1.1. Кинематика

1.1(1) Пусть скорость катера относительно реки есть $\upsilon_{\text{к}}$, а $\upsilon_{\text{р}}$ - скорость реки (плота). При решении надо учесть, что скорость катера относительно берега, когда он движется по течению, есть $\upsilon_{\text{к}}+\upsilon_{\text{р}}$, а против течения, $\upsilon_{\text{к}}-\upsilon_{\text{р}}$ Задачу можно решить двумя способами.
Первый способ. Полное время до встречи можно записать как

$$\frac{l}{\upsilon_{\text{р}}} = \tau + \frac{(\upsilon_{\text{к}}+\upsilon_{\text{р}})\tau - l}{\upsilon_{\text{к}}-\upsilon_{\text{р}}}\,.$$

Откуда находим $\upsilon_{\text{р}} = l/2\tau$;
Второй способ. Пусть t - время движения катера против течения. Тогда расстояние пройденное катером за время τ есть:

$$(\upsilon_{\text{к}}+\upsilon_{\text{р}})\tau = \upsilon_{\text{р}}(t+\tau) + (\upsilon_{\text{к}}-\upsilon_{\text{р}})t\,.$$

Учитывая, что $\upsilon_{\text{р}}(t+\tau) = l$, получаем $\upsilon_{\text{р}} = l/2\tau$.
1.3.(2) Пусть t_1 - время, в течение которого была пройдена первая половина пути, а t_2 - время движения со скоростью υ_1 и скоростью υ_2. Тогда

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{\text{пройденный путь}}{\text{затраченное время}} = \frac{\upsilon_0 t_1 + \upsilon_1 t_2 + \upsilon_2 t_2}{t_1 + 2t_2}\,.$$

Так как $\upsilon_0 t_1 = \upsilon_1 t_2 + \upsilon_2 t_2$, то получаем

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{2\upsilon_0(\upsilon_1+\upsilon_2)}{\upsilon_1+\upsilon_2+2\upsilon_0}\,.$$

1.5.(3) При равномерном движении радиус векторы частиц меняются со временем по закону

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1(t) &= \boldsymbol{\upsilon}_1 t + \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2(t) &= \boldsymbol{\upsilon}_2 t + \boldsymbol{r}_2\,. \end{aligned}$$

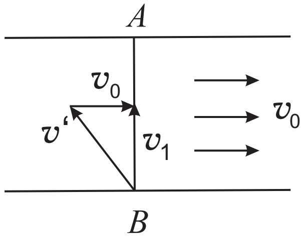

Рис. 1.

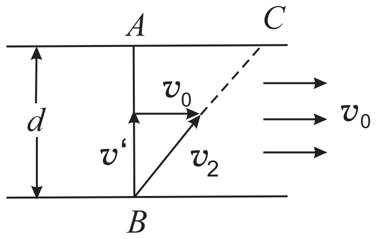

Рис. 2.

Момент времени столкновения t определяется из условия

$$\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{r}_2(t)$$

и равен

$$t = \frac{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|}{|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|}\,.$$

Подставляя t в предыдущее равенство получим соотношение между векторами

$$\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1|}\,.$$

1.7.(4) Чтобы двигаться по прямой AB первый пловец должен учитывать течение реки и плыть под некоторым углом к AB со скоростью v' относительно берега (см.рис. 1). Результирующая скорость равна v_1. Второй пловец плывет вдоль AB, но за счет течения будет двигаться (относительно берега) вдоль BC со скоростью v_2 (рис. 2).

Время движения первого пловца $t_1 = d/v_1$, время движения второго

$$t_2 = \frac{BC}{v_2} + \frac{AC}{u}\,.$$

скорости и ускорения точки как функции t; в) угол φ между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}$ как функцию t.

где $\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$ и $\boldsymbol{n}$ - единичные орты в направлении движения. Умножим скалярно это равенство последовательно на $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, получим

$$v_{10} = \eta v_2 \cos\alpha \qquad v_1 = \eta v_2 \cos\beta\,,$$

где α и β - углы наклона вектора $\boldsymbol{n}$ соответственно к осям x и y. Учитывая, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, получим

$$v_{10} = \sqrt{2kg(\eta^2 s_2 - s_1)}\,.$$

1.146.(57) Если $\Delta\boldsymbol{r}$ элементарное перемещение вдоль траектории, то работа силы по перемещению частицы из точки 1 в точку 2 равно

$$A = \Sigma\,\boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}\cdot\Sigma\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) = -17\,.$$

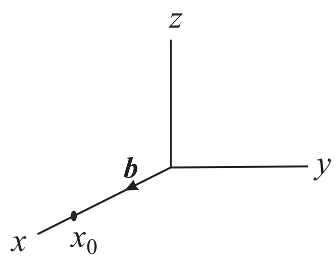

Рис. 4.

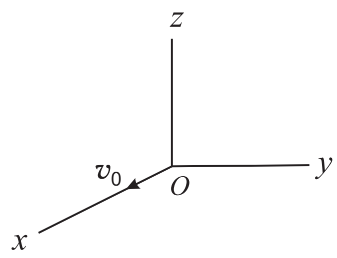

Рис. 5.

все t при которых $\boldsymbol{r} = 0$. Легко найти, что $t_1 = 0$ и $t_2 = 1/\alpha$. Таким образом, частица через $t = 1/\alpha$ вернется в начало координат.

Найдем пройденный путь. Отметим, что частица движется вдоль прямой параллельной вектору $\boldsymbol{b}$. Выберем систему координат, в которой ось x направлена вдоль вектора $\boldsymbol{b}$ (рис. 4). В такой системе координат частица движется вдоль оси x до точки x_0 останавливается в ней и движется обратно. Момент времени остановки t_0 определяется из условия

$$x(t) = bt(1-\alpha t) \qquad \upsilon = \dot{x} = b(1-2\alpha t) = 0\,,$$

где $b = |\boldsymbol{b}|$. Откуда получаем $t_0 = 1/2\alpha$. Пройденный путь равен $s = 2x_0 = 2x(t_0) = b/2\alpha$

1.21.(9) В данном случае имеем прямолинейное, движение в направлении постоянного вектора υ_0. Выберем систему координат, ось x которой направлена вдоль постоянного вектора υ_0 (рис. 5) В такой системе частица движется вдоль оси x со скоростью $\upsilon = |\boldsymbol{v}| = \upsilon_0(1 - t/\tau)$, с ускорением $a = \dot{\upsilon} = -\upsilon_0/\tau$ $=$ const. Так как ускорение постоянно, начальное значение скорости есть υ_0 и частица начинает двигаться из начала координат, то равноускоренный закон движения вдоль оси x

есть

$$x = -\frac{v_0 t^2}{2\tau} + v_0 t = v_0 t\left(1 - \frac{t}{2\tau}\right).$$

Задавая в последнем равенстве t, можно определить положение частицы. Задавая расстояние x от начала координат можно определить соответствующие моменты времени.

