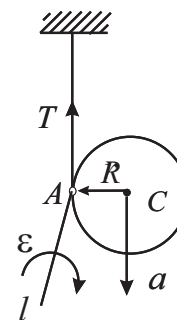


Рис. 27.

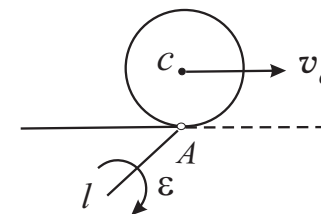


Рис. 28.

Из последнего равенства можно найти скорость центра инерции $v = at$ и угловую скорость $\omega = \epsilon t$, что позволяет вычислить кинетическую энергию

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{I}{2}\omega^2$$

1.320. а) Запишем уравнение для ц.м. и уравнение для момента импульса относительно ц.м. (рис. 27).

$$\begin{aligned} ma &= mg - T \\ I\epsilon &= TR, \end{aligned}$$

где T - сила натяжения нити, I - момент инерции цилиндра, ϵ - угловое ускорение ц.м. Точка A (см. рис. 27) цилиндра в данный момент покоится и цилиндр совершает чистое вращение вокруг оси l , проходящей через точку A перпендикулярно плоскости рисунка. Это аналогично движению цилиндра по неподвижной поверхности, где точка A - точка соприкосновения цилиндра и плоскости и цилиндр совершает чистое вращение вокруг оси l (рис. 28). Поэтому точка C в данный

момент движется по окружности радиуса R и $a = R\varepsilon$. Решая совместно последнее уравнение с первыми двумя, получим

$$\varepsilon = \frac{2g}{3R};$$

б) Мощность равна $P = mgv$.

1.6. Колебания

3.1. б) Требуется построить графики зависимости a_x и v_x от смещения x . Для этого покажите, что имеют место равенства

$$a_x = -\omega^2 x$$

$$\frac{v_x^2}{\omega^2 A^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1.$$

3.2. а) Представить координату частицы в виде

$$x - \frac{A}{2} = -\frac{A}{2} \sin 2\omega t.$$

Отсюда видно, что частица совершает колебания около положения равновесия $A/2$. Последнее равенство позволяет определить амплитуду колебаний и период.

б) Показать, что имеет место равенство

$$\frac{v_x^2}{\omega^2 A^2} + \frac{(x - A/2)^2}{(A/2)^2} = 1.$$

3.3. Представить смещение x в виде

$$x = a \cos(\omega t + \alpha),$$

С учетом начального значения для скорости находим

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{kt}{m}.$$

Откуда для времени движения пули получим

$$t = \frac{m}{k} \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} \right).$$

Чтобы найти коэффициент k , перепишем уравнение движения в виде

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = m \frac{dv}{ds} v = -kv^2,$$

где s - пройденный путь. Откуда

$$m \frac{dv}{ds} = -kv.$$

Поступая как и выше, и учитывая, что пройденный пулей путь равен h , получим

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{kh}{m}.$$

Находя из этого выражения k и подставляя его в выражение для времени полета t , получим

$$t = h(v_0 - v)/(v_0 v \ln v_0/v).$$

1.89. Пусть ось x прямоугольной системы координат направлена вдоль наклонной плоскости в сторону спуска. Тогда проектируя уравнение движения на оси координат, будем иметь

$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}$$

$$N = mg \cos \alpha,$$

ла. Отсюда следует, что $F_{\text{тр}i} \leq kN_i$ и

$$\begin{aligned} F_{\text{н}} - ma &\leq kN_1 = kmg \\ mg - F_{\text{н}} &\leq kN_2 = kma. \end{aligned}$$

