1. Электрическое поле в вакууме

Примеры решения задач

1. В центре квадрата, в каждой вершине которого находится заряд $q = 2,33$ нКл, помещен отрицательный заряд q_0 (рис.1). Найти этот заряд, если каждый заряд q находится в равновесии.

Решение: Обозначим заряды в углах квадрата как q_i, $(i = 1,2,3,4)$ и $q_i = q$. Найдем силу действующую, например, на заряд q_2. Со стороны зарядов q_1, q_3, q_4 на него действуют силы, соответственно, $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4$ и

$$F_1 = F_3 = F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2},$$

где a сторона квадрата. Сила, действующая со стороны заряда q_0 по величине равна

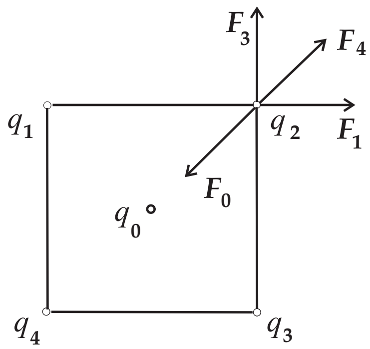


Рис. 1.

$$F_0 = \frac{|q_0|q}{4\pi\varepsilon_0(a/\sqrt{2})^2} = 2\frac{|q_0|}{q}F\,.$$

Сила, действующая со стороны q_4 есть

$$F_4 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}a)^2} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{F}{2}$$

Запишем условие равновесия заряда q_2, $\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_3 + \boldsymbol{F}_4$. Вдоль диагонали будем иметь

$$2\frac{|q_0|}{q}F = \frac{F}{2} + \sqrt{2}F\,.$$

Откуда $|q_0| = (q/4)(2\sqrt{2}+1) \simeq 0,95q$ и $q_0 = -2,23$нКл.

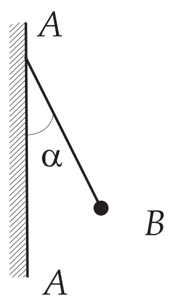


Рис. 2.

2. На рис.2 - AA - заряженная плоскость с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 40$мкКл/м^2 и B - одноименно заряженный шарик с массой $m = 1$г и зарядом $q = 1$нКл. Какой угол α с плоскостью AA образует нить, на которой висит шарик?

Решение: Заряженный шарик находится в поле заряженной плоскости напряженности $E = \sigma/2\varepsilon_0$. Условие равновесия на оси x y есть

$$\begin{aligned} T\cos\alpha &= mg \\ T\sin\alpha &= qE\,, \end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 mg} = 0,23\,.$$

3. Найти напряженность поля бесконечной заряженной нити с линейной плотностью заряда λ.

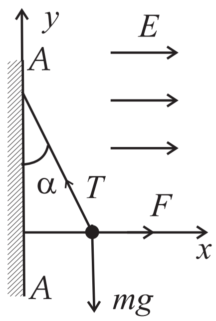


Рис. 3.

Решение: Используем теорему Гаусса. Рассмотрим поверхность цилиндра с радиусом основания r и высотой h, осью которого является нить. По теореме Гаусса

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\,q\,,$$

где q заряд внутри цилиндра. Из соображений симметрии вектор напряженности поля $\boldsymbol{E}$ перпендикулярен нити и боковой поверхности цилиндра. Поэтому $E_n = E$ и, следовательно

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{1}{\epsilon_0}\lambda h\,.$$

Откуда

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,,$$

где r - расстояние до точки в которой измеряется напряженность.

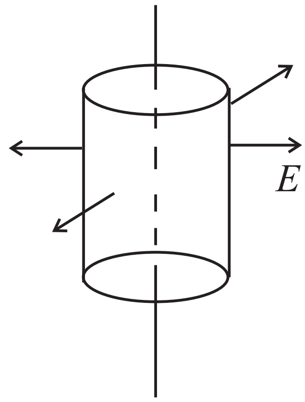


Рис. 4.

