Математические структуры и моделирование
1998. Вып. 2, с.30-33.

УДК 513.011

ЛОКАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА ГЕЛЬМГОЛЬЦА-ЛИ

А.К. Гуц

In this note an answer is given to the following question: In what case is the universal covering space of a metric space M with metric ρ isometric to the Euclidean space, the Lobachevsky space, or the sphere, when M is assumed to permit rotation in Busemann's sense on some open ball neighborhood $B(x,\delta_x), \delta_x > 0$, of each of its points (i.e., for any points a, a', b, b' in $B(x,\delta_x)$ such that $\rho(xa) = \rho(xa'), \rho(xb) = \rho(xb')$, and $\rho(ab) = \rho(a'b')$, there exists an isometry of the ball $B(x,\delta_x)$ onto itself, keeping x fixed and sending a to a' and b to b'?

Рассмотрим метрическое пространство M с метрикой ρ, допускающее в некоторой открытой шаровой окрестности $B(x,\delta_x), \delta_x > 0$, каждой своей точки x вращение в смысле Буземана, т.е. для любых точек a, a', b, b' из шара $B(x,\delta_x)$ таких, что $\rho(xa) = \rho(xa'), \rho(xb) = \rho(xb')$ и $\rho(ab) = \rho(a'b')$ существует изометрическое отображение шара $B(x,\delta_x)$ на себя, оставляющее точку x на месте и переводящее a в a' и b в b'. Спрашивается, в каком случае будет изометрично евклидову пространству, пространству Лобачевского или сфере универсальное накрывающее пространство для пространства M?

Эту задачу можно рассматривать как локальный вариант знаменитой проблемы Гельмгольца-Ли. Наиболее удовлетворительное решение проблемы дано в статье Г.Фрёйденталя [1]. Аналогичные результаты были получены и другими исследователями (см.литературу в [2]).

Известен следующий локальный вариант решения проблемы Гельмгольца-Ли, принадлежащий Г.Буземану.

Теорема А. *Если каждая точка x G-пространства Буземана $< M, \rho >$ имеет шаровую окрестность $B(x,\delta_x), \delta_x > 0$, допускающую вращение в смысле Буземана, то универсальное накрывающее пространство для M является элементарным, т.е. евклидовым пространством E^n, пространством Лобачевского H^n или сферическим пространством S^n* [3, с.411]. ■

E-mail: guts@univer.omsk.su
Омский государственный университет

Главным отличием излагаемого ниже результата от теоремы А является отказ от локальной продолжаемости и единственности кратчайшей.

Мы рассматриваем далее только локально компактное метрическое пространство M с внутренней метрикой ρ.

Обозначим через $r(x)$ точную верхнюю границу всех чисел $r > 0$ таких, что замкнутый шар $B'(x,r)$ является компактным подмножеством. Пусть далее $p(x)$ есть точная верхняя граница всех чисел $p_x > 0$, отвечающих точке $x \in M$ таких, что если $y, z \in B(x, p_x)$, то y соединяется с z кратчайшей. Как известно, функция $p(x)$ либо для всех x принимает значение $+\infty$, либо она всюду конечна и непрерывна.

Сформулируем следующие аксиомы.

$(A1)$ Каждой точке $x \in M$ сопоставлено число $d(x) > 0$, обладающее свойством: если $Is(x)$ обозначает группу всех изометрий шара $B'(x, d(x))$ на себя, то $Is(x)$ действует эффективно и транзитивно на каждой сфере $S(x,r)$, где $0 < r < d(x)$ и $\lambda(x) = x$ для любой изометрии $\lambda \in Is(x)$.

$(A2)$ Для каждой точки $x \in M$ существует число $\delta_x > 0$ такое, что

$$\delta_x < \min(d(x), r(x), p(x))$$

и выполняются условия:

a) сфера $S(x,r)$ связна для любого $r, 0 < r \leq \delta_x$;

b) существуют две различные точки $a_r, b_r \in S(x,r), 0 < r \leq \delta_x$, разделяющие $S(x,r)$, т.е. $S(x,r) \setminus \{a_r, b_r\} = A_1 \cap A_2$, где $A_1 \cup A_2 = \emptyset, A_1, A_2$ – непустые открытые в $S(x,r) \setminus \{a_r, b_r\}$ подмножества;

c) для каждого $r, 0 < r \leq \delta_x$ существует изометрия $\lambda \in Is(x)$ такая, что $\lambda(a_r) \in A_1$ и $\lambda(b_r) \in A_2$ либо $\lambda(a_r) \in A_2$ и $\lambda(b_r) \in A_1$.

$(A3)$ Для каждой точки $x \in M$ шар $B(x, d(x)$ допускает вращение в смысле Буземана.

$(A4)$ Для каждой точки $x \in M$ найдется точка $y \in M$ такая, что

$$\rho(xy) < \min(d(x), d(y), \delta_y).$$

$(A5)$ Между любыми двумя кратчайшими, исходящими из произвольной точки $x \in M$, существует угол в смысле А.Д. Александрова. Причем существуют, по крайней мере, две кратчайшие, исходящие из точки x, с ненулевым углом между ними.

Заметим, что аксиома $(A2)$ является локальным вариантом аксиом Фрейденталя (S) и (Z) (см.[1]). При этом цель условия b) – фиксировать размерность сфер, имея в виду *одномерные* сферы и, следовательно, двумерное пространство.

Аксиомы $(A3)$ и $(A4)$ – это всего лишь усиление аксиомы $(A1)$. Причем $(A4)$ позволяет исключить из рассмотрения пространства с многогранными метриками.