Откуда получаем

$$a \geq \frac{1-k}{1+k}g.$$

и искомое значение есть

$$a_{\text{min}} = \frac{1-k}{1+k}g.$$

1.78. Если брусок неподвижен относительно призмы, то в системе отсчета связанной с неподвижной поверхностью на него действует сила ma , направленная влево. Проектируя второй закон Ньютона на наклонную плоскость и на перпендикулярное направление, найдем реакцию призмы на нормальное давление N и силу трения покоя $F_{\text{тр}}$. Движение бруска относительно призмы будет отсутствовать, если сила трения покоя не превышает своего максимального значения kN . Из этого условия находим

$$a_{\text{max}} = \frac{1+k \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - k}.$$

1.80. Используя условие, что в момент t_0 отрыва тела от плоскости реакция плоскости на нормальное давление равна нулю, $N = 0$, получим $t_0 = mg/k \sin \alpha$. Скорость тела в произвольный момент $t \leq t_0$ можно найти из уравнения движения

$$m\ddot{x} = kt \cos \alpha,$$

где x координата тела (материальной точки) вдоль направления движения, при условии, что $\dot{x}(0) = 0$. Подставляя в

При упругом отражении от стенки шарик меняет свою скорость на противоположную и опять движется как свободный маятник. Время t_{AB} , которое затрачивает свободный маятник при движении от A к B (см. рис. 30) совпадает со временем его перемещения¹ из B к A . Отсюда следует, что период маятника со стенкой равен

$$T = 2t_{AB}.$$

Время движения t_{AB} находится из уравнения

$$-\alpha = \beta \cos \omega t_{AB}.$$

При решении этого уравнения использовать равенства

$$\begin{aligned} \arccos(-a) &= \pi - \arccos(a) \\ \arccos(a) + \arcsin(a) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

3.25. Пусть x - координата тела, отсчитываемая вдоль оси пружины (ось x направлена вправо) и недеформированному положению пружин соответствует значение $x = 0$. Пусть тело переместилось, например, вправо. Тогда на него действует со стороны левой пружины сила упругости F_1 , направленная влево и стремящаяся вернуть тело в положение равновесия. По закону Гука

$$F_1 = -\varkappa \delta l_1 = -\varkappa(l_1 - l_0) = -\varkappa x,$$

¹При движении свободного маятника в прямом и обратном направлении, в одной и той же точке траектории его скорости отличаются только направлением. Это следует из закона сохранения энергии. Поэтому время затрачиваемое на движение в разных направлениях вдоль одного и того же участка траектории будет одинаковым.

где $\delta l_1 = l_1 - l_0 = x$ - удлинение левой пружин. Со стороны правой сжатой пружины действует сила упругости¹,

$$F_2 = \kappa \delta l_2 = \kappa(l_2 - l_0) = -\kappa x,$$

где $\delta l_2 = (l_2 - l_0) = -x$ - удлинение второй пружины, также стремящаяся вернуть тело в положение равновесия. Записывая далее уравнение движения, можно найти период.

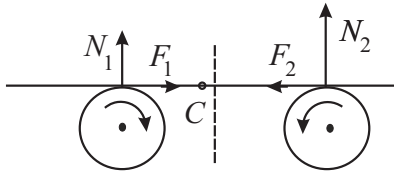


Рис. 31.

3.27. Пусть, например, центр масс стержня сместился влево на величину x относительно середины расстояния между осями дисков (ось x направлена вправо). Со стороны дисков на стержень действуют силы

реакции на нормальное давление N_1, N_2 и силы трения $F_1 = kN_1$ и $F_2 = -kN_2$ (см. рис. 31).

Запишем уравнение движения ц.м. стержня, условие отсутствия вращения относительно оси, проходящей через центр масс, перпендикулярно плоскости чертежа (равенство нулю суммарного момента сил относительно этой оси) и условие отсутствия движения в вертикальном направлении

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= kN_2 - kN_1 \\ (l/2 - x)N_1 &= (l/2 + x)N_2 \\ mg &= N_1 + N_2. \end{aligned}$$

Уравнение для смещения ц.м. можно привести к виду уравнения гармонических колебаний

$$m\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

если исключить реакции дисков. Откуда можно найти период $T = 2\pi/\omega$.