1.22.(10) а) Найдем ускорение точки. По определению имеем

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v = \frac{\alpha}{2\sqrt{x}}\alpha\sqrt{x} = \frac{\alpha^2}{2} = \text{const}.$$

Откуда следует, что движение равноускоренное. Используя это условие и определяя начальное положение точки и начальную скорость, находим скорость и закон движения

$$v = \frac{\alpha^2 t}{2}, \qquad x = \frac{\alpha^2 t^2}{4}.$$

б) Средняя скорость определяется как $v_{\text{ср}} = s/T$, где T - время движения. Определяя T из закона движения, находим

$$v_{\text{ср}} = \frac{\alpha\sqrt{s}}{2}.$$

1.24.(11) а) Чтобы найти траекторию движения, $y = y(x)$, достаточно исключить время t из уравнений

$$x = \alpha t \qquad y = \beta t^2.$$

Выражая t из первого уравнения и подставляя во второе, получим $y = \beta x^2/\alpha^2$. Траектория парабола;

б) $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$; в) $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$; г) $\cos\varphi = \dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{v}|}$.

1.28.(12) Радиус-вектор частицы, начинающей движение из начала координат в поле силы тяжести, есть

$$\boldsymbol{r} = -\frac{\boldsymbol{g}t^2}{2} + \boldsymbol{v}_0 t,$$

Откуда находим скорость $v_3 = p_3/m$.

1.131.(56)Пусть $\boldsymbol{v}_{10}$ скорость 1-й частицы до столкновения, а $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$ - скорости частиц непосредственно после столкновения. Обозначим через $\boldsymbol{u}_1$ и $\boldsymbol{u}_1$ скорости частиц в произвольный момент времени после столкновения.

Рассмотрим бесконечный малый интервал времени, охватывающий момент столкновения ($t = 0$). В течение такого интервала силы трения не успевают изменить скорости и приближенно можно считать, что внешних сил нет и выполняется закон сохранения импульса

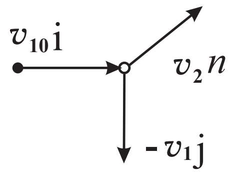

Рис. 17.

$$m_1\boldsymbol{v}_{10} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2. \tag{1}$$

Чтобы определить начальные скорости разлета $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$, рассмотрим движения частиц до их полной остановки. Для этого используем второй закон Ньютона. При прямолинейном движении, имеем

$$m_1\frac{du_1}{dt} = -km_1 g \qquad m_2\frac{du_2}{dt} = -km_1 g.$$

Здесь имеет место равнозамедленное движение , при котором

$$u_1 = v_1 - kgt \qquad u_2 = v_2 - kgt.$$

Откуда находим время до остановки каждой частицы, $u_1 = u_2 = 0$, и, соответственно, пройденный путь s_1 и s_2. В результате найдем, что

$$v_1^2 = 2kgs_1 \qquad v_2^2 = 2kgs_2.$$

Перепишем (1) в виде (см. 17)

$$-m_1 v_1\mathbf{j} + m_2 v_2\boldsymbol{n} = m_1 v_{10}\mathbf{i},$$

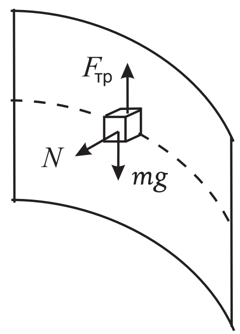

Рис. 14.

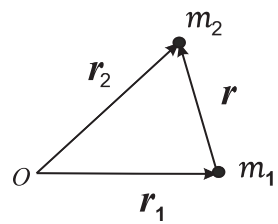

Рис. 15.

1.120.(50) При движении по круговой цилиндрической поверхности (параллельно основанию цилиндра) второй закон Ньютона для скорости ц.м., записывается в виде

$$\frac{mv^2}{R-l} = N\,,$$

где N реакция поверхности на нормальное давление (рис. 14). Для того чтобы движение происходило бы параллельно основанию и не было бы перемещения в вертикальном направлении, сила тяжести, действующая на мотоциклиста, должна уравновешиваться силой трения покоя. Условием этого является выполнение неравенства

$$(F_{\text{тр}})_{max} \geq mg$$

или

$$(F_{\text{тр}})_{max} = kN = \frac{kmv^2}{R-l} \geq mg\,,$$

k - коэффициент трения покоя. Из последнего неравенства получаем

$$v^2 \geq \frac{(R-l)g}{k}\,.$$

дачу 1.28) $t = 2\upsilon_0 \sin\alpha/g$. Откуда $\sin\alpha = gt/2\upsilon_0$. Так как расстояние пройденное снарядом вдоль оси абсцисс есть $L = \upsilon_0 t\cos\alpha$, то $\cos\alpha = L/\upsilon_0 t$. Используя условие $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, получим уравнение для определения t, решая которое находим

$$t_{1,2} = 2\left(\frac{\upsilon_0}{g}\right)^2 \left\{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{gL}{\upsilon_0^2}\right)^2}\right\}\,.$$

Время движения определяется в зависимости о начального угла.

1.34.(16) а) Так как $\dot{x} = \alpha$ и $x_0 = x(0) = 0$, то $x = \alpha t + x_0 = \alpha t$. Скорость вдоль оси y равна $\dot{y} = \beta x$, тогда для ускорения имеем $\ddot{y} = \beta\dot{x} = \beta\alpha = \text{const}$. Откуда следует, что движение вдоль y равноускоренное и закон движения с учетом начальных условий есть

$$y = \frac{\alpha\beta}{2}t^2\,.$$

Ускорения частицы вдоль осей равны $a_x = \ddot{x} = 0$, $a_y = \ddot{y} = \alpha\beta$, поэтому величина ускорения есть $a = \alpha\beta$.

Исключая t с помощью равенства $t = x/\alpha$, получаем из последнего равенства для y уравнение траектории (парабола)

$$y = \frac{\beta}{2\alpha}x^2\,.$$

б)Радиус кривизны равен

$$\rho = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 x^2}{a_n}\,.$$

Нормальное ускорение равно (см. рис. 9) $a_n = a\cos\varphi = \alpha\beta\cos\varphi$. Так как $\operatorname{tg}\varphi = y' = \beta x/\alpha$, то находя $\cos\varphi$, в результате получим

$$\rho = \frac{\alpha}{\beta}\left(1 + \beta^2 x^2/\alpha^2\right)^{3/2}\,.$$

1.36.(16) Полное ускорение равно $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$, где $a_n = v^2/R = \alpha^2 t^2/R$ - нормальное ускорение и $a_\tau = \dot{v} = \alpha$ - касательное ускорение. Находя пройденный путь S из равенства $\dot{S} = v = \alpha t$ и определяя момент времени t из условия $S = 2\pi R n$, найдем a_n и окончательно

$$a = \alpha\sqrt{1 + (4\pi n)^2}\,.$$

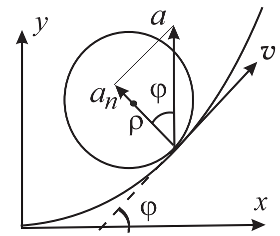

Рис. 9.

