Математические структуры и моделирование
2009, вып. 19, с. 78–84

УДК 531.111

СПОСОБ РАСЧЕТА СКАЧКОВ ЭНЕРГИИ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ

А.К. Гуц

Предлагается способ расчёта скачков плотности энергии при изменении размерности пространства и времени (соответственно, при изменении размерности пространства-времени).

Мы ощущаем, а физические эксперименты это подтверждают, что размерность нашего физического пространства равна 3. Это базовая размерность, и 3-мерное пространство является базовым физическим пространством, к которому привязан человеческий способ осознания (и созидания) Вселенной.

То же мы можем сказать о времени. Мы уверены, что оно одномерно. Это базовая размерность времени.

Следовательно, 4-мерное лоренцево многообразие – 4-мерное пространство-время – это базовая модель окружающей нас Реальности, частью которой являемся и мы сами.

Однако вполне допустимы локальные и глобальные изменения размерности физического пространства или времени. Размерность – это топологическая характеристика топологического пространства. С ней связан конкретный набор чисел Бетти. Для 3-мерного пространства 3-мерное число Бетти не равно нулю, а все m-мерные числа Бетти β_m с $m \geq 4$ являются нулевыми. Если вдруг 4-мерное число Бетти окажется отличным от нуля, то это говорит о том, что физическое пространство стало 4-мерным.

Ясно, что с точки зрения физики спонтанные (или искусственные) изменения размерности пространства или времени должны характеризоваться скачками (плотности) энергии.

Как оценить эти скачки плотности энергии?

Существуют различные интегральные формулы (интегралы по многообразию), связывающие скаляры, образованные из скалярной кривизны, секционных кривизн, сверток тензора Риччи и тензора кривизны с самими собой, с числами Бетти, с характеристикой Эйлера-Пуанкаре, с числами Понтрягина, с сигнатурой (формула Хинценбруха). Такие формулы называют чаще всего

Омский государственный университет.
E-mail: aguts@mail.ru

формулами Гаусса-Бонне-Черна. Подынтегральные выражения в этих формулах можно выразить через плотность энергии, которая входит в уравнения гравитационного поля, принимаемой к рассмотрению теории гравитации. Этой теорией может быть традиционная теория гравитации Эйнштейна или, к примеру, теория гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне.

Пишем одну формулу Гаусса-Бонне-Черна для базового пространства, а вторую – для пространства с изменённой размерностью. Обе дают оценку усреднённой плотности энергии; одна для базового пространства, а вторая для изменённого. Разница и есть искомый скачок энергии, характеризующий изменение такой топологической характеристики пространства-времени, как размерность.

Ясно, что существенные скачки плотности энергии могут быть обнаружены в астрономических наблюдениях обширных областей физического пространства. Поэтому не исключено, что размерность пространства-времени в таких областях Вселенной может быть отличной от 4, а размерность физического пространства вообще меняться с течением времени.

1. Формула Гаусса-Бонне-Черна для псевдоримановых многообразий M^{2k}

Пусть $< M^{2k}, g >$ – $2k$-мерное компактное ориентированное псевдориманово многообразие сигнатуры $< \underbrace{+...+}_{p}\underbrace{-...-}_{2k-p} >$.

Пусть $dv = \sqrt{|det(g)|}dx^1 \wedge ... \wedge dx^{2k}$ – $2k$-форма объема и

$$Pf_k(R) = \frac{(-1)^{[p/2]}}{2^{2k}(2\pi)^k k!}\varepsilon^{i_1 i_2 ... i_{2k}}_{j_1 j_2 ... j_{2k}} Ri_1 i_2 j_1 j_2 Ri_3 i_4 j_3 j_4 ... Ri_{2k-1} i_{2k} j_{2k-1} j_{2k},$$

