

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО

УДК 152.972

Г.Л. Бухбиндер

Задачи по тензорному исчислению

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

*Учебно-методическое пособие
(для студентов физического факультета)*

Задачи по тензорному исчислению: учебно-методическое пособие / Г.Л. Бухбиндер – Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2011. – ??с.

Задачи по тензорному исчислению курса "Основы векторного и тензорного анализа" соответствуют действующей учебной программе и позволяют студентам лучше усвоить лекционный материал и научиться его применять.

Для студентов физических факультетов университетов.

УДК 152.972

2011

ISBN

© Бухбиндер Г.Л., 2011
© ГОУ ВПО «Омский госуниверситет
им. Ф.М. Достоевского», 2011

Содержание

| | |
|--|----|
| §1. Криволинейные координаты в евклидовом пространстве | 4 |
| §2. Тензорная алгебра. | 7 |
| §3. Ковариантное дифференцирование. | 9 |
| Ответы | 12 |
| 1. Криволинейные координаты | 12 |
| 2. Тензорная алгебра | 14 |
| 3. Ковариантное дифференцирование | 14 |
| Литература | 17 |

§1. Криволинейные координаты в евклидовом пространстве

1.1. Найти координатные поверхности: а) цилиндрической системы координат

$$y^1 = x^1 \cos x^2, \quad y^2 = x^1 \sin x^2, \quad y^3 = x^3;$$

б) сферической системы координат

$$y^1 = x^1 \sin x^2 \cos x^3, \quad y^2 = x^1 \sin x^2 \sin x^3, \quad y^3 = x^1 \cos x^2,$$

y^i – декартовы ортогональные координаты ($i = 1, 2, 3$).

1.2. Эллиптические координаты задаются в виде

$$y^1 = \left\{ \frac{(x^1 - a)(x^2 - a)(x^3 - a)}{(b - a)(c - a)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$y^2 = \left\{ \frac{(x^1 - b)(x^2 - b)(x^3 - b)}{(c - b)(a - b)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$y^3 = \left\{ \frac{(x^1 - c)(x^2 - c)(x^3 - c)}{(a - c)(b - c)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $a > b > c$, и удовлетворяют неравенствам

$$x^1 > a > x^2 > b > x^3 > c.$$

Показать, что x^1 -поверхности – эллипсоиды, x^2 -поверхности – однополостные гиперболоиды и x^3 -поверхности – двухполостные гиперболоиды и все координатные поверхности принадлежат семейству

$$\frac{(y^1)^2}{x - a} + \frac{(y^2)^2}{x - b} + \frac{(y^3)^2}{x - c} = 1,$$

где x это или x^1 , или x^2 , или x^3 .

1.3. Параболические координаты определяются уравнениями

$$y^1 = x^1 x^2 \cos x^3, \quad y^2 = x^1 x^2 \sin x^3, \quad y^3 = \frac{1}{2}[(x^1)^2 - (x^2)^2].$$

Показать, что x^1 -поверхности и x^2 -поверхности – параболоиды вращения, а x^3 -поверхности – плоскости, проходящие через ось y^3 .

1.4. Найти координатные поверхности для параболических цилиндрических координат

$$y^1 = x^1 x^2, \quad y^2 = \frac{1}{2}[(x^1)^2 - (x^2)^2], \quad y^3 = x^3.$$

1.5. Найти базисные векторы \mathbf{e}_i для следующих координатных систем:

- а) декартова ортогональная система;
- б) сферическая;
- в) цилиндрическая;
- г) эллиптическая;
- д) параболическая.

1.6. Показать, что базисные векторы предыдущей задачи ортогональны.

1.7. Найти матрицы g_{mn} и g^{mn} для координатных систем из задачи **1.5**. Вычислить определитель $g = |g_{mn}|$.