4. С какой силой $\boldsymbol{F}$ на единицу длины отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно длинные нити с одинаковой линейной плотностью заряда $\lambda = 3$мкКл/м, находящиеся на расстоянии $r_1 = 2$см друг от друга в вакууме? Какую работу A на единицу длины надо совершить, чтобы сдвинуть эти нити до расстояния $r_2 = 1$ см

Решение: а) Напряженность поля бесконечной заряженной нити равна

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,.$$

Поэтому нить AA действует на элемент Δh нити BB с силой

$$\Delta F = \Delta q E = \lambda \Delta h \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_1}\,.$$

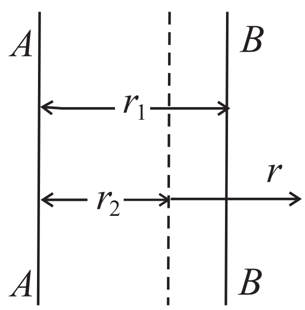


Рис. 5.

Сила, действующая на единицу длины равна

$$F = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 r_1} = 8,1\text{н/м}\,.$$

б) Пусть A' работа, которую совершает нить AA, чтобы сместить (отодвинуть) нить BB. Работа против сил поля (для сближения) равна $A = -A'$ Считая, что нить AA неподвижна найдем работу, которую она совершает, чтобы переместить элемент Δh нити BB:

$$A' = \int\limits_{r_2}^{r_1} F(r)dr = \int\limits_{r_2}^{r_1} \lambda \Delta h E(r)dr = \frac{\lambda^2 \Delta h}{2\pi\varepsilon_0} \int\limits_{r_2}^{r_1} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda^2 \Delta h}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_1}{r_2}$$

Для единицы длины нити получаем

$$A = -A' = \frac{\lambda^2 \Delta h}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1} = -0,112\text{Дж/м/},.$$

5. Кольцо радиуса R равномерно заряжено зарядом q. Найти напряженность поля E на оси, проходящей через центр кольца в точке, удаленной о центра на расстоянии a.

Решение: Рассмотрим электрическое поле созданное элементом окружности dl, несущим заряд dq:

$$d\boldsymbol{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\,.$$

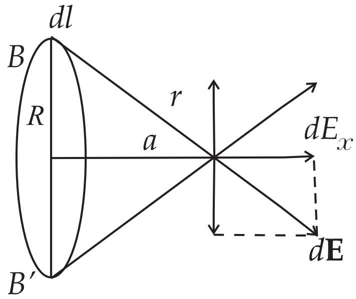


Рис. 6.

Результирующее поле, созданное двумя диаметрально расположенными точками B и B' будет направлено вдоль оси. Нормальные компоненты поля к оси взаимно компенсируют друг друга. Поэтому результирующее поле всего кольца также будет направлено вдоль оси и его величина равна

$$E = E_x = \int dE_x = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{(a^2+R^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{(a^2+R^2)^{3/2}}\int dq = \frac{aq}{4\pi\varepsilon_0(a^2+R^2)^{3/2}}\,.$$

6. Найти напряженность электрического поля $\boldsymbol{E}$ в области пересечения двух шаров, равномерно заряженных разноименными по знаку зарядами с объемной плотностью ρ и $-\rho$, если расстояние между центрами шаров равно a.

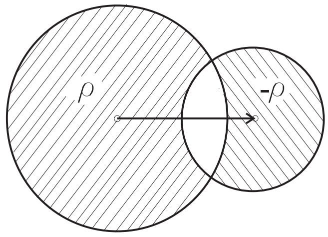


Рис. 7.

Решение: Напряженность внутри произвольного заряженного шара равна

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^3}\,\boldsymbol{r}\,,$$

где R радиус шара, $\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор точки относительно центра шара. Так как $q = \rho 4\pi R^3/3$, то

$$\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{r}\,.$$

Поле в области пересечения шаров можно рассматривать как суперпозицию полей двух равномерно заряженных шаров Тогда в произвольной точке A этой области

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\boldsymbol{r}_+ - \boldsymbol{r}_-) = \frac{\rho\boldsymbol{l}}{3\varepsilon_0}\,,$$

где $\boldsymbol{l}$ вектор, идущий из центра одного шара в центр другого. Поле в области пересечения является однородным.