1.38.(17) Если φ угол между касательным ускорением a_τ и полным ускорением, то $\operatorname{tg}\varphi = a_n/a_\tau$, где a_n - нормальное ускорение. Записывая скорость как $v = ks$, где k - константа, и вычисляя ускорения, $a_\tau = \dot{v} = (dv/ds)ds/dt$, $a_n = v^2/R$, получим $\operatorname{tg}\varphi = 2s/R$.

1.39.(18) Находя скорость движения как $v = \dot{l}$ и ускорения $a_\tau = \ddot{l}$, $a_n = v^2/R$, получим полное ускорение $a^2 = a_n^2 + a_\tau^2$.

1.42.(19) а)Так как величина скорости постоянна, то $a_\tau = \dot{v} = 0$. Поэтому полное ускорение совпадает с нормальным, $a = a_n$ (рис. 10). Проекции скорости частицы есть $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y} = 2\alpha x\dot{x}$ и соответственно ускорения равны $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y} = 2\alpha\dot{x}^2 + 2\alpha x\ddot{x}$.

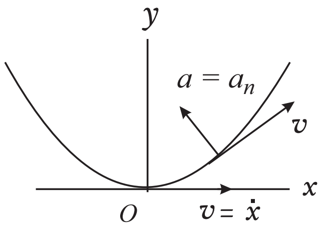

Рис. 10.

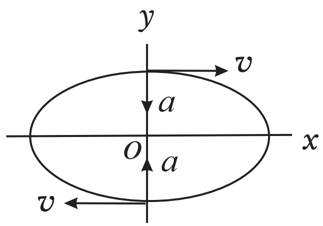

Рис. 11.

где a_1 - ускорение первого тела. Чтобы найти a_1 запишем уравнения движения

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= m_1 - T \\ m_2 a_1 &= T - m_2 g\,, \end{aligned}$$

где T - натяжение нити. Определяя из этой системы a_1 и подставляя в выражение для a_c, получим

$$a_c = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} g$$

1.117.(49) При равномерном вращении с постоянным углом θ все точки цепочки вращаются по окружностям перпендикулярным оси вращения и движения в вертикальном направлении нет. Такое же движение, т.е. движение по окружности в плоскости перпендикулярной оси вращения, совершает и центр инерции . Запишем уравнение движения для ц.и. учитывая что на цепочку действует сила натяжения $\boldsymbol{T}$ и сила тяжести $m\boldsymbol{g}$

$$m\boldsymbol{a}_c = \boldsymbol{T} + m\boldsymbol{g}$$

Так как движения в вертикальном направлении отсутствует, то составляющая силы натяжения в вертикальном направлении уравновешивается силой тяжести. Поэтому при равномерном движении точки C по окружности будем иметь

$$\frac{mv_c^2}{\rho} = T\sin\theta \qquad T\cos\theta = mg\,,$$

где ρ расстояние до оси вращения (центра окружности). Так как $v_c = \rho\omega$, то из этих равенств получаем

$$\rho = \frac{g\operatorname{tg}\theta}{\omega^2} \qquad T = \frac{mg}{\cos\theta}\,.$$

и решая его, найдем путь x.

1.91.(45)При решении задачи надо учесть, что весом тела называется сила $\boldsymbol{P}$, с которой тело действует на опору (или подвес). Если $\boldsymbol{N}$ - реакция опоры, то $\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{N}$. По величине вес равен модулю $N = |\boldsymbol{N}|$.

а) Найдем вес летчика в нижней части петли. При равномерном движении по окружности ускорение тела равно центростремительному ускорению $a_n = v^2/R$. Используя второй закон Ньютона, получаем

$$P_1 = N_1 = m\Big(g + \frac{v^2}{R}\Big)\,;$$

б)Верхняя точка траектории. А этом случае имеем

$$P_2 = N_2 = m\Big(g - \frac{v^2}{R}\Big)\,;$$

в) Средняя точка петли. В этом случае

$$P_3 = N_3 = \frac{mv^2}{R}\,.$$

Сила тяжести mg в этой точке петли компенсируется реакцией опоры, действующей в вертикальном направлении.

1.92.(46) а) Направим ось y вертикально вниз. Пусть θ - угол отклонения нити от вертикали. Спроектируем уравнение движения (второй закон Ньютона) на направление касательной к траектории и на радиальное направление

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{R} &= F - mg\cos\theta \\ m\dot{v} &= mg\sin\theta\,, \end{aligned}$$

где R - длина нити, v - величина скорости шарика, F - натяжение нити. Если шарик движется в сторону уменьшения

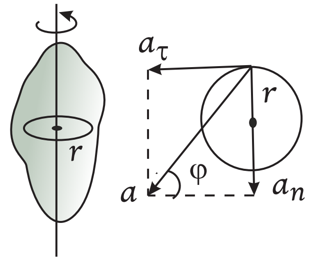

Рис. 12.

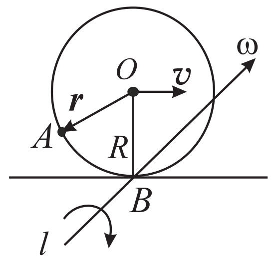

Рис. 13.

В общем случае скорость и ускорение произвольной точки A твердого тела есть

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}]$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_0 + [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{r}] + [\boldsymbol{\omega}, [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{r}]]\,,$$

где $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{a}_0$ - скорость и ускорение центра инерции колеса, а $\boldsymbol{\beta}$ - угловое ускорение. Учитывая, что $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ постоянные векторы, $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\omega} \perp \boldsymbol{r}$, а также, что для любых трех векторов выполняется равенство

$$[\boldsymbol{A}, [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}]] = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\,,$$

получим

$$\boldsymbol{a} = -\frac{v^2}{R}\,\frac{\boldsymbol{r}}{R}\,.$$

Так как $\boldsymbol{r}/R$ - единичный вектор, направленный из точки O в точку A, то $\boldsymbol{a}$ направлен к центру колеса (из точки A). Величина ускорения равна $a = v^2/R$.

