ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1975 МАТЕМАТИКА № 3 (154)

УДК 513.88

А. К. Гуц

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ СЕМЕЙСТВ МНОЖЕСТВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В данной статье приводятся примеры семейств множеств в сепарабельном гильбертовом пространстве H, инвариантность которых относительно некоторых отображений определяет эти отображения как аффинные операторы, т. е. линейные непрерывные операторы с точностью до переноса.

Одним из результатов является установление аффинности биективного оператора f, отображающего сферу радиуса $r>0$ с центром в произвольной точке x на сферу радиуса r с центром в точке $f(x)$. Этот вопрос был поставлен А. Д. Александровым.

Понятие дискретного конуса введено Н. Ф. Тищенко. Далее под линейным оператором имеем в виду непрерывный линейный оператор.

Если x и y два вектора, то под прямой в пространстве H, проходящей через точку x в направлении y, понимаем множество точек $x+y\tau$, $-\infty<\tau<+\infty$. Под переносом t понимаем отображение $t: x\to x+t$, $t\in H$, где x — произвольный вектор в пространстве H. Говорим, что прямые l_0^α $(\alpha=1, 2, \ldots)$, проходящие через точку 0, образуют минимальный дискретный конус D_0 с вершиной в точке 0, если направляющие векторы этих прямых таковы, что, выбрасывая из их множества любой вектор, будем получать базис в пространстве H, т. е. полную систему векторов.

Пусть

$$D_x=t(D_0), \quad D_0=\bigcup_\alpha l_0^\alpha,$$

где t — такой перенос, что $t(0)=x$.

Теорема 1. *Если $f: H\to H$ — биективный и непрерывный оператор, такой, что $f(D_x)=D_{f(x)}$, то f есть аффинный оператор.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что если e, $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ — направляющие векторы прямых, образующих конус D_0, то векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ образуют базис в пространстве H. Тогда прямая l_x из конуса D_x с направляющим вектором e будет иметь вид

$$e\tau+x, \quad -\infty<\tau<+\infty, \quad e=\sum_{\alpha=1}^{\infty}\lambda_\alpha e_\alpha,$$

причем все числа λ_α $(\alpha=1, 2, \ldots)$ отличны от нуля.

Легко убедиться, что в силу непрерывности оператор f отобразит параллельные прямые (получаемые одна из другой с помощью переноса) в параллельные прямые, если, конечно, он переводит прямые в прямые. Кроме того, существует биективный линейный оператор L (построение которого тривиально), что оператор $F(x) = L(f(x) - f(0))$ является непрерывным и биективным и отображает конус D_x на минимальный дискретный конус

$$\widetilde{D}_x = \widetilde{l}_x \cup \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} l_x^\alpha,$$

где $\widetilde{l}_x$ — прямая, проходящая через точку x, задаваемая уравнением

$$\widetilde{e}\tau + x, \quad -\infty < \tau < +\infty, \quad \widetilde{e} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \widetilde{\lambda}_\alpha e_\alpha,$$

причем все числа $\widetilde{\lambda}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \ldots$) отличны от нуля, а также

$$F(l_0^\alpha) = l_0^\alpha \ (\alpha = 1, 2, \ldots), \quad (1) \qquad F(l_x) = \widetilde{l}_{F(x)}. \quad (2)$$

Если записать отображение F в координатах, то из (1) следует, что k-я координата отображения F зависит только от k-й координаты вектора x, т. е. $F_k(x_1, x_2, \ldots) = F_k(x_k)$. Из (2) следует (в силу монотонности непрерывного отображения F вдоль прямой l_x), что существует строго монотонная вещественная функция $s_x : R \to R$ такая, что

$$F_k(e\tau + x) = \widetilde{\lambda}_k s_x(\tau) + F_k(x_k), \quad -\infty < \tau < +\infty \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда получаем $\widetilde{\lambda}_k F_m(\lambda_m \tau + x_m) - \widetilde{\lambda}_m F_k(\lambda_k \tau + x_k) = \widetilde{\lambda}_k F_m(x_m) - \widetilde{\lambda}_m F_k(x_k)$ или

$$F_m(\tau) = \frac{\widetilde{\lambda}_m}{\widetilde{\lambda}_k} F_k\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\tau - \frac{\lambda_k x_m}{\lambda_m} + x_k\right) + F_m(x_m) - \frac{\widetilde{\lambda}_m}{\widetilde{\lambda}_k} F_k(x_k),$$