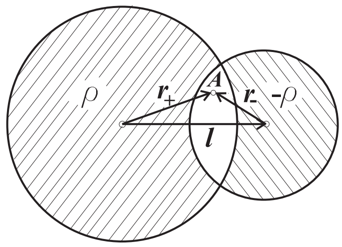
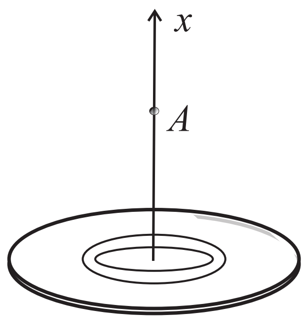


Рис. 8.

7. Найти напряженность электрического поля тонкого однородно заряженного диска радиуса R в точке A, расположенной на оси диска на расстоянии a от его центра. Поверхностная плотность заряда σ.

Решение: Разобъем диск на бесконечно тонкие кольца окружностями с радиусами r и $r + dr$, $0 \leqslant r < R$. Каждое кольцо имеет заряд $dq = \sigma 2\pi r dr$ и создает в точке A напряженность поля $d\boldsymbol{E}$, направленное вдоль оси диска, величина которого равна



$$dE = dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a dq}{(r^2+a^2)^{3/2}} = \frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{r dr}{(r^2+a^2)^{3/2}}\,.$$

Результирующее поле, созданное всем диском равно

$$E = E_x = \frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\int\limits_0^R \frac{r dr}{(r^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{a\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\Big|_0^R = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\Big[1 - \frac{a}{R^2+a^2}\Big]\,.$$

Рис. 9.

8. Вычислить потенциал поля сферы радиуса R с зарядом q, равномерно распределенным по поверхности.

Решение: Так как потенциал равен работе, по перемещению единичного положительного заряда из данной точки на бесконечность ($\varphi_\infty = 0$), то

$$\varphi_1 = \int\limits_1^\infty E_l dl,$$

где E_l - проекция напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ на направление элементарного перемещения. В случае сферы рассмотрим перемещение вдоль радиального направления, вдоль которого $E = E_l$ и

$$E = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}, & \text{если } r \geqslant R \\ 0, & \text{если } r < R. \end{cases} .$$

Поэтому, при

1) $r \geqslant R$ (точка A)

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_r^\infty \frac{dr'}{r'^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'}\bigg|_r^\infty = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r};$$

2) $r < R$ (точка B)

$$\varphi(r) = \int\limits_r^R E dr' + \int\limits_R^\infty E dr' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_R^\infty \frac{dr'}{r'^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R} = \text{const}.$$

Внутри сферы $\varphi = \text{const}$, вне сферы потенциал совпадает с потенциалом точечного заряда.

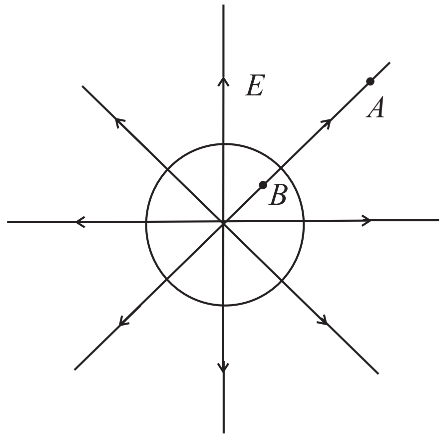


Рис. 10.

Задачи

Напряженность электрического тока

1.1. Найти напряженность $\boldsymbol{E}$ электрического поля в точке, лежащей посередине между точечными за рядами $q_1 = 8$ нКл и $q_2 =$ - 6 нКл. Расстояние между зарядами $r = 10$см.
Ответ: $E =$ 50,4 кВ/м .

1.2. В вершинах правильного шестиугольника расположены три положительных и три отрицательных заряда. Найти напряженность E электрического поля в центре шестиугольника при различных комбинациях в расположении этих зарядов. Каждый заряд $q =$ 1,5нКл; сторона шестиугольника $a =$ 3см.
Ответ: а) $E =$ 60кВ/м; б) $E = 0$; в) $E =$ 30кВ/м.