¹Если правый конец пружины закреплен, то легко убедиться, что правильное выражение для силы упругости, действующей на левый конец, равно $F = \kappa \delta l$ (без знака минус), где δl - удлинение пружины, которое может быть как положительным, так и отрицательным

a , то в направлении его движения на тело 2 действует сила $N_2 = ma$, представляющая реакцию боковую поверхность бруска на нормальное давление тела. Если k - коэффициент трения покоя, то при достаточно большом ускорении a максимальное значение силы трения покоя, равное $kN_2 = kma$, будет достаточно большим, чтобы тело 2 (и следовательно тело 1) оставалось бы неподвижным относительно бруска. Поэтому имеет смысл говорить о минимальном ускорении при котором тела не движутся.

Рассмотрим сначала случай, когда тела перемещаются относительно бруска. Пусть брусок перемещается с ускорением a , а тело 1 движется в противоположную сторону с ускорением a' по поверхности бруска. Записывая второй закон Ньютона для каждого тела относительно неподвижной поверхности, получим систему уравнений движения

$$\begin{aligned} m(a - a') &= F_n - F_{\text{тр}1} \\ mg &= N_1 \\ ma' &= mg - F_n - F_{\text{тр}2} \\ ma &= N_2, \end{aligned}$$

где $F_{\text{тр}1,2}$ - силы трения, а $N_{1,2}$ - реакции опоры, действующие на тела.

Если тела неподвижны, то $a' = 0$ и

$$\begin{aligned} F_n - ma &= F_{\text{тр}1} \\ mg - F_n &= F_{\text{тр}2}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы движения не происходило сила, действующая на тело, не должна превышать максимального значения силы трения покоя, равного kN , где k - коэффициент трения покоя. Достижение этого значения приведет к движению те-

против движения. Совместное решение двух получившихся уравнений дает искомую величину.

1.71. При изменении угла α длина наклонной плоскости S будет изменяться. Для ускорения a пройденный вдоль наклонной плоскости путь равен

$$S = \frac{at^2}{2},$$

где t - время движения. Откуда

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2L}{a \cos \alpha}}$$

и $L = \text{const}$ - длина катета, лежащего в основании наклонной плоскости. Определяя ускорение из второго закона Ньютона, получим для t

$$t(\alpha) = \frac{\sqrt{2L}}{\sqrt{g \cos \alpha (\sin \alpha - k \cos \alpha)}}.$$

Искомый угол находится из условия экстремума $t'(\alpha) = 0$, которое сводится к уравнению $\text{tg } 2\alpha = -1/k$.

1.73. Используя второй закон Ньютона, и учитывая, что ускорение бруска равно нулю, получим для силы натяжения нити F :

$$F = \frac{kmg}{\cos \alpha + k \sin \alpha}.$$

Это выражение принимает минимальное значение, когда знаменатель максимален. Определяя максимум функции, найдем, что угол α удовлетворяет условию

$$\text{tg } \alpha = k.$$

центру кривизны. Эта сила пропорционально разности давлений. Поэтому чем дальше слой жидкости от центра кривизны, тем большим давлением он обладает. Таким образом, давление $p_1 > p_2$. Для рассмотрения соотношения между скоростями, нужно рассмотреть уравнение Бернулли для линий тока, проходящих через точки 1 и 2

$$\begin{aligned} \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 &= \text{const} \\ \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 &= \text{const}. \end{aligned}$$

Константы в этих равенствах одинаковые, так как вдоль верхнего сечения скорости, высоты и давления совпадают. Пренебрегая разностью высот в точках 1 и 2, из этих равенств можно найти соотношение между скоростями.