что верно для любого вектора $x = (x_1, x_2, \ldots)$, т. е. можно написать

$$F_m(\tau) = \frac{\widetilde{\lambda}_m}{\widetilde{\lambda}_k} F_k\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\tau - \frac{\lambda_k y_m}{\lambda_m} + y_k\right) + F_m(y_m) - \frac{\widetilde{\lambda}_m}{\widetilde{\lambda}_k} F_k(y_k).$$

Взяв в последнем равенстве $\tau = x_m$ и подставив полученное в предыдущее равенство, где затем положим $\tau = y_m$, получим

$$F_k(\lambda h + \xi) + F_k(-\lambda h + \eta) = F_k(\xi) + F_k(\eta), \tag{3}$$

где $\lambda = \lambda_k/\lambda_m$, $h = y_m - x_m$, $\xi = x_k$, $\eta = y_k$.

В уравнении (3) числа ξ, η, h независимые, поэтому можно взять $\lambda h = \eta$, и тогда в силу $F(0) = 0$ получим

$$F_k(\xi + \eta) = F_k(\xi) + F_k(\eta). \tag{4}$$

Но F — непрерывный оператор и, значит, из (4) следует, что $F_k(x) = \varkappa_k x_k$, где $\varkappa_k = \text{const}$.

Таким образом, F есть линейный оператор, и т. к. $f = L^{-1} \circ F + f(0)$, то f есть аффинный оператор. Теорема доказана.

Замечания. (i) Если D_0 и $\tilde{D}_0$ — различные дискретные конусы и $f: H \to H$ — биективный непрерывный оператор, такой, что $f(D_x) = \tilde{D}_{f(x)}$, то f есть аффинный оператор.

(ii) Условие непрерывности оператора по существу, т. к. с помощью базиса Гамеля можно построить оператор, удовлетворяющий другим условиям теоремы, но не аффинный.

(j) Вместо минимального дискретного конуса нельзя рассматривать вырожденный дискретный конус, т. е. конус, у прямых которого направляющие векторы образуют базис пространства H.

Однако при дополнительных условиях можно добиться аффинности оператора. Например, если $f: H \to H$ — биективный и непрерывный оператор, такой, что $f(D_\alpha^0) = D_{f(x)}^0$, где D_x^0 — вырожденный дискретный конус, и, кроме того,

$$\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{\text{„}N\text{“ раз}} = \varepsilon, \tag{5}$$

где ε — тождественный оператор, то f есть аффинный оператор.

Действительно, не ограничивая общности, можно считать, что $f(0) = 0$, $f(l_0^\alpha) = l_0^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \dots)$, где $D_x^0 = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{\infty} l_x^\alpha$. Тогда можно записать $f(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots)$, и в силу (5) имеем

$$\underbrace{f_k \circ \dots \circ f_k}_{\text{„}N\text{“ раз}} (x_k) = x_k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

т. е. задача свелась к решению функционального уравнения

$$\underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{\text{„}N\text{“ раз}} (t) = t, \ t \in R, \tag{6}$$

где $\varphi: R \to R$ — непрерывная биективная функция.

Имеем:

а) функция φ строго возрастает; тогда $\varphi(t) \equiv t$,

б) функция φ строго убывает, и если N — четное число, то из (6) получим

$$F(t) \equiv \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{\text{„}N/2\text{“ раз}} (t) = [\underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{\text{„}N/2\text{“ раз}}]^{-1}(t).$$

Отсюда имеем два случая: (i) $F(t) \equiv t$ при $N/2$ — четном; (ii) $F(t) = -t + a$, где $a = \text{const}$ при $N/2$ — нечетном.

