Вычисленные предлагаемым методом уровни энергии для состояний $(8+0)$ и $(8+1)$ из уравнения (19) работы [2] с матрицами 2×2 равны: $E(8+0)=-2{,}319$, $E(8+1)=-0{,}696$; из уравнения (15) [2] с матрицами 3×3—$E(8+0)=-2{,}318$, $E(8+1)=-0{,}689$, $E(8+2)=-0{,}354$.

В работе [2] из уравнения (19) *было найдено* $E(8+0)=-2{,}317$, $E(8+1)=-0{,}717$; из уравнения (17)—$E(8+2)=-0{,}111$. Все значения уровней даны в единицах $Ry^*=me^4/(2\kappa^2\hbar^2\gamma_1)$, которые при $\kappa=16$ и $\gamma_1=13{,}27$ равны $Ry^*=4{,}005$ мэВ.

Радиальные функции для состояний $(8+0)$ и $(8+1)$ из уравнения (19) работы [2] даны на рисунках 1 и 2.

Видно, что радиальные функции, вычисленные на основе предлагаемого метода, находятся в согласии с результатами работы [2].

ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Schechter. J. Phys. Chem. Sol., **23**, 237, 1962. [2] K. S. Mendelson, H. M. James. J. Phys. Chem. Sol., **25**, 729, 1964. [3] А. А. Абрамов. ЖВМ и МФ, **1**, 733, 1961. [4] Е. С. Биргер, Н. Б. Лялякова. ЖВМ и МФ, **5**, 979, 1965. [5] А. А. Абрамов. ЖВМ и МФ, **1**, 542, 1961. [6] Е. С. Биргер. В сб.: Алгоритмы и алгоритмические языки, вып. 6, с. 3, М., ВЦ АН СССР, 1973. [7] Н. С. Бахвалов. Численные методы. М., Наука, с. 580. 1973. [8] Б. С. Парийский. Информ. бюлл. ВНТИЦентра, Алгоритмы и программы, вып. 2, П 003491 1979. [9] Б. С. Парийский. ЖВМ и МФ, **20**, 69, 1980.

Московский институт
инженеров железнодорожного транспорта

Поступило в редакцию
29 января 1979 г.

УДК 530.12 : 531.51

А. К. ГУЦ

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ВСЕЛЕННОЙ ГЁДЕЛЯ

В этой заметке мы исследуем глобальную топологическую структуру Вселенной Гёделя. Метрика Гёделя имеет следующий вид [1]:

$$g_x(dx)=a^2\left(dx^{0^2}-dx^{1^2}-dx^{3^2}+(1/2)\,e^{2x^1}dx^{2^2}+2e^{x^1}dx^0dx^2\right),\qquad(1)$$

где $a=\mathrm{const}$. Она удовлетворяет уравнениям Эйнштейна

$$R_{ik}-(1/2)\,g_{ik}R=(8\pi G/c^2)\,\rho u_i u_k+\Lambda g_{ik}$$

с космологической постоянной $\Lambda=-1/2a^2=-4\pi G\rho/c^2$ [1, 7]. В случае, когда $\Lambda=0$, правую часть уравнений гравитационного поля следует брать в виде тензора энергии-импульса идеальной жидкости с плотностью ρ и давлением p [2].

Координаты x^0, x^1, x^2, x^3 в (1) принимают любые вещественные значения; следовательно, пространство-время Гёделя $\widetilde{V}$ гомеоморфно евклидову пространству R^4. Однако это не единственная возможная глобальная структура лоренцева многообразия с метрикой (1).

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим группу движений $\widetilde{G}$ Вселенной Гёделя $\widetilde{V}$:

$$\overline{x^0}=x^0+\alpha,\ \overline{x^1}=x^1+\beta,\ \overline{x^2}=e^{-\beta}x^2+\gamma,\ \overline{x^3}=x^3+\delta,$$

где α, β, γ, δ — произвольные вещественные параметры. Группа $\widetilde{G}$ действует транзитивно на $\widetilde{V}$ и имеет тривиальную стационарную подгруппу $\widetilde{G}_x$ относительно произвольной точки $x=(x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$ многообразия $\widetilde{V}$. Следовательно, группа $\widetilde{G}$ диффеоморфна лоренцеву многообразию $\widetilde{V}$ ([3], стр. 129, 132), и можно далее отождествить $\widetilde{G}$ со Вселенной Гёделя $\widetilde{V}$.

Группа $\widetilde{G}$ имеет тип $G_4\mathrm{VI}_2$ в обозначениях М. Е. Осиновского, и топология групп Ли этого типа эквивалентна топологии следующих многообразий [4]:

$$R^4,\ R^3\times S^1,\ R^2\times S^1\times S^1,\qquad(2)$$

где S^1 — окружность. Обозначим через $\widetilde{G}$, G_1 и G_2 соответствующие указанным топологическим структурам (2) группы Ли. Группа G_i $(i=1,\ 2)$ получается из группы $\widetilde{G}$ факторизацией по дискретному центральному нормальному делителю D_i, т. е. $G_i=\widetilde{G}/D_i$.

Известно [5], что группа G_i будет обладать метрикой, которая индуцируется метрикой (1) на $\widetilde{G}$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$g_e(dx)=g_e(\mathrm{Ad}_{\widetilde{G}}(d)\,[dx])\qquad(3)$$

для любого элемента $d \in D_i$. Так как для центра связной группы присоединенное представление $\mathrm{Ad}_{\widetilde{G}}$ является тождественным автоморфизмом алгебры Ли группы G ([3], стр. 138), то равенство (3) выполняется автоматически. Следовательно, метрика (1) допускается группой G_i $(i = 1, 2)$, превращая последнюю в топологическую разновидность Вселенной Гёделя V_i (т. е. V_i — это лоренцево многообразие, изометричное G_i).