1.2. Динамика

1.59.(25) Из второго закона Ньютон, $m\ddot{x} = F$, получим $F = m(2\alpha - 6\beta t)$]. Искомые величины можно найти, определяя моменты времени соответствующие точке поворота, в которой $\dot{x} = 0$, и нахождению частицы в точке $x = 0$.
1.60.(26) Для решения задачи достаточно записать закон Ньютона $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ вдоль координатных осей. Так как радиус вектор частицы равен $\boldsymbol{r} = (x,\, y) = (A\sin\omega t,\, B\cos\omega t)$, то $\boldsymbol{F} = -\omega^2\boldsymbol{r}$.
1.62.(27) Пусть R - подъемная сила. Записывая второй закон Ньютона для массы m, а затем для массы $m - m_б$, где $m_б$ - масса балласта, получим из этих соотношений $m_б = 2ma/(a+g)$.
1.63.(28) Если F_0 сила натяжения нити между массами m_0 и m_1, а F - между массами m_1 и m_2, то

$$\begin{aligned} m_0 a &= m_0 g - F_0 \\ m_1 a &= F_0 - k m_1 g - F \\ m_2 a &= F - k m_2 g\,. \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно a, F и F_0, получаем искомые величины.
1.67.(29) Отношения масс случае (а) можно найти из условия, что результирующая сила, F_1, действующая на массу m_1, должна быть направлена к вершине наклонной плоскости, а результирующая сила F_2, действующая на массу m_2, - вертикально вниз вдоль катета треугольника. В случае (б) направления сил противоположны.
1.68.(30) Для решения задачи достаточно записать второй закон Ньютона для первого тела вдоль наклонной плоскости, а для второго - вдоль катета и учесть, что сила трения

1.89.(43) Пусть ось x прямоугольной системы координат направлена вдоль наклонной плоскости в сторону спуска. Тогда проектируя уравнение движения на оси координат, будем иметь

$$\begin{aligned} ma &= mg\sin\alpha - F_{тр} \\ N &= mg\cos\alpha\,, \end{aligned}$$

где N - реакция опоры. Учитывая, что $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dv}{dx}v$ и $F_{тр} = \gamma x N$, получим

$$v\frac{dv}{dx} = g\sin\alpha - \gamma x g\cos\alpha\,.$$

Интегрируя это выражение

$$\int\limits_0^v v\,dv = g\int\limits_0^x (\sin\alpha - \gamma x\cos\alpha)dx\,,$$

найдем

$$\frac{v^2}{2} = g(x\sin\alpha - \gamma\frac{x^2}{2}\cos\alpha)\,.$$

Пройденный путь можно найти из условия $v = 0$. Максимальная скорость определяется из экстремума v (или v^2).
1.90.(44) Возьмем ось x в направлении постоянного вектора $\boldsymbol{b}$. Тело будет двигаться, когда $F \geqslant kN = kmg$. Начало движения произойдет в момент t_0, когда $F = bt_0 = kmg$. Откуда

$$t_0 = kmg/b\,.$$

Записывая далее уравнение движения

$$m\ddot{x} = bt - kmg$$

где x координата тела (материальной точки) вдоль направления движения, при условии, что $\dot{x}(0) = 0$. Подставляя в полученное выражение $t = t_0$, найдем

$$v_0 = \frac{mg^2}{2k\sin^2\alpha}\cos\alpha\,.$$

При условии, что $x(0) = 0$, пройденный путь равен

$$x_0 = \int_0^{t_0}\dot{x}(t')dt' = \frac{m^2g^3}{6k^2\sin^3\alpha}\cos\alpha\,.$$

1.81.(39) Запишем второй закон Ньютона

$$m\frac{dv}{dt} = F\cos\alpha = F\cos ks\,.$$

Последнее равенство показывает, что ускорение явно зависит от пройденного пути. Поэтому удобно рассматривать скорость зависящей от времени через путь s, т.е. $v(t) = v(s(t))$. Тогда

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v$$

и

$$\frac{dv}{ds}v = \frac{F}{m}\cos ks\,.$$

Интегрируя это равенство, учитывая что $vdv/ds = dv^2/2dt$, получим

$$v = \sqrt{2g\sin\alpha/3k}\,.$$

1.84.(40) а) Выберем ось x в направлении постоянного вектора $\mathbf{b}$, тогда движение происходит вдоль оси x. Если $p = p_x = mv_x$ - импульс частицы, то

$$\dot{p} = bt(\tau - t)\,,$$

Сила, действующая на потолок со стороны блока (из-за натяжения нитей) равна $F = 2T$, где T - натяжение нити. Из уравнений движения получим

$$\boldsymbol{F} = -\frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}_0)\,.$$

1.76.(35) Пусть на массу m_0 со стороны нити действует сила натяжения F_1. На массы m_1 и m_2 со стороны нити действует сила F_2. По третьему закону Ньютона массы m_1 и m_2 действуют на нить с противоположной силой $-F_2$. Поэтому результирующая сила, действующая на движущийся блок (блок A) есть

$$2F_2 - F_1\,.$$

Запишем второй закон Ньютона для всех тел, включая блок A. Пусть ускорение m_0 есть a, а ускорения m_1, m_2 есть соответственно $\pm a'$. Пусть, например, тело m_0 движется вправо, а тело m_1 относительно блока A вверх. Тогда относительно неподвижной поверхности уравнения движения принимают вид (предполагается, что все тела движутся вниз)

$$\begin{aligned}
&m_0a = F_1\\
&m_Aa = 2F_2 - F_1\\
&m_1(a - a') = m_1g - F_2\\
&m_2(a + a') = m_2 - F_2\,.
\end{aligned}$$

Решая эту систему, при условии, что масса блока A $m_A \to 0$, получим

$$a_1 = g\frac{4m_1m_2 + (m_1 - m_2)m_0}{4m_1m_2 + (m_1 + m_2)m_0}\,.$$

1.77.(36) Прежде заметим. что если брусок движется с постоянной скоростью, то тело 2 не испытает действие силы в направлении движения бруска. Когда брусок движется с ускорением a, то в направление его движения на тело 2 действует сила $N_2 = ma$, представляющая реакцию боковую поверхность бруска на нормальное давление тела. Если k - коэффициент трения покоя, то при достаточно большом ускорении a максимальное значение силы трения покоя, равное $kN_2 = kma$, будет достаточно большим, чтобы тело 2 (и следовательно тело 1) оставалось бы неподвижным относительно бруска. Поэтому имеет смысл говорить о минимальном ускорении при котором тела не движутся.