1.8. В некоторой системе координат в точке P заданы два вектора $\mathbf{a}^r(1, 2, 0)$ и $\mathbf{b}^r(2, -1, 1)$. Найти длины векторов и угол между ними, если

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.9. Показать, что если y^i – декартовы ортогональные координаты, то в произвольной системе координат x^i имеет место соотношение

$$g^{mn} = \sum_i \frac{\partial x^m}{\partial y^i} \frac{\partial x^n}{\partial y^i}.$$

1.10. Пусть $(1, 2, -1)$ – координаты вектора в базисе \mathbf{e}_i . Найти его координаты в базисе \mathbf{e}'_i , если

$$\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

1.11. В точке P заданы контравариантные составляющие вектора A^r . Найти его ковариантные составляющие для систем координат задачи **1.5**.

1.12. Написать выражение для ds^2 для координатных систем из **1.5**.

1.13. Криволинейные координаты x^i связаны с прямоугольными координатами y^i соотношениями

$$x^1 = -y^1, \quad x^2 = y^2 + y^3, \quad x^3 = y^3 - y^2.$$

Показать, что система координат x^i является ортогональной. Найти в этой системе компоненты матрицы g_{ij} и длины векторов локального базиса.

1.14. Найти разложение векторного произведения $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$ по взаимному базису \mathbf{e}^k .

1.15. Показать, что $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3) = 1/\sqrt{g}$.

1.16. Найти разложение векторного произведения $\mathbf{e}^i \times \mathbf{e}^j$ по базису \mathbf{e}_k .

1.17. Записать векторное произведение $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} через их контравариантные составляющие.

1.18. Записать векторное произведение \mathbf{a} и \mathbf{b} через их ковариантные составляющие.

1.19. Найти объём, построенный на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} .

1.20. Показать, что элемент объёма dV в криволинейных координатах есть

$$dV = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Указание: Найти смешанное произведение векторов бесконечно малой длины, направленных вдоль касательных к координатным линиям.

1.21. В точке P , сферические координаты которой $(x^1 = 1, x^2 = \pi/4, x^3)$, задан вектор

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}^1 + 2\mathbf{e}^2 - \mathbf{e}^3.$$

Найти ортогональные проекции вектора \mathbf{A} на направления базисных векторов \mathbf{e}_i сферической системы координат.

§2. Тензорная алгебра.

2.1. Найти составляющие объектов: $\delta_{mst}^{rst} = e^{rst} e_{mst}$, δ_{rst}^{rst} .

2.2. Пусть a_s^r — объект второго порядка. Вычислить $e_{ijk} a_1^i a_2^j a_3^k$, $e^{ijk} a_i^1 a_j^2 a_k^3$.

2.3. Определить составляющие объектов: а) $e_{ijk} a_r^i a_s^j a_t^k$, б) $e^{ijk} a_i^r a_j^s a_k^t$.

2.4. Пусть a_r — составляющие ковариантного векторного поля в декартовой ортогональной системе координат. Найти составляющие векторного поля в цилиндрической системе координат.

2.5. Пусть составляющие контравариантного вектора λ^r в системе координат x^r есть $(\varphi(x), 0, 0)$, где $\varphi(x)$ скалярная функция точки. Найти составляющие этого вектора в другой системе координат $x'^r = x'^r(x)$. Найти новые составляющие, если эта же совокупность величин образует ковариантный вектор.

2.6. Ковариантный тензор второго порядка в системе координат x^r задан в виде

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти составляющие этого тензора в системе координат x'^r , если преобразование координат имеет вид

$$x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2 - x^3, \quad x'^3 = x^2 + x^3.$$

2.7. Пусть a_n^m — составляющие векторного поля в координатах x^r . Найти составляющие a_1^m ($m = 1, 2, 3$) в координатах x'^r , если

$$\begin{aligned} x^1 &= (x'^1)^2 + x'^2, & x^1 &> x^2 + (x^3)^2, \\ x^2 &= x'^2 - (x'^3)^2, \\ x^3 &= x'^3. \end{aligned}$$

2.8. Выяснить, образует ли объект $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^r \partial x^s}$, где φ — скалярная функция, ковариантный тензор.