1.368. Искомый объем равен

$$Q = v_1 S_1,$$

где v_1 - скорость в сечении S_1 . Поэтому достаточно найти v_1 . Из условия неразрывности (несжимаемости) жидкости,

$$v_1 S_1 = v_2 S_2,$$

где v_2 - скорость в сечении S_2 , следует, что при $S_1 < S_2$, $v_1 > v_2$. А из уравнения Бернулли на линии тока

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}$$

следует, что $p_1 < p_2$. Поэтому высота столба жидкости будет больше во второй трубке. Так как давление в трубках меняется по закону

$$p_{1,2} = p_0 + \rho g h_{1,2},$$

где p_0 - атмосферное давление, то используя это равенство, уравнение Бернулли и условие неразрывности, можно найти скорость v_1 и искомую величину $Q = v_1 S_1$.

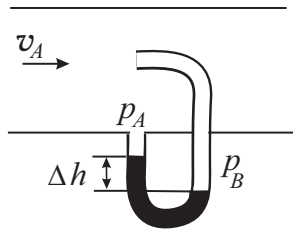


Рис. 32.

Для газа силой тяжести можно пренебречь, поэтому давление газа в трубке, выходящей навстречу потоку, везде постоянно. Обозначим его как p_B . Давление в трубке, находящейся в нижней части трубопровода, такое же как и в потоке и равно p_A .

На линии тока упирающейся в трубку, уравнение Бернулли имеет вид

$$p_A + \frac{\rho v_A^2}{2} = p_B \quad (v_B = 0).$$

Условие равновесия жидкости в трубке имеет вид

$$p_A + \rho_0 g \Delta h = p_B.$$

Из этих равенств может быть найдено v_A и далее $Q = v_A S$.

1.372. Если элемент жидкости вылетает из отверстия со скоростью v , то его дальнейшее движение аналогично движению материальной точки, брошенной на высоте h_0 с начальной скоростью $v_{0x} = v$ параллельной оси x . Пройденное расстояние вдоль оси x равно

$$l = v \sqrt{\frac{2h_0}{g}}.$$

1.369. Вне трубки скорость и давление газа во всех точках трубопровода одинаковы. Пусть давление и скорость в трубопроводе равны v_A и p_A (рис. 32). Искомый объем равен $Q = v_A S$. Газ в трубке находится в равновесии с жидкостью.

Для газа силой тяжести можно пренебречь, поэтому давление газа в трубке, выходящей навстречу потоку, везде постоянно. Обозначим его как p_B . Давление в трубке, находящейся в нижней части трубопровода, такое же как и в потоке и равно p_A .

1.2. Динамика

1.59. Из второго закона Ньютон, $m\ddot{x} = F$, получим $F = m(2\alpha - 6\beta t)$. Искомые величины можно найти, определяя моменты времени соответствующие точке поворота, в которой $\dot{x} = 0$, и нахождению частицы в точке $x = 0$.

1.60. Для решения задачи достаточно записать закон Ньютона $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ вдоль координатных осей. Так как радиус вектор частицы равен $\mathbf{r} = (x, y) = (A \sin \omega t, B \cos \omega t)$, то $\mathbf{F} = -\omega^2 \mathbf{r}$.

1.62. Пусть R - подъемная сила. Записывая второй закон Ньютона для массы m , а затем для массы $m - m_6$, где m_6 - масса балласта, получим из этих соотношений $m_6 = 2ma / (a + g)$.

1.63. Если F_0 сила натяжения нити между массами m_0 и m_1 , а F - между массами m_1 и m_2 , то

$$\begin{aligned} m_0 a &= m_0 g - F_0 \\ m_1 a &= F_0 - k m_1 g - F \\ m_2 a &= F - k m_2 g. \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно a , F и F_0 , получаем искомые величины.

1.67. Отношения масс случае (а) можно найти из условия, что результирующая сила, F_1 , действующая на массу m_1 , должна быть направлена к вершине наклонной плоскости, а результирующая сила F_2 , действующая на массу m_2 , - вертикально вниз вдоль катета треугольника. В случае (б) направления сил противоположны.