Рассмотрим сначала случай, когда тела перемещаются относительно бруска. Пусть брусок перемещается с ускорением a, а тело 1 движется в противоположную сторон с ускорением a' по поверхности бруска. Записывая второй закон Ньютона для каждого тела относительно неподвижной поверхности, получим систему уравнений движения

$$\begin{aligned} &m(a - a') = F_{\text{н}} - F_{\text{тр}\,1}\\ &mg = N_1\\ &ma' = mg - F_{\text{н}} - F_{\text{тр}\,2}\\ &ma = N_2\,, \end{aligned}$$

где $F_{\text{тр}\,1,2}$ - силы трения, а $N_{1,2}$ - реакции опоры, действующие на тела.

Если тела неподвижны, то $a' = 0$ и

$$\begin{aligned} F_{\text{н}} - ma &= F_{\text{тр}\,1}\\ mg - F_{\text{н}} &= F_{\text{тр}\,2}\,. \end{aligned}$$

Для того, чтобы движения не происходило сила, действующая на тело, не должна превышать максимального значения силы трения покоя, равного kN, где k - коэффициент трения

покоя. Достижение этого значения приведет к движению тела. Отсюда следует, что $F_{\text{тр}\,i} \leqslant kN_i$ и

$$\begin{aligned} F_{\text{н}} - ma &\leqslant kN_1 = kmg\\ mg - F_{\text{н}} &\leqslant kN_2 = kma\,. \end{aligned}$$

Откуда получаем

$$a \geqslant \frac{1-k}{1+k} g\,.$$

и искомое значение есть

$$a_{\min} = \frac{1-k}{1+k} g\,.$$

1.78.(37) Если брусок неподвижен относительно призмы, то в системе отсчета связанной с неподвижной поверхностью на него действует сила ma, направленная влево. Проектируя второй закон Ньютона на наклонную плоскость и на перпендикулярное направление, найдем реакцию призмы на нормальное давление N и силу трения покоя $F_{\text{тр}}$. Движение бруска относительно призмы будет отсутствовать, если сила трения покоя не превышает своего максимального значения kN. Из этого условия находим

$$a_{max} = \frac{1 + k \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - k}\,.$$

1.80.(38) Используя условие, что в момент t_0 отрыва тела от плоскости реакция плоскости на нормальное давление равна нулю, $N = 0$, получим $t_0 = mg/k \sin\alpha$. Скорость тела в произвольный момент $t \leqslant t_0$ можно найти из уравнения движения

$$m\ddot{x} = kt\cos\alpha\,,$$

Значение F в этом случае равно

$$F = \frac{kmg}{\sqrt{1+k^2}}\,.$$

1.74.(33) Груз и муфта создают натяжение нити. В свою очередь нить, по третьему закону Ньютона, с той же силой натяжения действует на груз и муфту. Но так как действие нити на муфту проявляется только в виде трения, то сила натяжения нити равна силе трения $F_{\text{тр}}$ муфты о нить. С такой же по величине силой нить действует на груз.

Выберем систему отсчета, связанную с неподвижным блоком. Если ускорение груза (и следовательно нити) относительно этой системы отсчета равно a, то ускорение муфты относительно этой системы будет $a'-a$, так как муфта движется относительно нити с ускорением a', а сама нить движется в противоположном направлении с ускорением a. Составляя далее уравнения движения для муфты и груза (используя второй закон Ньютона), получим для ускорения a

$$a = g - \frac{F_{\text{тр}}}{M}$$

и силы трения

$$F_{\text{тр}} = \frac{mM(2g-a')}{m+M}\,.$$

1.75.(34) Если a' - ускорения грузов относительно кабины, то их ускорения относительно неподвижной системы отсчета есть

$$a_1 = a_0 + a' \qquad a_2 = a_0 - a'$$

(m_1 движется вверх, m_2 - вниз). Записывая второй закон Ньютона для каждого тела и решая полученную систему уравнений, получим

$$\boldsymbol{a}' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}_0)\,.$$

где $b = |\mathbf{b}|$. Интегрируя, получаем

$$p(\tau) = b\tau^3/6$$

или в векторном виде

$$\mathbf{p} = \frac{\tau^3}{6}\mathbf{b}\,.$$

б) Пройденный путь есть

$$s(\tau) = \int_0^\tau (p(t)/m)\,dt = \frac{b\tau^4}{12m}\,.$$

1.85.(41) Возьмем ось x в направлении постоянного вектора F_0. Тогда

$$m\ddot{x} = F_0 \sin\omega t$$

и

$$\dot{x} = -\frac{F_0}{m}\cos\omega t + C\,.$$

Так как $\dot{x}(0) = 0$, то $C = F_0/m$. В результате получим

$$\dot{x} = \frac{F_0}{m\omega}\Big(1 - \sin\omega t\Big)\,,$$

откуда пройденный путь есть

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2}\Big(\omega t - \sin\omega t\Big)$$

1.88.(42) Запишем уравнение движения

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

или $dv/v^2 = -kdt$, и учитывая, что $dv/v^2 = -d(1/v)$, будем иметь

$$d\Big(\frac{1}{v} - \frac{kt}{m}\Big) = 0$$

С учетом начального значения для скорости находим

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{kt}{m}\,.$$

Откуда для времени движения пули получим

$$t = \frac{m}{k}\Big(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\Big)\,.$$

Чтобы найти коэффициент k, перепишем уравнение движения в виде

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = m\frac{dv}{ds}v = -kv^2\,,$$

где s - пройденный путь. Откуда

$$m\frac{dv}{ds} = -kv\,.$$

Поступая как и выше, и учитывая, что пройденный пулей путь равен h, получим

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\frac{kh}{m}\,.$$

Находя из этого выражения k и подставляя его в выражение для времени полета t, получим

$$t = h(v_0 - v)/(v_0 v \ln v_0/v)\,.$$

равна $F_{\text{тр}} = kN$, где N - реакция на нормальное давление, и направлена против движения. Совместное решение двух получившихся уравнений дает искомую величину.

1.71.(31) При изменении угла α длина наклонной плоскости S будет изменяться. Для ускорении a пройденный вдоль наклонной плоскости путь равен

$$S = \frac{at^2}{2}\,,$$

где t - время движения. Откуда

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2L}{a\cos\alpha}}$$

и $L = \text{const}$ - длина катета, лежащего в основании наклонной плоскости. Определяя ускорение из второго закона Ньютона, получим для t

$$t(\alpha) = \frac{\sqrt{2L}}{\sqrt{g\cos\alpha(\sin\alpha - k\cos\alpha)}}\,.$$

Искомый угол находится из условия экстремума $t'(\alpha) = 0$, которое сводится к уравнению $\operatorname{tg} 2\alpha = -1/k$.

1.73.(32) Используя второй закон Ньютона, и учитывая, что ускорение бруска равно нулю, получим для силы натяжения нити F:

$$F = \frac{kmg}{\cos\alpha + k\sin\alpha}\,.$$

Это выражение принимает минимальное значение, когда знаменатель максимален. Определяя максимум функции, найдем, что угол α удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg}\alpha = k\,.$$

Чтобы найти время движения τ, достаточно воспользоваться равноускоренным законом прямолинейного движения $x = at^2/2$, связью ускорения a со скоростью v и условием того, что при $t = \tau$ $x = l$. В результате получим $\tau = 2l/v$ и $\omega = 2\pi nv/l$.