В случае (i) мы можем повторить рассуждение сначала и в конце концов прийти к случаю (ii), т. к. φ убывает. Но тогда будем иметь

$$\underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{\text{„}2m+1\text{“ раз}} (t) = -t + a$$

или

$$\varphi \underbrace{\circ \dots \circ \varphi}_{\text{„}2m\text{“ раз}} (\varphi(t)) = -t + a, \tag{7}$$

а т. к.

$$\underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{\text{„}4m\text{“ раз}} (t) = t,$$

то, используя (7), получим $-\varphi^{-1}(-\varphi^{-1}(t)+a)+a=t$ или

$$\varphi(-\varphi(t)+a)=-t+a. \tag{8}$$

Пусть $z=(t, \varphi(t))$ принадлежит графику Γ функции φ; тогда точка, симметричная точке z относительно прямой $L\{y+t=a\}$, имеет вид $(-\varphi(t)+a, \ -t+a)$ и, значит, в силу (8) принадлежит графику Γ. Но т. к. φ убывает, то из $t_1<t_2$ следует $\varphi(t_1)>\varphi(t_2)$. Однако, если $(t_i, \varphi(t_i))$ $(i=1, 2)$ принадлежат Γ и симметричны относительно прямой L, то $\varphi(t_1)<\varphi(t_2)$. Полученное противоречие показывает, что $\Gamma\equiv L$, т. е. $\varphi(t)=-t+a$.

Значит, решениями уравнения (6) могут быть лишь функции $\varphi(t)\equiv t$ или $\varphi(t)=-t+a$. Поэтому компоненты оператора f имеют вид

$$f_k(x)=x_k \quad \text{или } f_k(x)=-x_k+a_k, \ a_k=\text{const},$$

т. е. f есть аффинный оператор.

Пусть $f:H\to H$ — оператор в пространстве H. Говорим, что в точке x он имеет бесконечный скачок, если существует последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся слабо к точке x, что имеем

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x_n)\|=\infty.$$

Теорема 2. *Пусть $f:H\to H$ — биективный оператор, такой, что $f(D_x)=D_{f(x)}$. Для того чтобы оператор f был аффинным, необходимо и достаточно, чтобы f не имел бесконечных скачков ни в одной точке пространства H.*

Аналогичный результат для конечномерных пространств был получен А. В. Кузьминых.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Покажем, что оператор f будет непрерывным, и в силу теоремы 1 — аффинным.

а) Пусть P — двумерная плоскость, натянутая на прямые l_0^α, l_0^β $(\alpha\neq\beta)$. Тогда $f(P)$ есть также двумерная плоскость, натянутая на прямые $f(l_0^\alpha)$ и $f(l_0^\beta)$.

В самом деле, пусть l_x^α, l_y^α, l_z^α — три различные параллельные прямые, лежащие в плоскости P. Положим $l_1=f(l_x^\alpha)$, $l_2=f(l_y^\alpha)$, $l_3=f(l_z^\alpha)$. Эти прямые либо параллельные, и тогда все доказано, либо не параллельные. Пусть верно последнее; тогда $f(P)$ лежит в трехмерном евклидовом пространстве E_3, натянутом на прямые l_1, l_2, l_3. Ясно, если $w\in E_3$, то D_w пересекается с E_3 лишь по трем прямым, и они имеют направление прямых l_1, l_2, l_3. Возможны случаи:

(i) прямые l_1, l_2, l_3 лежат в параллельных плоскостях P_1, P_2, P_3 соответственно, порожденных прямыми из дискретных конусов, лежащих в E_3;

(ii) прямые l_1, l_2 лежат в параллельных плоскостях, упомянутых в (i);

(j) прямые l_1, l_2, l_3 не лежат в названных плоскостях.