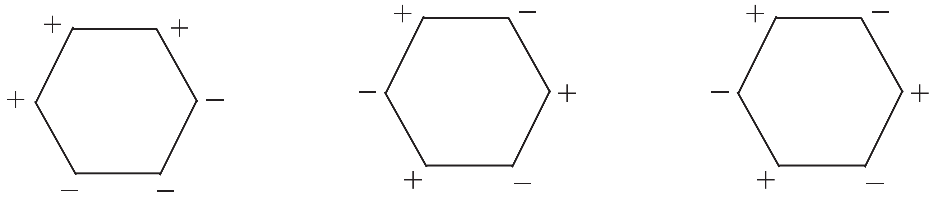


Рис. 11.

1.3. Два точечных заряда q= 7нКл и q = -14,7нКл расположены на расстоянии r = 5см. Найти напряженность E электрического поля в точке находящейся на расстояниях a = 3 см от положительного заряда и b = 4 см от отрицательного заряда.

Ответ: $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{q_1^2/a^4 + q_2^2/b^4} = 112$кВ/м.

1.4. Два шарика одинакового шарика и массы подвешены на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам заряда q_0 = 0,4 мкКл они оттолкнулись друг от друга и разошлись на угол $2\alpha = 60^o$. Найти массу m каждого шарика, если расстояние от центра шарика до точки подвеса l = 20см.

Ответ: $m = q_0^2/(16\varepsilon_0 l^2 g \sin^2\alpha \operatorname{tg}\alpha) = 15,6$г.

1.5. Два шарика одинакового радиуса и массы подвешены на нитях одинаковой длины так, что их поверхности соприкасаются. Какой заряд q надо сообщить шарикам, чтобы сила натяжения нитей стала равной T = 98мН. Расстояние от центра шарика до точки подвеса l = 10 см, масса каждого шарика m = 5 г.

Ответ: $q = 8l\sqrt{\pi\varepsilon_0 T}[1-(mg/T)^2]^{3/2} = 1,1\cdot 10^{-6}$Кл.

1.6. На рис.12 AA - заряженная бесконечная плоскость и B - одноименно заряженный шарик с массой m = 0,4мг и зарядом q = 667пКл. Сила натяжения нити, на которой висит шарик, T = 0,49мН. Найти поверхностную плотность заряда σ на плоскости AA.

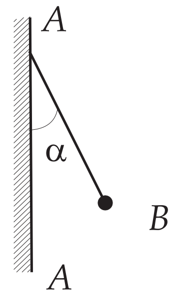


Рис. 12.

Ответ: $\sigma = 2(\varepsilon_0/q)\sqrt{T^2-(mg)^2} = 1,3\cdot 10^{-5}$Кл/м^2

1.7. Найти силу F, действующую на заряд q = 2СГС ед. заряда, если заряд помещен: а) на расстоянии r = 2см от заряженной нити с линейной плотностью заряда $\lambda = 0,2$мкКл/м; б) в поле заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ = 20мкКЛ/м^2; в) на расстоянии r = 2см от поверхности заряженного шара с радиусом R = 2см и поверхностной плотностью заряда σ = 20мкКЛ/м^2.

Ответ: а)$F = qE = \dfrac{\lambda q}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} = 20,1$мкН; б) $F = qE = \dfrac{\sigma q}{2\epsilon_0} = 7,5\cdot 10^{-4}$;

в)$F = qE = \dfrac{\sigma q R^2}{\varepsilon_0 (r+R)^2} = 63$мкН.

1.8. Две длинные одноименно заряженные нити расположены на расстоянии r = 10см друг от друга. Линейная плотность заряда на нитях $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1010$мкКл/м. Найти модуль и направление напряженности $\boldsymbol{E}$ результирующего электрического поля в точке, находящейся на расстоянии a = 10см от каждой линии.

Ответ: $E = \dfrac{\lambda\sqrt{3}}{\pi\varepsilon_0 a}\sqrt{1 - r^2/4a^2}$.

1.9. С какой силой F на единицу площади отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно протяженные плоскости? Поверхностная плотность заряда на плотностях $\sigma = 0,3$мКл/м^2

Ответ: $F = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$.