где

$$\varepsilon^{i_1 i_2 ... i_{2k}}_{j_1 j_2 ... j_{2k}} = \begin{cases} +1, \{i_1 i_2 ... i_{2k}\} & \text{четная перестановка,} \quad \{j_1 j_2 ... j_{2k}\} \\ -1, \{i_1 i_2 ... i_{2k}\} & \text{нечетная перестановка,} \quad \{j_1 j_2 ... j_{2k}\} \\ \quad 0, \quad \text{среди} \quad \{i_1 i_2 ... i_{2k}\} & \text{или среди} \{j_1 j_2 ... j_{2k}\} \quad \text{есть одинаковые.} \end{cases}$$

Тогда [1,2]

$$\int\limits_{M^{2k}} Pf_k(R) dv = \chi(M^{2k}), \tag{1}$$

где

$$\chi(M^{2k}) = \sum_{m=0}^{2k} (-1)^m \beta_m(M^{2k})$$

– характеристика Эйлера-Пуанкаре многообразия M^{2k}.

2. Скачки размерности пространства-времени. Случай замкнутого многообразия

Из уравнений поля для $2k$-мерного псевдориманова пространства, т.е. для $2k$-мерного пространства-времени

$$R_{ik}^{(2k)} - \frac{1}{2} g_{ik}^{(2k)} R^{(2k)} = \kappa \varepsilon_{(2k)} u_i u_k,$$

а также из структуры формулы для компонент тензора кривизны, получаем, что

$$R^{(2k)} \sim \kappa\varepsilon_{(2k)},\ R_{ik}^{(2k)} \sim \kappa\varepsilon_{(2k)},\ R_{iklm}^{(2k)} \sim \kappa\varepsilon_{(2k)},\ R_{iklm}^{(2k)} R_{abcd}^{(2k)} \sim [\kappa\varepsilon_{(2k)}]^2, \ldots$$

Поэтому

$$Pf_k(R) \sim (\kappa\varepsilon_{(2k)})^{(2k-1)}.$$

Следовательно, с помощью формулы Гаусса-Бонне-Черна (1) получаем следующую оценку для среднего значения плотности энергии $2k$-мерной реальности:

$$(\kappa\langle\varepsilon_{(2k)}\rangle)^{(2k-1)} vol(M^{2k}) \sim \chi(M^{2k}).$$

Предположим, что базовым является 4-мерное пространство-время M^4, для которого $k=2$, и объем $vol(M^4) \sim l^4$.

Предположим также: Реальность такова, что размерность пространства-времени как модели Реальности «колеблется спонтанно» около размерности базового пространства-времени, т.е. следует наравне с M^4 рассматривать модели M^{2k}. Примем, что дополнительные размерности характеризуются величиной λ, малой по сравнению с числом l, т.е. $l/\lambda > 1$, и совершенно не важно, идет ли речь о пространственном дополнительном измерении или о временном.

Таким образом, при $k \geq 2$

$$vol(M^{2k}) \sim l^4 \lambda^{2k-4} = l^{2k} (\lambda/l)^{2k-4},$$

и поэтому

$$\langle\varepsilon_{(2k)}\rangle \sim \frac{1}{\kappa\lambda} \left(\frac{\chi(M^{2k})\lambda^3}{l^4} \right)^{1/(2k-1)}.$$

Следовательно, так как очевидно $[\chi(M^{2k})\lambda^3]/l^4 < 1$, то[1]

$$\langle\varepsilon_{(4)}\rangle \leq \langle\varepsilon_{(6)}\rangle \leq \ldots \leq \langle\varepsilon_{(2k)}\rangle \leq \ldots$$

Таким образом, мы видим, что переход к более мерному пространству-времени требует «затрат» энергии, а уменьшение размерности означает «сброс» энергии. При этом 4-мерная реальность, которую мы назвали базовой, является основным энергетическим уровнем с минимальной средней энергией.

Образно можно сказать, что реальность с размерностью большей, чем 4, – это возбужденное состояние базового состояния Реальности[2].

---

[1] С учетом, например того, что $M^{2k} = S^{2k}$ и $\chi(S^{2k}) = 2$.

