1. Радиус-вектор частицы относительно неподвижной точки O меняется со временем по закону $\mathbf{r} = 2\sin\omega t\ \mathbf{e}_x + \cos\omega t\ \mathbf{e}_y$, ω - положительная постоянная. Найти: а) скорость $\boldsymbol{v}$ и ускорение $\boldsymbol{a}$ частицы и их величины; б) определить траекторию частицы.

2. Частица движется по окружности радиуса R так, что модуль ее скорости v зависит от пройденного пути $S(t)$ по закону $v = a\,S^{1/2}$, a - положительная константа. Найти: а) величины нормального a_n, тангенциального a_τ и полного ускорения a; б) угол α между скоростью $\boldsymbol{v}$ и ускорением $\boldsymbol{a}$ как функцию S; в) величину ускорения как функцию α.

3. Потенциальная энергия частицы имеет вид: $U = axyz$, где a - постоянная. Определить силу $\mathbf{F}$, действующую на частицу. Найти работу A_{12}, совершаемую силой над частицей при ее перемещении из начальной точкой $P_1(1,2,3)$ в конечную $P_2(2,3,4)$ вдоль прямой, соединяющей эти точки.

4. Тонкий стержень длиной l может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня, перпендикулярно ему. Стержень отклонили на угол $\pi/2$ от положения равновесия и отпустили. определить скорость нижнего конца стержня в момент прохождения положения равновесия.

5. В сосуде находится смесь $m_1 = 7,0$ г. азота (N_2) и $m_2 = 11$г. углекислого газа CO_2 при температуре $T = 290$К и давлении $p = 1$атм. Найти плотность этой смеси, считая газы идеальными.

Решение: Плотность равна $\rho = (m_1+m_2)/V$, V - объем занятый смесью. Найдем объем из уравнения состояния

$$pV = \nu RT = (\nu_1 + \nu_2)RT,$$

где общее количество молей $\nu = \nu_1 + \nu_2$ и $\nu_i = m_i/M_i$ - число молей i-й компоненты, M_i - ее молярная масса. Из последнего равенства выразим объем V и подставим в ρ, получим

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT} = 1,5\text{г/л}$$

6. Давление воздуха возросло от p_1 до p_2. Считая известным показатель адиабаты γ найти приращение внутренней энергии воздуха, находящегося в комнате, объемом V, рассматривая его как идеальный газ.
Отв.: $\dfrac{(p_2 - p_1)V}{\gamma - 1}$

7. Один моль идеального газа с показателем адиабаты γ совершает процесс, при котором его давление меняется как $p \sim T^{\alpha}$, где α положительная постоянная. Найти: а)работу, которую производит газ, если его температура испытывает приращение ΔT; б)молярную теплоемкость и определить при каком значении α теплоемкость будет положительной.

Решение: а) $p = aT^{\alpha}$, где a - постоянная. Из уравнения состояния имеем

$$V = \frac{RT}{p} = \frac{RT^{1-\alpha}}{a}.$$

Учитывая, что $dV = Ra^{-1}dT^{1-\alpha} = (1-\alpha)a^{-1}RT^{-\alpha}dT$, найдем работу, произведенную газом

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = (1-\alpha)R\int_{T_0}^{T_0+\Delta T} dT = (1-\alpha)R\Delta T;$$

б) Найдем теплоемкость, используя первый закон термодинамики, $C = dQ'/dT = C_V + pdV/dT = C_V + R(1-\alpha) > 0$. Откуда

$$\alpha < 1 + \frac{C_V}{R} = \frac{R + C_V}{R} = \frac{C_p}{R} = \frac{\gamma}{(\gamma - 1)}$$

8. Найти приращение энтропии идеального газа с показателем адиабаты γ при увеличении его температуры T в n раз, если процесс нагревания: а) изохорический; б) изобарический.

Решение: а)изохорический процесс: $S_2 - S_1 = C_V \ln\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{R}{\gamma - 1}\ln n$; б)изобарический процесс: $S_2 - S_1 = \dfrac{R\gamma}{\gamma - 1}\ln n$. *Указание*: найти изменение энтропии в переменных T, p.