1.68. Для решения задачи достаточно записать второй закон Ньютона для первого тела вдоль наклонной плоскости, а для второго - вдоль катета и учесть, что сила трения равна $F_{\text{тр}} = kN$, где N - реакция на нормальное давление, и направлена

1.44. Полное ускорение точки равно $a = \sqrt{\dot{v}^2 + (v^2/R)^2}$. Определяя $v = R\dot{\varphi} = R2\beta t$ и \dot{v} , получим $a = (v/t)\sqrt{1 + 4\beta^2 t^4}$.

1.45.(21) Пусть некоторая точка A лежит в концевой части снаряда на его поверхности и ее координата вдоль оси ствола в произвольный момент времени есть x . Если $\varepsilon = \text{const}$ угловое ускорение и $\omega = \varepsilon t$ угловая скорость, то угол поворота снаряда есть

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\omega t}{2}.$$

Пусть за время τ точка A пройдет расстояние l вдоль ствола и совершит $n = 2$ оборота вокруг оси ствола. Тогда при $t = \tau$ из предыдущего равенства получим

$$\omega = \frac{4\pi n}{\tau}.$$

Чтобы найти время движения τ , достаточно воспользоваться равноускоренным законом прямолинейного движения $x = at^2/2$, связью ускорения a со скоростью v и условием того, что при $t = \tau$ $x = l$. В результате получим $\tau = 2l/v$ и $\omega = 2\pi nv/l$.

1.47. Тело остановится, когда $\omega = \dot{\varphi} = 0$. Откуда поучаем время остановки $t_0 = \sqrt{a/3b}$. Средние угловая скорость $\langle \omega \rangle$ и ускорение $\langle \beta \rangle$ определяются как

$$\langle \omega \rangle = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \dot{\varphi} dt = \frac{2a}{3} \quad \langle \beta \rangle = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} \ddot{\varphi} dt = -\sqrt{3ab}.$$

1.48. Точка движется по окружности, лежащей в плоскости перпендикулярной оси вращения. Величина угловой скорости находится из равенства $\dot{\omega} = \beta = at$. Из рис. 12 видно, что $\text{tg } \varphi = a_n/a_\tau$. Если $v = \omega r$ - линейная скорость точки, где r - радиус окружности, то $a_\tau = \dot{v}$. Нормальное ускорение

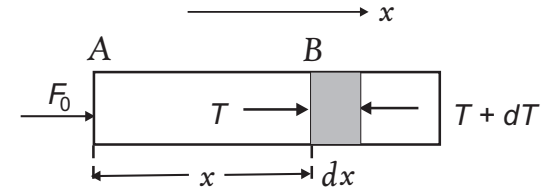


Рис. 33.

где m - масса бруска, а l - его деформированная длина. Результирующая сила, действующая на часть AB бруска и равная¹ $F_0 - T(x)$, представляет собой сумму элементарных сил dT

$$F_0 - T(x) = \int_0^x dT = \int_0^x \frac{F_0}{l} dx = \frac{F_0}{l} x,$$

откуда сила сжатия в сечении B есть

$$T(x) = F_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right)$$

Найдем удлинение, которое испытывает произвольный элемент бруска dx при деформации, используя закон Гука

$$\Delta(dx) = -\frac{T(x)}{ES} dx.$$

При малых деформациях можно пренебречь добавкой ΔT и считать, что элемент сжимается силами T , действующими на его торцах. Чтобы найти суммарное удлинение нужно просуммировать удлинение каждого малого элемента $\Delta(dx)$. В результате для удлинения всего бруска получим

$$-\Delta l = \int_0^x \frac{T(x)}{ES} dx = \frac{F_0 l}{2ES}$$

¹Сила T действует на элемент dx , на часть AB действует сила $-T$

и относительное удлинение есть

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{F_0}{2ES}$$

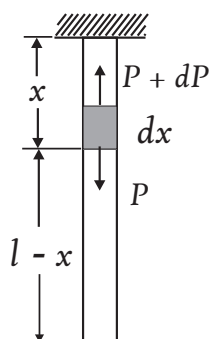


Рис. 34.