2.9. Пусть для произвольных векторов u^r , v^r и объекта a_m^r во всех системах координат выполняется равенство $a_m^n u^m v_n = 1$. Показать, что a_m^n — тензор.

2.10. Показать, что если a^r — тензор, то

$$a^r = \frac{\partial x^r}{\partial x'^s} a'^s.$$

2.11. Пусть a_n^m — тензор второго порядка. Показать, что

$$I_1 = a_m^m, \quad I_2 = a_n^m a_m^n, \quad I_3 = \delta_{mnp}^{rst} a_r^m a_s^n a_t^p$$

являются инвариантами.

2.12. Пусть A_{kl} — антисимметричный, а S^{kl} — симметричный тензоры. Доказать, что $A_{kl} S^{kl} = 0$. Вывести следующие два тождества, справедливые для произвольного тензора T_{kl} (T^{kl}):

$$T^{kl} A_{kl} = \frac{1}{2} (T^{kl} - T^{lk}) A_{kl}; \quad T_{kl} S^{kl} = \frac{1}{2} (T_{kl} - T_{lk}) S^{kl}.$$

2.13. Показать, что дельта — символ Кронекера δ_s^r — тензор.

2.14. Показать, что δ_{mn}^{rs} и δ_{mnp}^{rst} являются тензорами.

2.15. Показать, что если a_{mn} — истинный ковариантный тензор, то определитель $a = |a_{mn}|$ — псевдоскаляр веса $M = 2$.

2.16. Показать, что если a_m^n — истинный тензор, то определитель $a = |a_m^n|$ — истинный скаляр.

2.17. Показать, что объекты

$$\varepsilon_{rst} = \sqrt{g} e_{rst}, \quad \varepsilon^{rst} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{rst}$$

являются истинными тензорами.

2.18. Показать, что g_{mn} , g^{mn} , δ_n^m являются ассоциированными тензорами.

2.19. Показать, что ε_{rst} и ε^{rst} являются ассоциированными тензорами.

2.20. Найти физические составляющие тензоров $\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$ и A_{rs} в: а) цилиндрической, б) сферической системах координат.

2.21. Пусть A_{rs} – постоянный тензор в декартовых ортогональных координатах y^r , имеющий вид:

$$A_{rs} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные векторы и собственные значения A_{rs} .

§3. Ковариантное дифференцирование.

3.1. Доказать равенства:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{k,ij} \mathbf{e}^k; \quad \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k; \quad \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial x^j} = -\Gamma_{jk}^i \mathbf{e}^k,$$

где $\Gamma_{k,ij}$ и Γ_{ij}^k – символы Кристоффеля соответственно первого и второго рода.

3.2. Доказать равенство:

$$\Gamma_{k,ij} = \sum_p \frac{\partial y^p}{\partial x^k} \frac{\partial^2 y^p}{\partial x^i \partial x^j},$$

y^p – декартовы ортогональные координаты.

3.3. Вычислить символы Кристоффеля Γ_{mn}^r и $\Gamma_{r,mn}$ в координатах:

- а) цилиндрических ;
б) сферических ;

в) параболических .

3.4. Пусть элемент длины имеет вид

$$ds^2 = h_1^2(dx^1)^2 + h_2^2(dx^2)^2 + h_3^2(dx^3)^2.$$

Показать, что

$$\begin{aligned} \Gamma_{k,ij} &= 0, & \Gamma_{i,ij} &= -\Gamma_{j,ii} = h_i \frac{\partial h_i}{\partial x^j}, & \Gamma_{i,ii} &= \frac{\partial h_i}{\partial x^i}. \\ \Gamma_{ij}^k &= 0, & \Gamma_{ii}^j &= -\frac{h_i}{h_j^2} \frac{\partial h_i}{\partial x^j}, & \Gamma_{ij}^i &= \frac{\partial \log h_i}{\partial x^j}, & \Gamma_{ii}^i &= \frac{\partial \log h_i}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

(Суммирование по повторяющимся индексам нет).