1.47.(22) Тело остановится, когда $\omega = \dot{\varphi} = 0$. Откуда поучаем время остановки $t_0 = \sqrt{a/3b}$. Средние угловая скорость $<\omega>$ и ускорение $<\beta>$ определяются как

$$<\omega>= \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} \dot{\varphi}dt = \frac{2a}{3} \qquad <\beta>= \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} \ddot{\varphi}dt = -\sqrt{3ab}\,.$$

1.48.(23)Точка движется по окружности, лежащей в плоскости перпендикулярной оси вращения. Величина угловой скорости находится из равенства $\dot{\omega} = \beta = \alpha t$. Из рис. 12 видно, что $\operatorname{tg}\varphi = a_n/a_\tau$. Если $v = \omega r$ - линейная скорость точки, где r - радиус окружности, то $a_\tau = \dot{v}$. Нормальное ускорение равно $a_n = v^2/r$. Откуда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\alpha t^3}{4}\,.$$

Искомое время находим из условия

$$\alpha t^3 = 4\operatorname{tg}(\pi/3)\,.$$

1.52.(24) а) В любой момент времени тело совершает чистое вращение вокруг мгновенной оси вращения l, проходящей через точку B касания колеса с поверхностью, перпендикулярно направлению скорости центра инерции O и плоскости колеса (см. 13). Поэтому $\omega = v/R$. Так как $\boldsymbol{v} = \text{const}$, то и вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ постоянен и лежит вдоль l.

угла θ, то $v = -R\dot{\theta}$ ($\dot{\theta} < 0$). Последнее уравнение в этом случае принимает вид

$$-R\ddot{\theta} = g\sin\theta\,.$$

Умножая последнее равенство на $\dot{\theta}$

$$R\ddot{\theta}\dot{\theta} = -\dot{\theta}g\sin\theta$$

и перепишем его как

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{R}\cos\theta\right)\,.$$

Откуда получаем

$$\frac{v^2}{R} = 2g\cos\theta\,.$$

Натяжение нити тогда есть $F = 3mg\cos\theta$.

Найдем модуль полного ускорения как

$$a^2 = a_n^2 + a_\tau^2 = \left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + (\dot{v})^2 = g^2(1 + 3\cos^2\theta)\,;$$

б) Вертикальная составляющая скорости равна

$$v_y = v\sin\theta = \sqrt{2gR\cos\theta}\,\sin\theta\,.$$

Так как v_y и v_y^2 имеют максимум при одном и том же угле, то найдем этот угол из максимума v_y^2

$$\left(v_y^2\right)'_\theta = 0\,.$$

Решая это уравнение, получим $\cos\theta = 1/\sqrt{3}$, откуда $F = 3mg\cos\theta = \sqrt{3}mg$;

в) Полное ускорение есть $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_\tau$. По условию $a_y = a_{ny} + a_{\tau y} = 0$ или

$$a_n \cos\theta + a_\tau \sin\theta = \frac{v^2}{R}\cos\theta - \dot{v}\sin\theta = 0\,.$$

Решая это уравнение, получим $\cos\theta = 1/\sqrt{3}$.

1.97.(47) Поскольку $v = const$, то тангенциальное ускорение равно нулю. Тогда нормальное ускорение должно вызываться только силой трения (других сил нет). Запишем второй закон Ньютона в радиальном направлении

$$\frac{mv^2}{r} = F = kN = mgk_0\left(1 - \frac{r}{R}\right)\,.$$

Из этого выражения можно найти максимум v или v^2, который достигается при $r = R/2$:

$$v_{max} = \frac{1}{2}\sqrt{gk_0R}\,.$$

1.3. Законы сохранения

1.117.(48) Пусть ось x направлена вертикально вниз. Если x_1 и x_2 координаты масс, то координата ц.и. есть

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}\,.$$

Учитывая, что скорости частиц равны, но противоположно направлены, для ускорения ц.и. можно записать

$$a_c = \frac{(m_1 - m_2)a_1}{m_1 + m_2}\,,$$

В точке $x = 0$ скорость направлена вдоль оси x (касательно к графику траектории), $v_x = v$, $v_y = 0$. Для ускорений будем иметь $a_x = a_\tau = 0$, $a_y = 2\alpha v^2$. Так как $a_y = a_n = v^2/R$, где R - радиус кривизны, то из последнего равенства получаем $R = 1/2\alpha$.

б) В точке $x = 0$ скорость направлена вдоль оси x, по касательной к графику (см. рис. 11) и ее проекции есть $v_x = \dot{x} = \pm v$, $v_y = \dot{y} = 0$, для ускорений имеем $a_x = a_\tau = 0$, $a_y = a_n = a = \ddot{y}$.

Чтобы найти проекцию ускорения $\ddot{y} = a_n$, продифференцируем уравнение эллипса $x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 = 1$ два раза по времени. После первого дифференцирования получим $\dot{y} = -(\beta/\alpha)^2(x/y)\dot{x}$. После второго, в точке $x = 0$, -

$$a = \ddot{y} = \frac{\beta v^2}{\alpha^2}\,.$$

Так как $\ddot{y} = a_n$, то $R = \alpha^2/\beta$.

1.44.(20) Полное ускорение точки равно $a = \sqrt{\dot{v}^2 + (v^2/R)^2}$. Определяя $v = R\dot{\varphi} = R2\beta t$ и $\dot{v}$, получим $a = (v/t)\sqrt{1 + 4\beta^2t^4}$.

1.45.(21) Пусть некоторая точка A лежит в концевой части снаряда на его поверхности и ее координата вдоль оси ствола в произвольный момент времени есть x . Если $\varepsilon = \mathrm{const}$ угловое ускорение и $\omega = \varepsilon t$ угловая скорость, то угол поворота снаряда есть

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\omega t}{2}\,.$$

Пусть за время τ точка A пройдет расстояние l вдоль ствола и совершит $n = 2$ оборота вокруг оси ствола. Тогда при $t = \tau$ из предыдущего равенства получим

$$\omega = \frac{4\pi n}{\tau}\,.$$

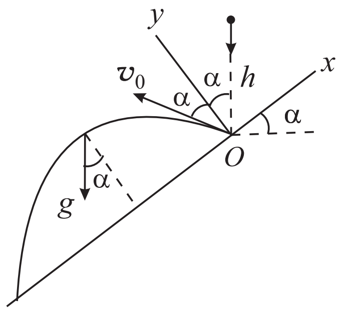

Рис. 7.