Подытоживая, мы можем сказать, что возможны три топологически различные Вселенные Гёделя: $\widetilde{V}$, V_1 и V_2. Их глобальная топология перечислена в (2). Модели $\widetilde{V}$, V_1 и V_2 назовем соответственно универсальной, цилиндрической и торической Вселенными Гёделя. Важно отметить, что группа $\widetilde{G}$ действует транзитивно не только на $\widetilde{V}$, но также на V_1 и V_2 ([3], стр. 132), т. е. Вселенные V_1 и V_2 однородные. Переход от $\widetilde{V}$ к V_i $(i = 1, 2)$ происходит с помощью отождествления точек определенных подмножеств, которые легко определяются благодаря заданию дискретного нормального делителя D_i.

1. Цилиндрическая Вселенная V_1. Центр группы G_1 изоморфен группе $R \oplus S^1$ [4]. Поэтому надо рассмотреть два случая:

a) D_1 состоит из преобразований вида $\overline{x}^a = x^a$ $(a = 0, 1, 2)$, $\overline{x}^3 = x^3 + n$, где n — любое целое число. Тогда V_1(a) получается отождествлением события (x^0, x^1, x^2, x^3) с событием $(x^0, x^1, x^2, x^3 + n)$. При этом ось x^3 превращается в окружность S^1, а $\widetilde{V}$ — в $V_1(\mathrm{a}) \approx R^3 \times S^1$. Цилиндрическая Вселенная V_1(a), так же, как и Вселенная Гёделя $\widetilde{V}$, содержит гладкие замкнутые времениподобные кривые (в. п. циклы) [1]. Отметим здесь, что в работе [6] в доказательстве отсутствия в. п. циклов во Вселенной $\widetilde{V}$ содержится ошибка.

b) D_1 состоит из преобразований вида $\overline{x}^0 = x^0 + n$, $\overline{x}^\alpha = x^\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$. В этом случае точка (x^0, x^1, x^2, x^3) отождествляется с точкой $(x^0 + n, x^1, x^2, x^3)$. Получаемая цилиндрическая Вселенная Гёделя V_1(b) обладает замкнутым временем и, следовательно, добавочными в. п. циклами [6].

Таким образом, хотя топологии Вселенных Гёделя V_1(a), V_1(b) эквивалентны, их геометрические и физические свойства различны.

2. Торическая Вселенная Гёделя V_2. Центр группы G_2 изоморфен двумерному тору $S^1 \oplus S^1$ [4]. Поэтому торическая Вселенная V_2 получается при отождествлении точки $(x^0 + n, x^1, x^2, x^3 + m)$ с точкой (x^0, x^1, x^2, x^3) в соответствии с заданием дискретного нормального делителя D_2, состоящего из преобразований вида: $\overline{x}^0 = x^0 + n$, $\overline{x}^1 = x^1$, $\overline{x}^2 = x^2$, $\overline{x}^3 = x^3 + m$, где n, m — любые целые числа. Вселенная V_2 имеет замкнутое время и добавочные в. п. циклы.

3. Существование в. п. циклов во Вселенных Гёделя рассматривают иногда как довод в пользу того, что эти модели не имеют физического смысла [7]. Такое мнение совсем не оправдано ([6; 8, стр. 679]). В самом деле, если воспользоваться координатами Гёделя (t, r, φ, y) для $\widetilde{V}$, в которых метрика (1) принимает вид [1]:

$$g_x(dx) = 4a^2\left(dt^2 - dr^2 - dy^2 + (\mathrm{sh}^4 r - \mathrm{sh}^2 r)\, d\varphi^2 + 2\sqrt{2}\,\mathrm{sh}^2 r\, d\varphi dt\right),$$

а в. п. циклы задаются соотношениями $r, t, y = \mathrm{const}$, $r \geqslant r_0 = \ln(1 + \sqrt{2})$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, то истинное время жизни „путешественника в прошлое“ равно [6]:

$$\tau = \frac{1}{c} \oint \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{g_{0\alpha}\, dx^\alpha}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} 8\sqrt{2}\pi a\, \mathrm{sh}^2 r\, d\varphi \geqslant 4\sqrt{\pi} / \sqrt{G\rho} \sim 10^{10} \text{ лет},$$

где мы приняли $\rho \sim 10^{-31}$ г/см^3. Аналогичная оценка справедлива для добавочных в. п. циклов во Вселенных V_1(b) и V_2.

Таким образом, мы имеем дело с явлениями, далеко выходящими за пределы наших знаний и наших обычных представлений о причинно-следственных связях. Более общий случай, приводящий к такому же выводу, анализировался нами в [6].

ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Gödel. Rev. Mod. Phys., **21**, 447, 1949. [2] Дж. Синг. Общая теория относительности, М., ИЛ, 1963. [3] С. Хелгасон. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М., Мир, 1964. [4] М. Е. Осиновский. Топология вещественных групп Ли небольшой размерности. III. Препринт ИТФ-72-149 Р, К., 1972. [5] M. E. Osinovsky. Communs Math. Phys., **32**, 39, 1973. [6] А. К. Гуц. Изв. вузов СССР, Физика, № 9, 33, 1973. [7] С. Хокинг, Дж. Эллис. Крупномасштабная структура пространства-времени, М., Мир, 1977. [8] Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. Строение и эволюция Вселенной, М., Наука, 1975.

Омский госуниверситет

Поступило в редакцию
23 января 1979 г.