по закону Гука удлинение элемента вдоль его оси есть

$$\Delta(dx) = \frac{P}{SE}dx = \frac{\rho g}{E}(l-x)dx.$$

Суммируя все удлинения будем иметь для удлинения всего стержня

$$\Delta l = \int_0^l \frac{\rho g}{E}(l-x)dx = \frac{\rho g l^2}{2E}.$$

б) Относительное удлинение объема стержня есть

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

где

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{\Delta l}{l} \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_y} \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta l_z}{l_z}$$

1.355. а) Рассмотрим элемент стержня dx (рис. 34). Со стороны нижней части на этот элемент действует сила тяжести $P(x) = \rho g(l-x)S$, где ρ - плотность, S - площадь поперечного сечения стержня. Со сторон верхней части на этот элемент действует сила $P + dP = \rho g(l-x+dx)S$. При вычислении удлинения малого элемента длины можно пренебречь добавкой dP и считать, что на боковые грани элемента действуют растягивающие силы $P(x)$. Тогда по закону

1.42. а) Так как величина скорости постоянна, то $a_\tau = \dot{v} = 0$. Поэтому полное ускорение совпадает с нормальным, $a = a_n$ (рис. 10). Проекции скорости частицы есть $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y} = 2\alpha x \dot{x}$ и соответственно ускорения равны $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y} = 2\alpha \dot{x}^2 + 2\alpha x \ddot{x}$.

В точке $x = 0$ скорость направлена вдоль оси x (касательно к графику траектории), $v_x = v$, $v_y = 0$. Для ускорений будем иметь $a_x = a_\tau = 0$, $a_y = 2\alpha v^2$. Так как $a_y = a_n = v^2/R$, где R - радиус кривизны, то из последнего равенства получаем $R = 1/2\alpha$.

б) В точке $x = 0$ скорость направлена вдоль оси x , по касательной к графику (см. рис. 11) и ее проекции есть $v_x = \dot{x} = \pm v$, $v_y = \dot{y} = 0$, для ускорений имеем $a_x = a_\tau = 0$, $a_y = a_n = a = \ddot{y}$.

Чтобы найти проекцию ускорения $\ddot{y} = a_n$, продифференцируем уравнение эллипса $x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 = 1$ два раза по времени. После первого дифференцирования получим $\dot{y} = -(\beta/\alpha)^2(x/y)\dot{x}$. После второго, в точке $x = 0$,

$$a = \ddot{y} = \frac{\beta v^2}{\alpha^2}.$$

Так как $\ddot{y} = a_n$, то $R = \alpha^2/\beta$.

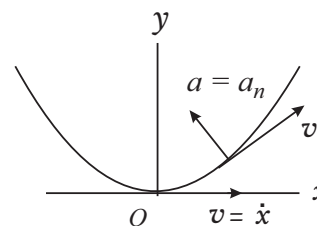


Рис. 10.

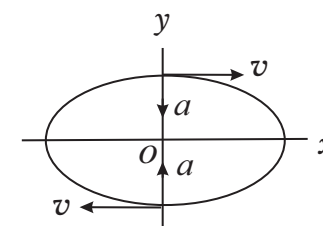


Рис. 11.

- парабола.

1.29. а) Исходя из определения радиус кривизны в начале координат есть

$$\rho_0 = \frac{v_0^2}{a_n} = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha},$$

где v_0 - начальная скорость и α - угол между начальной скоростью и горизонтальной прямой (см. рис. 6). Так скорость в точке максимального подъема равна $v_0 \cos \alpha$, а нормальное ускорение $a_n = g$, то радиус кривизны в этой точке есть $\rho_M = v_0^2 \cos^2 \alpha / g$. Тогда из условия $\rho_0 = \eta \rho_M$ получаем $\cos^3 \alpha = \eta^{-1}$. Откуда $\alpha = \pi/3$; б) Радиус кривизны в точке M есть $\rho_M = h = v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g$ (см задачу 1.28). Тогда

$$\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

или

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}.$$

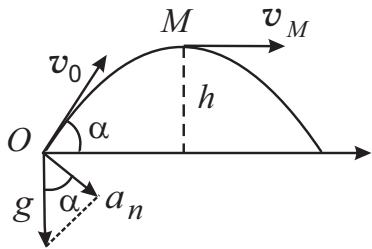


Рис. 6.