3.5. Используя равенство $g_{rs,t} = 0$, проверить, что

$$\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^t} = \Gamma_{r,st} + \Gamma_{s,rt}.$$

3.6. Написав в развёрнутом виде тензорное равенство $\varepsilon_{rst,p} = 0$ и подставляя $r, s, t = 1, 2, 3$, доказать, что

$$\frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^p} = \Gamma_{mp}^m.$$

3.7. Показать, что лапласиан Φ определяется формулой

$$\Delta \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\sqrt{g} g^{rs} \frac{\partial \Phi}{\partial x^s} \right).$$

3.8. Записать лапласиан $\Delta \Phi$ в ортогональных координатах, используя коэффициенты Ляме $h_i = \sqrt{g_{ii}}$.

3.9. Записать лапласиан в: а) цилиндрических, б) сферических координатах.

3.10. Показать, что дивергенция X^r есть

$$X^{r,r} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^r} (\sqrt{g} X^r).$$

3.11. Записать дивергенцию вектора A^r в ортогональных координатах, используя коэффициенты Ляме и физические составляющие вектора.

3.12. Записать дивергенцию вектора \mathbf{A} в: а) цилиндрических, б) сферических координатах, используя его физические составляющие.

3.13. Показать, что контравариантные составляющие ротора вектора X_r в произвольной системе координат равны

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial X_3}{\partial x^2} - \frac{\partial X_2}{\partial x^3} \right), \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x^3} - \frac{\partial X_3}{\partial x^1} \right), \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial X_2}{\partial x^1} - \frac{\partial X_1}{\partial x^2} \right).$$

3.14. Записать ротор вектора \mathbf{A} в ортогональной системе координат, используя физические составляющие.

3.15. Найти длину вектора $\text{rot } \mathbf{e}_1$, где \mathbf{e}_i - вектор локального базиса системы координат x^i с элементом длины:

$$ds^2 = (x^2 dx^1)^2 + (x^1 dx^2)^2 + (dx^3)^2 + x^1 x^2 dx^1 dx^2.$$

3.16. Вычислить

$$\text{div} \left\{ \frac{1}{2} x^2 \mathbf{e}^1 - (x^1)^2 \mathbf{e}^2 \right\},$$

где \mathbf{e}^i - сопряженный базис сферической системы координат x^i .

3.16. В координатах x^i , с элементом длины

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^2 dx^2)^2 + (x^3 dx^3)^2,$$

вычислить ковариантную производную тензора $X_r = (1; 1; 0)$.

Ответы

1. Криволинейные координаты

1.1. x^1 -поверхности – цилиндры, имеющие общую ось вдоль оси y^3 , x^2 -поверхности – плоскости, проходящие через ось y^3 , x^3 -поверхности – плоскости параллельные плоскости $y^3 = 0$.

1.4. x^1 и x^2 -поверхности – параболические цилиндры, x^3 -поверхности – плоскости, параллельные плоскости $y^3 = 0$.

1.5. а) $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$;

б) $\mathbf{e}_1 = (\sin x^2 \cos x^3, \sin x^2 \sin x^3, \cos x^2)$
 $\mathbf{e}_2 = (x^1 \cos x^2 \cos x^3, x^1 \cos x^2 \sin x^3, \sin x^2)$
 $\mathbf{e}_3 = (-x^1 \sin x^2 \sin x^3, x^1 \sin x^2 \cos x^3, 0)$

в) $\mathbf{e}_1 = (\cos x^2, \sin x^2, 0)$
 $\mathbf{e}_2 = (-x^1 \sin x^2, x^1 \cos x^2, 0)$
 $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$

г)

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{2} \left(\frac{y^1}{x^i - a}, \frac{y^2}{x^i - b}, \frac{y^3}{x^i - c} \right) \quad (i = 1, 2, 3.)$$