[2] Возможно, что при более точных оценках, базовой окажется не 4-мерная реальность, а, скажем, 6-мерная. Фундаментальность 6-мерной размерности предсказывалась Бартини [3]

3. Вероятности переходов при смене размерности

Как вычислить вероятности переходов $M^{2k} \to M^{2p}$? Для этого воспользуемся подходом, предложенным в книге [4].

Реальность может представляться нам как псевдориманово многообразие M^n любой размерности n в зависимости от нашего способа созидания Реальности и ее осознания.

Фактически мы считаем, что переходы $M^{2k} \to M^{2p}$, влекущие скачки размерности прстранства и времени, происходят не в силу того, что это некоторый естественный природный процесс, а в силу того, что люди вынуждают Реальность (природу) совершать это в силу скачкообразной эволюции своих представлений о том, как устроена эта Реальность. Смена представлений – это смена способа осознания Реальности, смена своих идей-фантазий о структуре Реальности [5].

Базовым является 4-мерное лоренцево многообразие $< R^4, g^{(4)} >$. Обозначаем способы осознания как $\ell A, \ell B, ...$ В [4] способы осознания формализуются как гладкие кольца:

$$\ell A = C^\infty(\mathbb{R}^m), \quad \ell A = C^\infty(\mathbb{R}^n), ...$$

В случае способа осознания ℓA Реальность предстает как $(4+m)$-мерная среда $R^4_{\ell A}$ с метрикой $g^{(4)}(\ell A)$:

$$\sum_{I,J=1}^{4+m} g^{(4)}(\ell A)_{IJ} dz^I dz^J = g^{(4)}_{ik}(x^0, ..., x^3, a) dx^i dx^k + 2 s_{i\alpha} dx^i da^\alpha + h_{\alpha\beta} da^\alpha da^\beta, \quad (2)$$

$$z = (x, a), \quad x \in \mathbb{R}^4, \ a \in \mathbb{R}^m.$$

Имеем для амплитуды вероятности перехода от $(4+m)$-мерной среды (реальности) $R^4_{\ell A}$ к $(4+n)$-мерной среде (реальности) $R^4_{\ell B}$:

$$\langle g^{(4)}_1(\ell A) | g^{(4)}_2(\ell B) \rangle = \int_{g^{(4)}_1(\ell A)}^{g^{(4)}_2(\ell B)} \mathcal{D}[g^{(5)}(\ell A, \ell B)] e^{\frac{i}{\hbar} S[g^{(5)}(\ell A, \ell B)]}, \quad (3)$$

где

$$S[g^{(5)}(\ell A, \ell B)] = \kappa_m \int \sqrt{|g^{(5)}(\ell A, \ell B)|} R^{(5)}(\ell A, \ell B) d^5 x. \quad (4)$$

Для того чтобы написать эти формулы в более осмысленном виде, необходимо учесть наличие морфизма $\Phi : \ell B \to \ell A$ между способами осознания (стадиями) $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\ell B = \ell C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Это означает, что $a = \phi(b)$, где $a \in \mathbb{R}^n, \ b \in \mathbb{R}^m$.

Иначе говоря, вместо (3)-(4) пишем

$$\langle g^{(4)}_1(\ell A) | g^{(4)}_2(\ell B) \rangle = \int_{g^{(4)}_1(x, \phi(b))}^{g^{(4)}_2(x, b)} \mathcal{D}[g^{(5)}(b)] e^{\frac{i}{\hbar} S[g^{(5)}(b)]}, \quad (5)$$

где

$$S[g^{(5)}] = \kappa_m \int\int \sqrt{|g^{(5)}(x,b)|}R^{(5)}(x,b)d^5xd^mb. \qquad (6)$$

Формулы (5)-(6) дают нам искомые амплитуды вероятности переходов вида $M^{2k} \to M^{2p}$, где $M^{2k} = R^4_{\ell A}$ и $M^{2p} = R^4_{\ell B}$.