можно выбрать систему координат как показано на рис. 7. Тогда, в силу равенства при упругом падении угла падения и угла отражения, скорость отражения будет составлять угол α с осью y . Далее задача решается аналогично задаче 1.28, за исключением того, что сила, действующая на шарик, направлена под углом α к вертикали (см. рис. 8).

1.30. Будем отсчитывать потенциальную энергию от точки O (см. рис. 7). Тогда из закона сохранения энергии следует, что шарик упадет в точку O со скоростью $v_0 = \sqrt{2gh}$. При упругом падении с такой же по величине скоростью он отскочит от плоскости. Удобно

1.397. Пусть второй катет треугольника есть b и прилежащий к катету a угол есть α , тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Соответственно для наблюдателя в системе K'

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{b}{a'}.$$

Используя связь между собственной длиной катета a и его длиной a' в движущейся системе отсчета, можно найти тангенс угла α' .

Длину гипотенузы в K' можно найти из равенства

$$l' = \frac{a'}{\cos \alpha'}.$$

1.398. Собственная длина l_0 стержня (в K' - системе) равна

$$l_0 = \sqrt{a'^2 + b'^2},$$

где a' , b' проекции l_0 на оси координат и ось x' направлена вдоль направления движения.

Если a и b соответственно проекции стержня в K системе, то

$$a = a' \sqrt{1 - \beta^2} \quad b = b'.$$

Учитывая, что $a = l \cos \theta$, $b = l \sin \theta$, из последних равенств можно найти a' , b' , а затем l_0 .

1.399. Пусть метки расположены в K -системе вдоль оси x . Найдем скорость и длину стержня в K -системе. Скорость равна

$$v = \frac{\Delta x}{t_2 - t_1}.$$

Длина стержня равна

$$l = v(t_3 - t_2).$$

Откуда можно найти собственную длину стержня

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

1.400. Если t_0 - собственное время (в K' - системе), а t время в системе K , то

$$t_0 = t\sqrt{1 - v^2/c^2} = t - \Delta t.$$

Решая это уравнение, можно найти искомую скорость.

1.401. В K - системе длина стержня равна $l = vt$ (в течение интервала Δt левый конец стержня пройдет расстояние до метки, равное длине стержня l .)

В K' - системе собственная длина стержня равна $l_0 = v\Delta t_0$ (в течение промежутка Δt_0 метка пройдет расстояние l_0 со скоростью v). Так как

$$l = l_0\sqrt{1 - \beta^2},$$

то подставляя l и l_0 , получим уравнение для определения v .

1.24. а) Чтобы найти траекторию движения, $y = y(x)$, достаточно исключить время t из уравнений

$$x = \alpha t \quad y = \beta t^2.$$

Выражая t из первого уравнения и подставляя во второе, получим $y = \beta x^2/\alpha^2$. Траектория парабола;

$$\text{б) } |\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}; \text{ в) } |\mathbf{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}; \text{ г) } \cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{a}||\mathbf{v}|}.$$

1.28. Радиус-вектор частицы, начинающей движение из начала координат в поле силы тяжести, есть

$$\mathbf{r} = -\frac{g t^2}{2} + \mathbf{v}_0 t,$$

или в проекциях

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = -\frac{g t^2}{2} + v_0 t \sin \alpha$$

где $\mathbf{g} = (0, g)$ и g - ускорение свободного падения.