д) $\mathbf{e}_1 = (x^2 \cos x^3, x^2 \sin x^3, x^1)$
 $\mathbf{e}_2 = (x^1 \cos x^3, x^1 \sin x^3, -x^2)$
 $\mathbf{e}_3 = (-x^1 x^2 \sin x^3, x^1 x^2 \cos x^3, 0)$

1.7. а) $g_{mn} = \delta_{mn}$, $g^{mn} = \delta^{mn}$, $g = 1$

б) $g = (x^1)^4 (\sin x^2)^2$,

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x^1)^2 (\sin x^2)^2 \end{pmatrix}$$

$$g^{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (x^1)^{-2} (\sin x^2)^{-2} \end{pmatrix}$$

в) $g = (x^1)^2$,

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g^{mn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

г) $g_{mn} = g^{mn} = 0$, ($m \neq n$)

$$g_{11} = \frac{g_1}{x^2 - x^3} \quad g_{22} = \frac{g_2}{x^3 - x^1} \quad g_{33} = \frac{g_3}{x^1 - x^2}$$

где

$$g_i = \frac{(x^1 - x^2)(x^1 - x^3)(x^2 - x^2)}{(x^i - a)(x^i - b)(x^i - c)}$$

д) $g = [(x^1)^2 + (x^2)^2]^2 (x^1 x^2)^2$,

$$g_{mn} = \begin{pmatrix} (x^1)^2 + (x^2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 + (x^2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (x^1 x^2)^2 \end{pmatrix}.$$

1.8. $a^2 = 9$, $b^2 = 5$, $\cos \theta = 4/3\sqrt{5}$.

1.10. $(25/3, 7/3, -10/3)$.

1.13

1.14 $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sqrt{g} e_{ijk} \mathbf{e}^k$; e_{ijk} равно 1 если ijk четная перестановка 1,2,3; -1 , если ijk нечетная перестановка; 0 , если имеется по крайней мере два одинаковых индекса.

1.15. $\mathbf{e}^i \times \mathbf{e}^j = (1/\sqrt{g}) e^{ijk} \mathbf{e}_k$; e^{ijk} имеет те же составляющие, что и e_{ijk} .

1.17. $c_r = \sqrt{g} e_{rkl} a^k b^l$.

1.18. $c^r = (1/\sqrt{g}) e^{rkl} a_k b_l$.

1.19.

$$V = \sqrt{g} e_{rst} a^r b^s c^t = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{rst} a_r b_s c_t.$$

1.21. Проекция на $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны соответственно 1, 2, $-\sqrt{2}$.

2. Тензорная алгебра

2.1. $\delta_{mst}^{rst} = \delta_m^r$.

2.2. В обоих случаях $|a_s^r|$.

2.3 а) $|a_n^m| e_{rst}$, б) $|a_n^m| e^{rst}$.

2.4. $a'_1 = a_1 \cos x'^2 + a_2 \sin x'^2$, $a'_2 = -a_1 x'^1 \sin x'^2 + a_2 x'^1 \cos x'^2$, $a'_3 = a_3$.

2.5. $\lambda'^r = \varphi \frac{\partial x'^r}{\partial x^1}$; $\lambda'_r = \varphi \frac{\partial x'^1}{\partial x^r}$.

2.7. $a'^1_1 = a^1_1 - a^2_1 - 2x'^3 a^3_1$, $a'^2_1 = 2x'^1 a^2_1 + 4x'^1 x'^3 a^3_1$, $a'^3_1 = 2x'^1 a^3_1$.

2.20.

а) $(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \frac{\partial \Phi}{\partial z})$, б) $(\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi})$, $\rho = x^1, \varphi = x^2, z = x^3$.