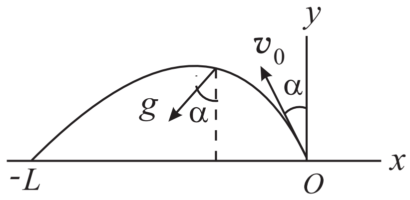

Рис. 8.

$\rho_0 = \eta\rho_M$ получаем $\cos^3\alpha = \eta^{-1}$. Откуда $\alpha = \pi/3$; б) Радиус кривизны в точке M есть $\rho_M = h = v_0^2\sin^2\alpha/2g$ (см задачу 1.28). Тогда

$$\frac{v_0^2\cos^2\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}\,.$$

1.30.(14) Будем отсчитывать потенциальную энергию от точки O (см. рис. 7). Тогда из закона сохранения энергии следует, что шарик упадет в точку O со скоростью $v_0 = \sqrt{2gh}$. При упругом падении с такой же по величине скоростью он отскочит от плоскости. Удобно выбрать систему координат как показано на рис. 7. Тогда, в силу равенства при упругом падении угла падения и угла отражения, скорость отражения будет составлять угол α с осью y. Далее задача решается аналогично задаче 1.28, за исключением того, что сила, действующая на шарик, направлена под углом α к вертикали (см. рис. 8).
1.31.(15) Пусть угол наклона начальной скорости к оси абсцисс есть α. Тогда время движения снаряда равно (см. за-

Минимальное значение скорости тогда есть

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{(R-l)g}{k}}$$

1.122.(51) Пусть $\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор второй частицы относительно первой, так что $|\boldsymbol{r}| = l$ (рис.15). Тогда радиус-векторы и ускорения частиц связаны соотношением

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}\,,$$

где $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}$. Запишем уравнение движения для каждого тела.

$$m_1\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{F}_{\text{н}} \qquad m_2\boldsymbol{a}_2 = m_2\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{\text{н}}\,,$$

где $\boldsymbol{F}_{\text{н}}$ - сила натяжения нити. Используя первое уравнение, получим

$$\boldsymbol{F}_{\text{н}} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\boldsymbol{a}\,.$$

Если первая частица покоится, то вторая относительно нее движется в данный момент по окружности с радиусом l. Тогда $a = |\boldsymbol{a}| = v^2/l$.
1.124. (52) В момент $t = 0$ импульс системы равен

$$\boldsymbol{p}_0 = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2\,.$$

После начала движения для импульса имеем уравнение (внутренние силы - упругие силы пружинки не дают вклада, не вносят вклад в суммарную силу)

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = m\boldsymbol{g}\,,$$

где $m = m_1 + m_2$. Из последнего уравнения находим

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 + m\boldsymbol{g}t\,.$$

Если $\boldsymbol{v}_c$ и $\boldsymbol{r}_c$ - скорость и радиус-вектор ц.м., то

$$\boldsymbol{v}_c = \frac{d\boldsymbol{r}_c}{dt} = \frac{\boldsymbol{p}}{m} = \frac{\boldsymbol{p}_0 + m\boldsymbol{g}t}{m}\,,$$

откуда

$$\boldsymbol{r}_c - \boldsymbol{r}_c(0) = \frac{\boldsymbol{p}_0 t}{m} + \frac{\boldsymbol{g}t^2}{2}\,.$$

1.125. (53) Записывая закон сохранения импульса системы и учитывая, что $m_2/m_1 = \eta$, найдем скорость составной частицы в виде

$$\boldsymbol{v} = \frac{2+4\eta}{1+\eta}\mathbf{i} + \frac{3-5\eta}{1+\eta}\mathbf{j}\,.$$

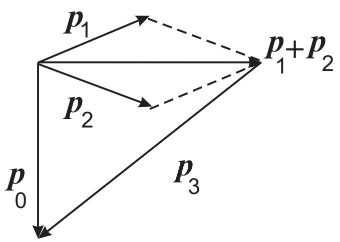

Рис. 16.

1.128.(54)При движении по окружности на муфты действует силы, направленные вдоль радиусов. Непосредственно до столкновения и сразу после столкновения можно считать, что муфты движутся вдоль общей касательной, вдоль которой силы отсутствуют (направлены по нормали) Тогда вдоль касательной будет выполняться закон сохранения импульса. Записывая закон сохранения импульса и выражая скорости муфт до и после столкновения через нормальные ускорения $v = \sqrt{a_n R}$, получим для нормального ускорения составной муфты

$$a = \frac{(m_1\sqrt{a_1} - m_2\sqrt{a_2})^2}{(m_1+m_2)^2}\,.$$

1.129.(55) Пусть модули импульсов кусков равны $p_1 = p_2 = mv$, $p_3 = mv_3$, тогда модуль импульса тела есть $p_0 = 3mv_0$. Из рис. 16 следует, что модуль импульса третьего куска равен

$$p_3 = \sqrt{2m^2v^2 + 9m^2v_0^2}\,.$$

или в проекциях

$$x = \boldsymbol{v}_0 t\cos\alpha\,, \qquad y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t\sin\alpha$$

где $\boldsymbol{g} = (0,\, g)$ и g - ускорение свободного падения.
а) Время движения t_0 находится из условия $y = 0$. Откуда $t_0 = 2v_0\sin\alpha/g$;
б) Чтобы найти максимальную высоту $h_{\max}$, найдем вначале время подъема $t_1 = v_0\sin\alpha/g$ из условия $\dot{y} = 0$. Подставляя затем t_1 в $y(t)$, находим $h = v_0^2\sin\alpha/2g$. Дальность полета определяется как $L = x_{\max} = x(t_0) = v_0^2\sin 2\alpha/g$. Из условия $h_{\max} = x_{\max}$, находим $\cos\alpha = 1/4$. (Легко найти из уравнения $\sin 2\alpha = Lg/v_0^2$, что одному и тому же L соответствуют два α;
в) Выражая время t из закона движения вдоль оси x и подставляя его в закон движения вдоль y, получим

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$$

- парабола.

1.29.(13) а) Исходя из определения радиус кривизны в начале координат есть

$$\rho_0 = \frac{v_0^2}{a_n} = \frac{v_0^2}{g\cos\alpha}\,,$$

где v_0 - начальная скорость и α - угол между начальной скоростью и и горизонтальной прямой (см. 6).

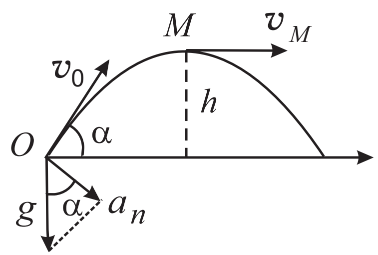

Рис. 6.