В случае (i) мы сразу получаем, что хотя бы две из данных прямых параллельны, и тогда наше утверждение следует немедленно. Случаи (ii) и (j) невозможны. Действительно, в случае (ii) прямая l_3 пересекает плоскость P_2 в точке a, но тогда существует прямая l из конуса, лежащая в P_2 и проходящая через точку a, пересекая прямую l_2, причем l не пересекает прямую l_1. Мы получаем противоречие с биективностью оператора f, т. к. прямая $f^{-1}(l)$ обязана пересекать прямую l_x^α. В случае (j) прямая l_1 пересекает P_2 в точке a, а прямая l_3 пересекает P_2 в точке b. Тогда существует прямая l из дискретного конуса, лежащая в P_2, проходящая через точки a и b, пересекающая прямую l_2. Но тогда в E_3 прямая l будет иметь направление, отличное от направлений прямых l_1, l_2, l_3, что невозможно, как было отмечено выше.

Итак, $f(P)$ есть двумерная плоскость.

б) Пусть P — плоскость, натянутая на прямые l_0^1, l_0^2, а Q — гиперплоскость, порожденная прямыми $l_0^3, \dots, l_0^n, \dots$ Тогда легко убедиться, что $f(Q)$ есть также гиперплоскость, и т. к. пересечение $l_0 = P \cap Q$ есть прямая, проходящая через точку 0, то в силу п. а) образ прямой l_0 есть прямая. Значит, на плоскости P имеем минимальный дискретный конус $M_x = l_x^1 \cup l_x^2 \cup l_x$, где l_x — прямая, проходящая через точку x и параллельная прямой l_0.

Без ограничения общности можно считать, что $f(P) = P$ и $f(M_x) = M_{f(x)}$, $f(l_x) = l_{f(x)}$ и $f(l_x^i) = l_{f(x)}^i$ $(i = 1, 2)$.

с) Предположим, что f не непрерывный оператор. Оператор f не может иметь устранимых разрывов, поскольку в противном случае мы можем взять две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, сходящиеся к точке x_0 (где f, напр., имеет устранимый разрыв), такие, что $\{x_n\} \subset l_{x_0}^\alpha$, $\{y_n\} \subset l_{x_0}^\beta$ $(\alpha \neq \beta)$, т. е. для любого n

$$D_{x_0} \cap D_{x_n} = l_{x_0}^\alpha; \; D_{x_0} \cap D_{y_n} = l_{x_0}^\beta,$$

и это должно иметь место и после отображения:

$$D_{f(x_0)} \cap D_{f(x_n)} = l_{f(x_0)}^\alpha, \quad D_{f(x_0)} \cap D_{f(y_n)} = l_{f(x_0)}^\beta,$$

что однако невозможно, т. к. $\{f(x_n)\}$ и $\{f(y_n)\}$ сходятся к точке, отличной от $f(x_0)$.

Рассматриваем далее f на плоскости P. Пусть x_0 — точка, где оператор разрывен. Но тогда существуют последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, сходящиеся к точке x_0, причем $\{f(x_n)\}$ сходится к точке y_1, а $\{f(y_n)\}$ — к точке y_2, и $y_1 \neq y_2$. Так как f не имеет бесконечных скачков, то все это возможно. Легко построить последовательность $\{v_n^1\}$, сходящуюся к точке x_0, такую, что