а) Время движения t_0 находится из условия $y = 0$. Откуда $t_0 = 2v_0 \sin \alpha/g$;

б) Чтобы найти максимальную высоту h_{\max} , найдем вначале время подъема $t_1 = v_0 \sin \alpha/g$ из условия $\dot{y} = 0$. Подставляя затем t_1 в $y(t)$, находим $h = v_0^2 \sin^2 \alpha/2g$. Дальность полета определяется как $L = x_{\max} = x(t_0) = v_0^2 \sin 2\alpha/g$. Из условия $h_{\max} = x_{\max}$, находим $\operatorname{ctg} \alpha = 1/4$. (Легко найти из уравнения $\sin 2\alpha = Lg/v_0^2$, что одному и тому же L соответствуют два α ;

в) Выражая время t из закона движения вдоль оси x и подставляя его в закон движения вдоль y , получим

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

достаточно найти ускорение болта относительно лифта и использовать равноускоренный закон движения.

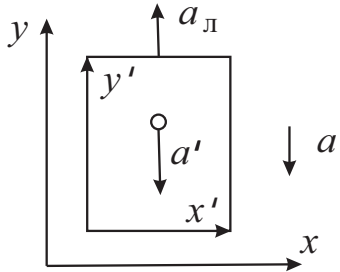


Рис. 3.

Будем рассматривать две системы отсчета, одну связанную с лифтом, а другую с шахтой (рис. 3). Первая система отсчета движется относительно второй с ускорением $a_{\text{л}}$. Ускорение болта относительно лифта обозначим через a' , а ускорение относительно шахты через a . Тогда

$$a = a_{\text{л}} + a'.$$

Так как $a = -g$, то

$$a' = a - a_{\text{л}} = -(g + a_{\text{л}}) = \text{const}.$$

Закон равноускоренного движения болта относительно лифта имеет вид

$$y' = \frac{a't^2}{2} + h = -\frac{(g + a_{\text{л}})t^2}{2} + h,$$

где h - высота лифта и время отсчитывается от момента отрыва болта от потолка. Время падения t_1 находится из условия, что при $t = t_1$, $y' = 0$ и равно

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g + a_{\text{л}}}}.$$

1.17. Пусть скорость по шоссе есть v , тогда по полю - v/η . Введем обозначения $AD = L$, а $CD = x$. Тогда полное время движения равно

$$t(x) = \frac{L - x}{v} + \frac{\eta\sqrt{l^2 + x^2}}{v}.$$

скорости и ускорения точки как функции t ; в) угол φ между векторами \mathbf{a} и \mathbf{v} как функцию t .

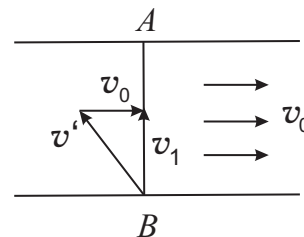


Рис. 1.

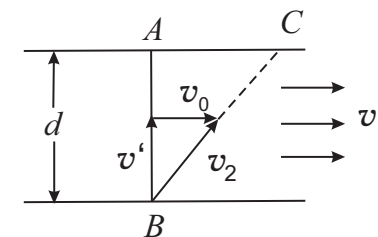


Рис. 2.

со скоростью v' . (см.рис. 1). Результирующая скорость равна v_1 . Второй пловец плывет вдоль AB , но за счет течения будет двигаться (относительно берега) вдоль BC со скоростью v_2 (рис. 2).

Время движения первого пловца $t_1 = d/v_1$, время движения второго

$$t_2 = \frac{BC}{v_2} + \frac{AC}{u}.$$

Приравнивая t_1 к t_2 и выражая BC , AC , v_1 и v_2 через v_0 и v' , получим

$$u = \frac{v_0}{\left(v'/\sqrt{v'^2 - v_0^2}\right) - 1}.$$

1.10.(5) Движение происходит в вертикальной плоскости (x, y) . Сила тяжести действует вдоль оси y . Если (x_1, y_1) - координаты тела брошенного вертикально вверх, а (x_2, y_2) - координаты второго тела, то расстояние r между телами в момент t есть

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

1.15. а) Чтобы найти время падения болта на пол лифта