1.10. В плоском горизонтально расположенном конденсаторе заряженная капелька ртути плотности ρ находится в равновесии. Заряд капли $q = 2,4 \cdot 10^{-9}$ СГС$_q$, поверхностная плотность пластин конденсатора $\sigma = 0,3$ мКл/м^2. Найти радиус R капли.

Ответ: $R = \sqrt[3]{3\sigma q/4\pi\varepsilon_0\rho g}$.

1.11. Найти напряженность поля однородно заряженной нити длины l в точке A, отстоящей от нити на расстоянии a (вдоль оси x). Линейная плотность заряда λ.

Ответ: $E = E_x = \dfrac{\lambda l}{4\pi\varepsilon_0 a}\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + l^2/4}}$.

1.12. Напряженность электрического поля на оси заряженного кольца имеет максимальное значение на расстоянии L от центра кольца. Во сколько раз напряженность электрического поля в точке, расположенной на расстоянии $L/2$ от центра кольца, будет меньше максимального значения напряженности?

Ответ: $E_{\max}/E(L/2) = 3\sqrt{3}/4$.

1.13. Внутри шара заряженного равномерно с объемной плотностью ρ имеется сферическая полость. Центр полости смещен относительно центра шара на вектор $\boldsymbol{a}$. Найти напряженность $\boldsymbol{E}$ поля внутри полости.

Ответ: $\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho\boldsymbol{a}}{3\varepsilon_0}$.

Работа, потенциал

1.14. До какого расстояния r могут сблизиться два электрона, если они движутся навстречу дуг другу с относительной скоростью $v_0 = 10^6$м/с.

Ответ: $r = e^2/(2\pi\varepsilon_0 m v_0^2) = 5 \cdot 10^{-10}$м.

1.15. Два шарика с зарядами $q_1 = 6,66$нКл и $q_2 = 13,33$нКл находятся на расстоянии $r_1 = 40$см. Какую работу надо совершить чтобы сблизить их до расстояния $r_2 = 25$см.

Ответ: $A' = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\Big(\dfrac{1}{r_2} - \dfrac{1}{r_1}\Big) = 1,2$мкДж.

1.16. Найти потенциал φ точки поля, находящейся на расстоянии $r = 10$см от центра заряженного шара радиусом $R = 1$см. Задачу решить, если: а) заряд распределен по поверхности шара с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 0,1$мкКл/м^2; б) задан потенциал шара $\varphi_0 = 300$В.

Ответ: а)$\varphi = \sigma R^2/\varepsilon_0 r = 11,3$В; б) $\varphi = R\varphi_0/r = 30$В.

1.17. Какая работа A совершается при перенесении точечного заряда $q = 20$нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $r = 1$см от поверхности шара радиуса $R = 1$см с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 10$мкКл/м^2?

Ответ: $|A| = \dfrac{\sigma q R^2}{\varepsilon_0 (R+r)} = 113$мкДж.

1.18. Шарик с массой $m = 1$г и зарядом $q = 10$нКл перемещается из точки 1 в точку 2, потенциал которой $_2 = 0$. Найти его скорость υ_1 в точке 1, если в точке 2 она стала равной $\upsilon_2 = 20$см/с.

Ответ: $\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_2^2 - \dfrac{2q}{m}(\varphi_1 - \varphi_2)} = 16,7$см/с.

2. Проводники

Примеры решения задач

1. Найти емкость системы двух параллельно соединенных плоских конденсаторов с емкостями C_1 и C_2, если приложенное к системе напряжение равно $U = \varphi_1 - \varphi_2$.

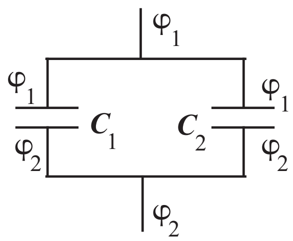


Рис. 13.