Так скорость в точке максимального подъема равна $v_0\cos\alpha$, а нормальное ускорение $a_n = g$, то радиус кривизны в этой точке есть $\rho_M = v_0^2\cos^2\alpha/g$. Тогда из условия

Закон равноускоренного движения болта относительно лифта имеет вид

$$y' = \frac{a't^2}{2} + h = -\frac{(g + a_л)t^2}{2} + h\,,$$

где h - высота лифта и время отсчитывается от момента отрыва болта от потолка. Время падения t_1 находится из условия, что при $t = t_1$, $y' = 0$ и равно

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g + a_л}}\,.$$

1.17.(7) Пусть скорость по шоссе есть v, тогда по полю - v/η. Введем обозначения $AD = L$, а $CD = x$. Тогда полное время движения равно

$$t(x) = \frac{L - x}{v} + \frac{\eta\sqrt{l^2 + x^2}}{v}\,.$$

Требуется найти такое x, чтобы t было минимальное. Для этого необходимо это решить уравнение

$$\frac{dt(x)}{dx} = 0\,.$$

Решая уравнение, получаем

$$x = \frac{l}{\sqrt{\eta^2 - 1}}\,.$$

1.20.(8) а) Дифференцируя $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}t(1 - \alpha t)$ один раз, находим скорость $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}(1 - 2\alpha t)$, а после дифференцирования скорости получаем ускорение $\boldsymbol{a} = -2\alpha\boldsymbol{b}$.
б) Пусть движение начинается при $t = 0$ и $\boldsymbol{r}(0) = 0$. Найдем

Задачи

1.1. Катер, двигаясь вниз по реке, обогнал плот в пункте A. Через $\tau = 60$мин после этого он повернул обратно и затем встретил плот на расстоянии $l = 6,0$км ниже пункта A. Найти скорость течения, если при движении в обоих направлениях мотор катера работал в одном режиме.

1.3. Точка прошла половину пути со скоростью v_0. На оставшейся части пути она половину времени двигалась со скоростью v_1, а последний участок прошла со скоростью v_2. Найти среднюю за все время движения скорость точки.

1.5. Две частицы , 1 и 2, движутся с постоянными скоростями v_1 и v_2. Их радиус-векторы в начальный момент времени равны $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$. При каком соотношении между этими четырьмя векторами частицы испытают столкновение друг с другом?

1.7. Два пловца должны попасть из точки A на одном берегу реки в прямо противоположную точку B на другом берегу. Для этого один из них решил переплыть реку по прямой AB, другой же - все время держать курс перпендикулярно к течению, а расстояние, на которое его снесет, пройти пешком по берегу со скоростью u. При каком значении u оба пловца достигнут точки точки B за одинаковое время, скорость течения $v_0 = 2$км/ч и скорость каждого пловца относительно воды $v' = 2,5$км/ч.

1.10. Два тела бросили одновременно из одной точки: одно - вертикально вверх, другое - под углом $\theta = 60°$ к горизонту. Начальная скорость каждого тела $v_0 = 25$м/с. Найти расстояние между телами через $t = 1,70$с.

1.15. Кабина лифта, у которой расстояние от пола до потолка 2,7 м, начала подниматься с ускорением 1,2м/с^2. Через 2,0 с после начала подъема с потолка кабины стал падать болт.

Найти: а) время свободного падения болта; б) перемещение и путь болта за время свободного падения в системе отсчета, связанной с шахтой лифта.

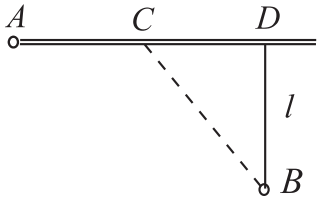

Рис. 18.

1.17. Из пункта A, находящегося на шоссе (см. рис. 18) необходимо за кратчайшее время попасть на машине в пункт B, расположенный в поле на расстоянии l. На каком расстоянии от точки D следует свернуть с шоссе, если скорость машины по полю в η раз меньше ее скорости по шоссе?

1.20. Радиус-вектор частицы меняется со временем t по закону $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b}t(1 - \alpha t)$, где $\boldsymbol{b}$ - постоянный вектор, α - положительная постоянная. Найти: а) скорость и ускорение частицы как функции t; б) время, через которое частица вернется в исходную точку, и пройденный при этом путь.

1.21. В момент $t = 0$ частица вышла из начала координат в положительном направлении оси x. Ее скорость меняется со временем t как $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0(1 - t/\tau)$, где v_0 - начальная скорость, ее модуль $v_0 = 10,0$см/с, $\tau = 5,0$с. Найти: а)координату x частицы, когда $t = 6,0$, 10 и 20с; б) моменты времени, когда частица будет находится на расстоянии 10,0 см от начала координат.

1.22. Частица движется в положительном направлении оси x так, что ее скорость меняется по закону $v = \alpha\sqrt{x}$, где α - положительная постоянная. В момент $t = 0$ частица находилась в точке $x = 0$. Найти: а) ее скорость и ускорение как функции времени; б) среднюю скорость за время, в течение которого она пройдет первые s метров.

1.24. Точка движется в плоскости xy по закону $x = \alpha t$, $y = \beta t^2$, где α и β - положительные постоянные. Найти: а) уравнение траектории точки $y = y(x)$ и ее график; б)модули

Приравнивая t_1 к t_2 и выражая BC, AC, v_1 и v_2 через v_0 и v', получим

$$u = \frac{v_0}{\left(v'/\sqrt{v'^2 - v_0^2}\right) - 1}\,.$$

1.10.(5) Движение происходит в вертикальной плоскости (x, y). Сила тяжести действует вдоль оси y. Если $(x_1 y_1)$- координаты тела брошенного вертикально вверх, а (x_2, y_2) - координаты второго тела, то расстояние r между телами в момент t есть

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,.$$

1.15.(6) а) Чтобы найти время падения болта на пол лифта достаточно найти ускорение болта относительно лифта и использовать равноускоренный закон движения.

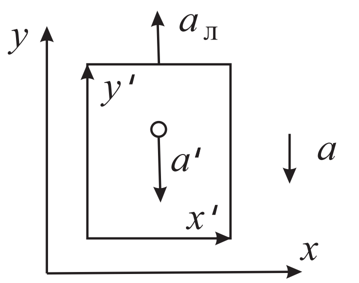

Рис. 3.

Будем рассматривать две системы отсчета, одну связанную с лифтом, а другую с шахтой (рис. 3). Первая система отсчета движется относительно второй с ускорением $a_л$. Ускорение болта относительно лифта обозначим через a', а ускорение относительно шахты через a. Тогда

$$a = a_л + a'\,.$$

Так как $a = -g$, то

$$a' = a - a_л = -(g + a_л) = \text{const}\,.$$