$$\|v_1^1 - x_0\| < r_1, \; r_1 > 0; \quad v_n^1 \in l_{x_n}^2 \cap l_{y_n}^1,$$

где считаем, что в фиксированной полуплоскости Q, определяемой прямой, проходящей через y_1 и y_2, прямая l_x^1 лежит левее, а l_x^2 — правее прямой l_x. Пусть $\{f(v_n^1)\} \subset Q$. Последовательность $\{f(v_n^1)\}$ сходится к точке $z_1 \in Q$, отличной от точек y_1 и y_2. Рассматривая последовательности $\{x_n\}$ и $\{v_n^1\}$, найдем последовательность $\{x_n^1\}$, сходящуюся к точке x_0, такую, что $x_n^1 \in l_{x_n} \cap l_{v_n^1}^1$. Последовательность $\{f(x_n^1)\}$ сходится к точке y_1^1, лежащей в Q. Аналогично, рассматривая $\{y_n\}$ и $\{v_n^1\}$, построим последовательность $\{y_n^1\}$, где $y_n^1 \in l_{y_n} \cap l_{v_n^1}^2$, такую, что $\{f(y_n^1)\}$ сходится к точке $y_2^1 \in Q$. Рассматривая последовательности $\{x_n^1\}$, $\{y_n^1\}$, построим последовательность $\{v_n^2\}$, аналогичную последовательности $\{v_n^1\}$:

$$\|v_1^2 - x_0\| < r_2, \quad 0 < r_2 < r_1; \quad v_n^2 \in \overset{2}{l}_{x_n^1} \cap \overset{1}{l}_{y_n^1},$$

причем последовательность $\{f(v_n^2)\}$ сходится к точке $z_2 \in Q$, а расстояние ее до границы полуплоскости Q больше, чем расстояние точки z_1 до границы ∂Q, т. е. $\rho(z_2, \partial Q) > \rho(z_1, \partial Q)$. Таким образом, можно построить последовательности $\{v_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, такие, что $\|v_1^k - x_0\| < r_k$, $r_1 > r_2 > \ldots > r_k > \ldots > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(v_n^k) = z_k \in Q$, $\rho(z_1, \partial Q) < \rho(z_2, \partial Q) < \ldots < \rho(z_k, \partial Q) < \ldots$ и можно считать, что $\rho(f(v_1'), \partial Q) < \ldots < \rho(f(v_1^k), \partial Q) < \ldots$ Рассматривая последовательность $\{v_1^n\}_{n=1}^{\infty}$, которая сходится к точке x_0, видим, что

$$\lim_{n\to\infty} \|f(v_1^n)\| = \infty,$$

т. е. x_0 есть точка бесконечного скачка для оператора f. Полученное противоречие показывает непрерывность оператора f. Теорема доказана.

Пусть S_x есть сфера радиуса $r > 0$ с центром в точке x.

Теорема 3. *Если $f: H \to H$ — биективный оператор, такой, что $f(S_x) = S_{f(x)}$, то f есть аффинный оператор.*[1]

Доказательство. (a) Назовем r-прямой такое множество точек $\{x_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ на прямой, что $\|x_{n+1} - x_n\| = r$. Пусть l — произвольная прямая, а $\{x_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ — соответствующая ей r-прямая. Рассматривая множество $\bigcup\limits_n S_{x_n}$, в силу строгой выпуклости шаров в гильбертовом пространстве, легко убедиться, что $\{f(x_n)\}$ есть также r-прямая.

(b) Пусть T — множество точек, состоящее из вершин некоторого равностороннего треугольника с длиной стороны, равной $(2k+1)r$, и всех его точек на расстоянии r друг от друга. Множество T назовем k-треугольником. В силу (a) следует, что образ k-треугольника есть k-треугольник.

Пусть в каждой точке k-треугольника T взята сфера радиуса r. Полученное множество будем также называть k-треугольником и обозначать через $\widetilde{T}$.

(c) Пусть дана r-прямая l из п. (a). Фиксируем точку $x_0 \in l$. Рассмотрим последовательность k_i-треугольников $\widetilde{T}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, такую, что одна их сторона, скажем $\widetilde{L}_i$, лежит на прямой l и точка x_0 является серединой стороны $\widetilde{L}_i$; далее, если l' есть r-прямая, такая, что $l \cap l' = \{x_0\}$ и если $\{y_n\}$ — соответствующие прямой l' точки, то $y_0 = x_0$ и

$$S_{z_i} \cap \bigcup_n S_{y_n} \neq \varnothing \quad (i = 1, 2, \ldots) \quad \widetilde{T}_i \cap \widetilde{T}_j = \widetilde{L}_i, \quad k_i < k_j \, (i < j),$$

где z_i — вершина треугольника T_i, противоположная стороне L_i. Так как r-прямая l' ортогональна r-прямой l, то из сделанного выше построения следует, что образ r-прямой l' будет ортогонален образу r-прямой l.