Решение: В случае параллельного соединения оба конденсатора заряжаются до одной и той же разности потенциалов U (верхние обкладки, соединенные между собой, представляют единый проводник, вдоль которого, при равновесия зарядов, везде потенциал равен φ_1, аналогично, на нижних - устанавливается потенциал φ_2). В то же время, заряды на конденсаторах могут быть разными и равными $q_1 = C_1 U$ и $q_2 = C_2 U$. Суммарный заряд на конденсаторах равен

$$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)U\,.$$

Откуда емкость всей системы есть

$$C = \frac{q}{U} = C_1 + C_2\,.$$

Примечание: Аналогично можно показать, что емкость системы, состоящей из n параллельно соединенных конденсаторов с емкостями C_k, $k = 1, 2, 3 \ldots n$, равна

$$C = \sum C_k\,.$$

2. Найти емкость системы двух последовательно соединенных конденсаторов с емкостями C_1 и C_2, если приложенное напряжение равно $U = \varphi_1 - \varphi_2$.

Решение: При заданном внешнем напряжении на пластинах конденсатора образуются индуцированные заряды равной величины. Если на верхней обкладке помещается заряд $+q$, то он индуцирует на нижней обкладке отрицательный заряд той же величины. Соответственно этот заряд индуцирует заряд $+q$ на верхней обкладке второго конденсатора. Аналогично, вследствие индукции на нижней обкладке второго конденсатора образуется заряд $-q$.

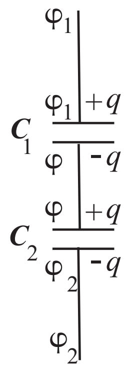


Рис. 14.

Нижняя обкладка первого конденсатора и верхняя обкладка второго конденсатора образуют единый проводник и поэтому имеют один и тот же потенциал φ. Таким образом, напряжения на потенциалах равны $U_1 = \varphi_1 - \varphi$ и $U_2 = \varphi - \varphi_2$ и

$$U_1 + U_2 = U\,.$$

Так как $U_1 = q/C_1$ и $U_1 = q/C_2$, то суммарное напряжение между внешними обкладками есть

$$U = U_1 + U_2 = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right).$$

Откуда емкость всей системы конденсаторов $C = q/U$ равна

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\,.$$

Примечание: Аналогично можно показать, что емкость системы, состоящей из n последовательно соединенных конденсаторов с емкостями C_k, $k = 1, 2, 3 \ldots n$, равна

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_k}\,.$$

3. Электрический ток

Примеры решения задач

1. Два сопротивления R_1 и R_2 последовательно соединены в цепь, по которой течет постоянный ток. Найти сопротивление соединения R.

Решение: Для каждого сопротивления $U_1 = \varphi_1 - \varphi = R_1 I$ и $U_1 = \varphi - \varphi_2 = R_2 I$, где U_i - падение напряжения на i-м сопротивлении и φ - потенциал в некоторой точке между сопротивлениями (см.рис.), I - ток в цепи. Откуда для падения напряжения между точками A и B

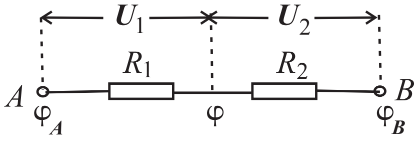


Рис. 15.

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = U_1 + U_2 = (R_1 + R_2)I\,.$$

С другой стороны, $U = IR$. Сравнивая последние соотношения, получим

$$R = R_1 + R_2\,.$$

Это соотношение обобщается на любое количество последовательно соединенных сопротивлений:

$$R = \sum R_i\,.$$

2. Два сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно в цепь, по которой течет постоянный ток. Найти сопротивление соединения R.

Решение: Падение напряжения на каждом сопротивлении равно $U = \varphi_A - \varphi_B$ (см рис.). Так как заряд в точках A и B не накапливается, то $I = I_1 + I_2$, где I - ток до соединения, I_i ток в i-м сопротивлении. По закону Ома

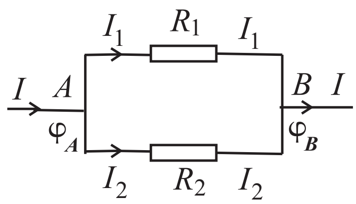


Рис. 16.

$$\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}$$

или

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\,.$$

Это равенство обобщается на любое число параллельно соединенных сопротивлений

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}\,.$$