4. Формула Черна-Гаусса-Бонне для псевдоримановых многообразий M^{2k} с краем

Пусть M^{2k} псевдориманово мнгообразие с краем ∂M^{2k} и $q : T_1M^{2k} \to M^{2k}$ расслоение на сферы, ассоциированное с касательным расслоением TM^{2k} (т.е. состоящее из векторов касательного расслоения с нормой 1). Существует дифференциальная $(2k-1)$-форма σ на T_1M^{2k}, для которой

$$\int\limits_{q^{-1}(x)} \sigma = 1 \ \text{ для всех } x \in M^{2k}$$

и $q^*Pf_k(\Omega) = d\sigma$.

Всякое векторное поле T, нормальное к ∂M^{2k}, задает несингулярное сечение $\tau : \partial M^{2k} \to T_1M^{2k}$.

Тогда имеет место формула Черна-Гаусса-Бонне для псевдоримановых многообразий M^{2k} с краем [6]:

$$\int\limits_{M^{2k}} Pf(\Omega) = ind_{\partial M^{2k}}T + \int\limits_{\partial M^{2k}} \tau^*\sigma, \qquad (7)$$

где $ind_{\partial M^{2k}}$ определяется следующим образом.

Если T ненулевое векторное поле на ∂M^{2k}, $\overline{T}$ – продолжение векторного поля T на все многообразие M^{2k} и $a_1, ..., a_k$ – конечное число особых точек (нулей) поля $\overline{T}$ на M^{2k} [7, с.516], то

$$ind_{\partial M^{2k}}T = \sum_{j=1}^{k} ind_{a_j}\overline{T}.$$

Если поле T трасверсально (в частности, нормально) к ∂M^{2k}, то

$$ind_{\partial M^{2k}}T = \chi(M^{2k}).$$

В общем случае для ориентированного компактного многообразия с краем:

$$ind_{\partial M^{2k}}T = \chi(M^{2k}) - deg(K_T),$$

где $deg(K_T)$ – степень отображения $K_T : \partial M^{2k} \to S^{2k-1}$ [7, с.502], $K_T(x)$ равно точке на S^{2k-1}, отмеченной концом вектора $v = v^0T + v^1u_1 + ... + v^{2k-1}u_{2k-1}$, $\{u_1, ..., u_{2k-1}\}$ – базис в $T_x(\partial M^{2k})$, $x \in \partial M^{2k}$, $\sum_j v^j = 1$ [8].

Если Q^{2k} – $2k$-мерная компактная область в M^{2k} с границей ∂Q^{2k}, то формулу (7) можно переписать в виде

$$\int\limits_{Q^{2k}} Pf(\Omega) = ind_{\partial Q^{2k}} T + \int\limits_{\partial Q^{2k}} \tau^* \sigma, \tag{8}$$

где все формы и поля определяются как выше с заменой буквы M на букву Q.

5. Скачки размерности пространства и времени. Общий случай

Пусть у пространства-времени M^n размерности n область Q^n с границей (краем) ∂Q^n становится внутренней частью более мерной области Q^{n+1} (см. рис.1).