[1] Примечание при корректуре. Как нам стало известно, результаты, подобные теореме 3, содержатся, напр., в работах А. Д. Александрова: ДАН СССР, т. 190, № 3, 1970, с. 502—505; т. 211, № 6, 1973, с. 1257—1260.

(d) Пусть G есть r-сетка, т. е. множество точек $\{x_{nm}\}$ $(-\infty < n, m < +\infty)$ на двумерной плоскости, таких, что для каждого n и для каждого m множества $\{x_{nm}\}_{m=-\infty}^{+\infty}$ и $\{x_{nm}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ соответственно суть r-прямые, ортогональные друг другу.

Из пп. (a), (c) и из того, что соседние параллельные r-прямые отобразятся в параллельные r-прямые, следует, что $f(G)$ есть r-сетка.

Если положить $x'_{nm} = f(x_{nm})$, то нетрудно видеть, что $\{x'_{mn}\}$ по смыслу совпадает с множеством $\{x_{nm}\}$, т. е. $\sqrt{2}r$-прямая отобразится монотонно на $\sqrt{2}r$-прямую.

Рассматривая r-прямую и $\sqrt{2}r$-прямую с общей точкой, лежащей на одной прямой, убеждаемся, что

$$f[S(x, \sigma r)] = S(f(x), \sigma r), \tag{9}$$

где $S(x, \sigma r)$ — сфера радиуса σr с центром в точке x, а σ есть дробная часть числа $\sqrt{2}$.

(e) В силу (9) можно повторить все наши рассуждения и убедиться, что $f[S(x, \sigma^2 r)] = S(f(x), \sigma^2 r)$, и вообще

$$f[S(x, \sigma^n r)] = S(f(x), \sigma^n r) \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{10}$$

(f) Пусть l — произвольная прямая, а $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ $(-\infty < n < +\infty)$ — произвольные r-прямые на ней. Ясно, что r-прямые $\{f(x_n)\}$ и $\{f(y_n)\}$ параллельны, и лежат на прямых l_1 и l_2 соответственно. Пусть $\delta > 0$ есть расстояние между этими прямыми. Найдется такое m, что $\sigma^m r < \delta/2$. Рассматривая две $\sigma^m r$-прямые l', l'', имеющие общую точку с прямыми $\{x_n\}$ и $\{y_m\}$ соответственно, имеем

$$\bigcup_n S(v_n, \sigma^m r) \cap \bigcup_n S(w_n, \sigma^m r) \neq \varnothing,$$

где $l' = \{v_n\}$, $l'' = \{w_n\}$, тогда как

$$f(\bigcup_n S(v_n, \sigma^m r)) \cap f(\bigcup_n S(w_n, \sigma^m r)) = \varnothing.$$

Получаем противоречие с биективностью отображения f. Значит оператор f произвольную прямую отображает на прямую.

(g) Используя равенство (10), легко убедиться в непрерывности отображения f. Если $\{D_x\}$ — семейство минимальных дискретных конусов, то $\{f(D_x)\}$ — аналогичное семейство минимальных дискретных конусов, т. е. выполнены условия замечания (i) к теореме 1. Значит, f есть аффинный оператор. Теорема доказана.

Замечание. Пусть $S_x(r)$ обозначает сферу радиуса $r > 0$ с центром в точке x. Если $f: H \to H$ — биективный оператор, такой, что $f[S_x(r_1)] = S_{f(x)}(r_2)$, $r_1, r_2 > 0$, то f есть аффинный оператор.

г. Новосибирск

Поступила
11 I 1972