а)

$$\bar{A}_{rs} = \begin{pmatrix} A_{\rho\rho} & \rho^{-1} A_{\rho\varphi} & A_{\rho z} \\ \rho^{-1} A_{\varphi\rho} & \rho^{-2} A_{\varphi\varphi} & \rho^{-1} A_{\varphi z} \\ A_{z\rho} & \rho^{-1} A_{z\varphi} & A_{zz} \end{pmatrix}$$

б)

$$\bar{A}_{rs} = \begin{pmatrix} A_{rr} & r^{-1} A_{r\theta} & (r \sin \theta)^{-1} A_{r\varphi} \\ r^{-1} A_{\theta r} & r^{-2} A_{\theta\theta} & (r^2 \sin \theta)^{-1} A_{\theta\varphi} \\ (r \sin \theta)^{-1} A_{\varphi r} & (r^2 \sin \theta)^{-1} A_{\varphi\theta} & (r^2 \sin^2 \theta)^{-1} A_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$$

2.21.

$$\lambda_1 = -1, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right);$$

$$\lambda_2 = 0, \quad (0, 0, 1);$$

$$\lambda_3 = 1, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

3. Ковариантное дифференцирование

3.1. Отличные от нуля символы Кристоффеля есть:

а) $\Gamma_{2,21} = \Gamma_{2,12} = x^1$, $\Gamma_{1,22} = -x^1$, $\Gamma_{12,2} = -x^1$, $\Gamma_{21,1}^2 = \Gamma_{12,1}^2 = 1/x^1$;

$$\begin{aligned} \text{б) } \Gamma_{2,21} = -\Gamma_{1,22} = x^1, \quad \Gamma_{3,13} = -\Gamma_{1,33} = x^1(\sin x^2)^2, \quad \Gamma_{3,23} = \\ -\Gamma_{2,33} = (x^1)^2 \sin x^2 \cos x^2, \quad \Gamma_{22}^1 = -x^1, \quad \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = 1/x^1, \\ \Gamma_{33}^2 = -\sin x^2 \cos x^2, \quad \Gamma_{23}^3 = ctg x^2, \quad \Gamma_{33}^1 = -x^1(\sin x^2)^2; \end{aligned}$$

3.8

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = \\ \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \Phi}{\partial x^3} \right) \right] \end{aligned}$$

3.9.

a)

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2};$$

б)

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}.$$

3.11.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} (h_2 h_3 \bar{A}_1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (h_1 h_3 \bar{A}_2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (h_1 h_2 \bar{A}_3) \right].$$

3.12.

a)

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \bar{A}_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{A}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \bar{A}_z}{\partial z};$$

б)

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \bar{A}_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \bar{A}_\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \bar{A}_\varphi) \right].$$

3.14.

$$\bar{R}_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial (h_3 \bar{A}_3)}{\partial x^2} - \frac{\partial (h_2 \bar{A}_2)}{\partial x^3} \right], \quad \bar{R}_2 = \frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial (h_1 \bar{A}_1)}{\partial x^3} - \frac{\partial (h_3 \bar{A}_3)}{\partial x^1} \right],$$

$$\bar{R}_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial (h_2 \bar{A}_2)}{\partial x^1} - \frac{\partial (h_1 \bar{A}_1)}{\partial x^2} \right].$$

3.15. $3/(x^1)^2$.

3.16. x^2/x^1 .

Литература

1. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986.
2. *Мак-Коннел А.Д.* Введение в тензорный анализ. М.: Физматгиз, 1963.
3. *Сокольников И* Тензорный анализ. М.: Наука, 1971.
4. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начало тензорного исчисления. М.: Наука, 1965.
5. *Аквис М.А., Гольдберг В.В.* Тензорное исчисление. М.: Наука, 1969.
6. *Мэтьюз Дж., Уокер Р.* Математические методы физики. М.: Наука, 1974.

Учебное издание

ЗАДАЧИ ПО ТЕНЗОРНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ**Бухбиндер**

Геннадий Львович

Санитарно-гигиенический сертификат №

Редактор ???

Технический редактор *Н.С. Серопян*

Дизайн обложки ???

Подписано в печать ???

Формат 60 × 84 1/16.

Печ. л. ??? Усл. печ. л. ?? Уч.-изд. л. ??

Тираж ??экз. Заказ

Издательство Омского государственного университета

644077, Омск-77, пр. Мира, 55а