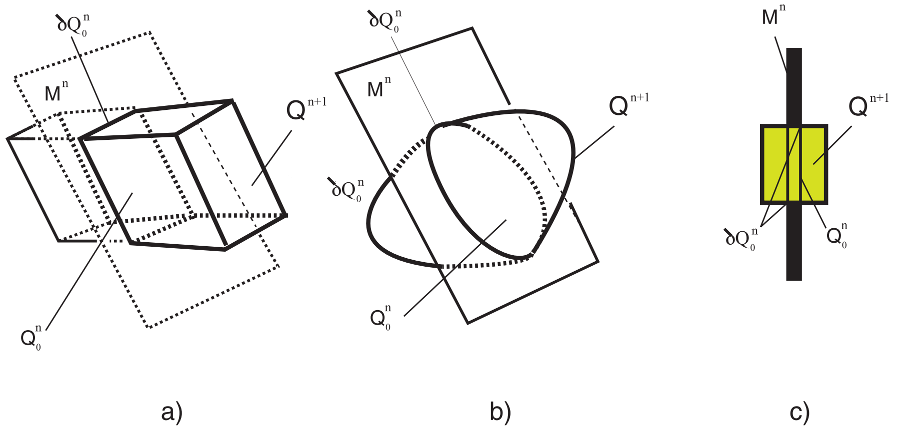

Рис. 1. a) Многообразие M^n, в котором клетка Q_0^n с границей (краем) ∂Q_0^n становится внутренней частью клетки Q^{n+1} большей размерности; b) сглаженный вариант левого рисунка ; c) вид «сбоку» на процедуру увеличения размерности многообразия в «месте» Q_0^n.

Поскольку формула Гаусса-Бонне-Черна нетривиальна для чётномерных многообразий, то считаем, что $n = 2k$, и включаем область Q^{n+1} как часть в $(n+2)$-мерную область Q^{n+2}.

Теперь для того чтобы оценить скачки энергии нам нужно выписать формулы Гаусса-Бонне-Черна для многообразия с краем (8) – одна для пары $(Q^n, \partial Q^n)$, а другая для пары $(Q^{n+2}, \partial Q^{n+2})$.

Следует заметить, что получение точных оценок скачков энергии на пути, указанном в данной заметке, является весьма трудной математической задачей, поскольку сложно выразить геометрические члены, входящие в формулы типа Гаусса-Бонне-Черна, через плотность энергии, содержащуюся в уравнениях поля.

6. Расчет изменения размерности физического пространства

Физическое прстранство моделируется математически как риманово многообразие, т.е. как пара $< V^n, g >$, где V^n – гладкое многообразие, а g – положительно определенная риманова метрика.

Мы можем считать, глядя на Реальность как на Нечто, находящееся в пространстве, что это Нечто меняется с течением времени t. Таков классический, доминковианский взгляд на Реальность.

Физическое пространство может иметь размерность $\dim = n$ с базовым значением $\dim = 3$. Предположим, что размерность в момент времени t_0 меняется и вместо значения n принимает значение m. Какая для этого требуется энергия?

Ясно, что расчёт скачка энергии можно провести по схеме, изложенной в предыдущих параграфах, с той только разницей, что пишутся формулы Гаусса-Бонне-Черна для римановых многообразий $< V^n, g^{(n)} >$ и $< V^m, g^{(m)} >$ и используются пространственные компоненты уравнения поля.

Литература

1. Avez, A. Formula de Gauss-Bonnet-Chern en métrique de signature quelconque / A. Avez // C.R. Acad. Sci. Paris. – 1962. – T.255. – P.2049-2051.
2. Chern, S.S. Pseudo-Riemannian Geometry and the Gauss-Bonnet Formula / S.S. Chern // Ann. Acad. Brasil Ci. – 1963. – V.35. – P.17-26.
3. Бартини, Р.О. Некоторые соотношения между физическими константами / Р.О. Бартини // Доклады Академии наук СССР. – 1965. – T.163, N.4. – C.861-864. – Режим доступа: http://www.univer.omsk.su/omsk/Sci/Bartini/s2.htm
4. Гуц, А.К. Элементы теории времени / А.К. Гуц. – Омск: Издательство Наследие. Диалог-Сибирь, 2004. – 364 с.
5. Гуц, А.К. Основы квантовой кибернетики: учебное пособие / А.К. Гуц. – Омск: Полиграфический центр КАН, 2008. – 204 с.
6. Pelletier, F. Quelques proprietes géométriques des variétés pseudo-riemanniennes singuliéres / F. Pelletier // Annales de la faculé des sciences de Toulouse 6^e série. – 1995. – T.4, N.1. – P.87-199.
7. Дубровин, Б.А. Современная геометрия / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, Ф.Т. Фоменко. – М.: Наука, 1979.
8. Alty, L.J. The Generalised Gauss-Bonnet-Chern Theorem / L.J. Alty // J.Math.Phys. – 1995. – V.36. – P.3094-3105.