Определение 1. Пространство M, удовлетворяющее аксиомам $(A1) - (A5)$, называется r-пространством.

Теорема В [2]. *Пусть M полное r-пространство. Тогда M есть двумерное G-пространство Буземана, универсальное накрывающее для которого элементарно, т.е. является евклидовой плоскостью, плоскостью Лобачевского или сферой.* ■

Определение 2. Назовем r-плоскостью, лежащей в пространстве M, любое подмножество $A \subset M$, которое будучи наделенным индуцированной метрикой является полным r-пространством.

Введем следующие аксиомы:

S_1. В пространстве M существует хотя бы одна r-плоскость, и через каждые три точки из шара $B(x, \tau_x), 0 < \tau_x < d(x)$, где $x \in M$ – произвольная точка, проходит r-плоскость.

S_2. Если xy кратчайшая, соединяющая x и y, такая, что $x, y \in B(z, \tau_z)$ и x, y принадлежат r-плоскости A, то $xy \subset A$.

Справедлива, анонсированная в [5],

Теорема С. *Если M полное локально компактное метрическое пространство с внутренней метрикой ρ, удовлетворяющее аксиомам $(A3), S_1, S_2$, то M есть G-пространство Буземана, универсальное накрывающее для которого элементарно, т.е. является одним из трех $E_n, H^n, S^n, N \geq 2$.*

Доказательство. Проверим справедливость аксиом I-V G-пространства Буземана [3, с.54].

Пространство M является ограниченно компактным в силу того, что M – полное пространство с внутренней метрикой [4, с.75].

Если нам даны две различные точки x, z, то благодаря полноте пространства M существует кратчайшая xz. Следовательно, если $y \in xz$, то $\rho(xy) + \rho(yz) = \rho(xz)$.

Таким образом, для пространства M выполняются аксиомы I-III G-пространства Буземана.

Справедливость аксиомы IV вытекает из аксиомы S_1. В самом деле, пусть $y, z \in B(x, \tau_x)$. Возьмем еще точку $u \in B(x, \tau_x)$ и проведем через y, z и u r-плоскость A. Аксиома IV говорит, что кратчайшую yz можно продолжить за точку z. Поскольку, согласно аксиоме S_2, кратчайшая yz лежит в A, то достаточно продолжить yz за точку z в r-плоскости A. Последнее возможно, ибо A по теореме В есть G-пространство Буземана.

Докажем справедливость аксиомы V. Достаточно установить локальную единственность кратчайшей, соединяющей близкие точки. В этом легко убедиться, если обратиться к тому, как устанавливалась аксиома V при доказательстве теоремы 4 из [2] (все рассуждения делаются, по существу, для некоторой r-плоскости, проходящей через точки u, z_1, z_2 – см. подробности в [2, с.63, пункт (b)]).

Предположим, что сколь угодно близкие точки в M можно соединить не единственной кратчайшей. Пусть $x \in M$ и A некоторая r-плоскость, проходящая через x. Для r-плоскости A, согласно теореме 3 из [2], существует число

$\eta_x > 0$ такое, что в шаре $A \cap B(x, \eta_x)$ любая точка $y \in A \cap B(x, \eta_x)$ соединяется с x единственной кратчайшей $xy \subset A$. Поскольку, по предположению, подобное утверждение не верно для $B(x, \tau_x)$, то найдется точка $y \in B(x, \min(\eta_x, \tau_x))$, которая соединяется с x двумя различными кратчайшими L_1, L_2. Возьмем изометрию $\lambda \in Is(x)$ такую, что $\lambda(x) = x$ и переводящую точку y в некоторую точку, лежащую на A. Такая изометрия существует по аксиоме $(A3)$, и без ограничения общности можно считать, что диаметр r-плоскости A больше, чем $\rho(xy)$. В результате в соответствии с аксиомой S_2 имеем две различные кратчайшие $\lambda(L_1), \lambda(L_2) \subset A \cap B(x, \eta_x)$ в r-плоскости A и соединяющие x и $\lambda(y) \in A$. Это противоречит утверждению теоремы 3 из [2].

Итак, M есть G-пространство Буземана. Теперь утверждение теоремы C следует из теоремы A.

Теорема C доказана. ∎

В заключение представлены две задачи, для которых автор не сумел найти решения.

Задача 1. Можно ли опустить условие c) в аксиоме $(A2)$? Иначе говоря, нельзя ли доказать, что невозможно найти вращение $\lambda \in Is(x)$ такое, что $\lambda(a_r) \in A_1$ и $\lambda(b_r) \in A_1$?

Задача 2. Можно ли установить, что аксиома $(A5)$ есть следствие аксиом $(A1) - (A4)$?

Литература

1. Freudenthal H. *Neuere Fassungen des Riemann-Helmholz-Lieschen Raumproblems* // Math. Z. 1956. Hf.63. S.374-405.

2. Гуц А.К. *Характеризация двумерных элементарных геометрий* // Сиб.мат.ж. 1981. Т.22. N 6. С.54-64.

3. Буземан Г. *Геометрия геодезических.* – М.: ФМ, 1962.

4. Александров А.Д., Залгаллер В.А. *Двумерные многообразия ограниченной кривизны* // Тр. МИАН СССР. 1962. Т.63. С.3.

5. Гуц А.К. *Локальная проблема Гельмгольца-Ли* // IX Всесоюзная геометрическая конференция: Тез. докл. – Кишинев: КГУ, 1988. С.92.