

ИЗМЕНЕНИЯ ТОПОЛОГИИ И ГЕОМЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА, ПРИВОДЯЩИЕ К ОБРАЗОВАНИЮ КРОВОЙ НОРЫ

А.К. Гуц

В 3-мерном арифметическом пространстве \mathbb{R}^3 задаётся изменяющаяся с течением времени топология, от стандартной евклидовой до некомпактной неодносвязной, описывающей кротовую нору.

Классическое представление о физическом пространстве наделяет его таким фундаментальным топологическим свойством, как связность. Физическое пространство – суть связанное 3-мерное многообразие – объединяется с временем в единое 4-мерное пространство-время.

Топология 3-пространства, а точнее, такие его топологические свойства, как связность и односвязность, как показано в этой работе, могут изменяться при скачках энергии естественного (взрывы) или искусственного происхождения.

При нарушении связности пространства рождаются либо ответвления в пространстве-времени, либо 4-мерные кротовые норы. Образовавшееся ответвление – это, по сути дела, параллельный мир.

В случае нарушения односвязности появляются 3-мерные кротовые норы в пространстве.

И 4-мерные, и 3-мерные кротовые норы могут использоваться как для переходов в Прошлое (машина времени), так и для сверхбыстрых по часам Земля сверхдальних космических перелётов [1].

1. Физика образования 4-мерных кротовых нор

Если в пространстве-времени не существует или недоступна естественная кротовая нора, то придётся создавать её искусственный аналог.

В качестве одного из способов можно рассмотреть образование 4-мерной кротовой норы, начало которой находится в настоящем, а конец – либо в историческом прошлом, либо в историческом будущем. Следует заметить, что пространство-время с 4-мерной ручкой уже не является односвязным, оставаясь связным. Поэтому существуют пространственно-подобные несвязные гиперповерхности. При этом процесс рождения 4-мерной кротовой норы можно

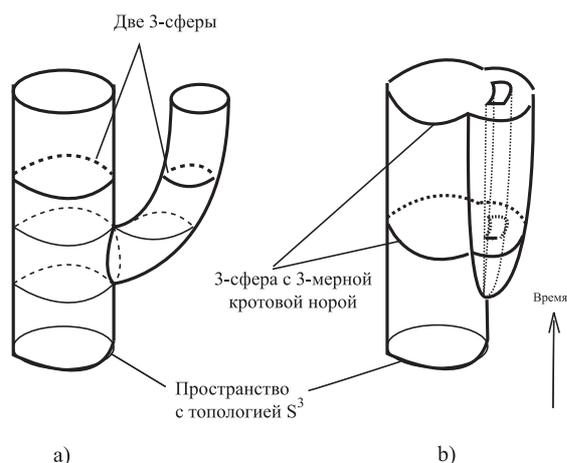


Рис. 1. а) рождение 4-мерной кротовой норы. Пространство с топологией 3-сферы теряет связность. Образуются два пространства, каждое из которых гомеоморфно 3-сфере.
 б) рождение 3-мерной кротовой норы в пространстве с топологией 3-сферы. Пространство теряет односвязность

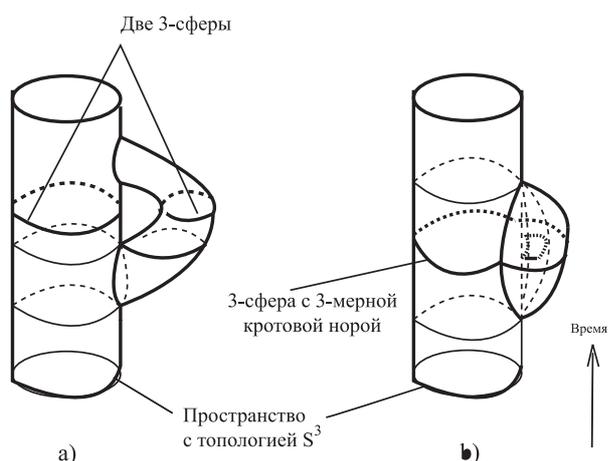


Рис. 2. а) рождение и исчезновение 4-мерной кротовой норы. Пространство с топологией 3-сферы теряет связность и вновь её обретает. б) рождение 3-мерной кротовой норы в пространстве с топологией 3-сферы. Пространство теряет односвязность, а затем опять становится односвязным

рассматривать как отрыв от 3-мерного пространства M^3 некоторой области $D_0 \subset M^3$.

Другими словами, образование 4-мерной кротовой норы означает нарушение связности пространственно-подобной гиперповерхности. Топологически (и геометрически) этот процесс может быть реализован стягиванием в точку границы отрываемой 3-мерной области D_0 . В дальнейшем мы вклеим оторванную область в необходимую точку пространства-времени.

Следует отметить, что математически процедура склеивания двух несвязных областей 3-мерного пространства представляется более сложным процессом, чем разрыв связной области на несвязные компоненты. Это вызвано тем, что при разрыве на две компоненты процесс стягивания границ в точку можно

обратить, так как эта точка является в действительности некоторой двумерной областью нулевой площади, полученной в результате непрерывной деформации. При склеивании двух несвязных компонент мы сначала выберем по точке в каждой области, а потом отождествим их. После этого точка, соединяющая склеенные части 3-мерной гиперповерхности, остаётся истинной точкой, в отличие от предыдущего случая. И мы не сможем так же просто растянуть точку в двумерную область.

1.1. Разрыв пространства

Разрыв пространства осуществим за счёт рассмотрения изменяющейся топологии и геометрии на одном и том же множестве M^3 .

Можно построить вложение рассматриваемого множества M^3 в объемлющее 4-мерное пространство в виде семейства римановых 3-пространств, реализующих привычную картину разрыва на два несвязных куска. Эту картину оставляем как тренировку воображения читателя: её строгая математическая формализация не является сложной задачей.

1.2. Оценка скачка энергии, необходимого для разрыва пространства

Если теперь рассмотреть модель связного, но неодносвязного пространства-времени, то вполне можно обнаружить несвязные трёхмерные пространственно-подобные сечения. Более того, несвязное сечение M_1^3 может получиться из связного M_0^3 с помощью сферической перестройки [2], и, следовательно, связное и несвязное сечения можно рассматривать как начальное и конечное состояния некоторого геометродинамического процесса (лоренцев кобордизм [2]). В ходе этого процесса 3-геометрия претерпевает переход через некоторое критическое состояние $M_{1/2}^3$, которое отвечает нарушению связности пространственно-подобного сечения.

Было бы интересно выяснить [2], при каких условиях происходит нарушение связности пространственно-подобных сечений, или, если оставить в стороне конкретную дифференциально-топологическую модель, выяснить — возможно ли, что в ходе некоторого физического процесса трёхмерное пространство M_0^3 становится несвязным. Допуская вольность в словах, можно сказать, что нарушение связности означает отрывание области D_0 от M_0^3 .

Рождение 4-мерной кротовой норы означает, что 3-мерный кусок D_0 отделяется, оставляет 3-мерное физическое пространство M_0^3 .

Переход от M_0^3 к M_1^3 можно осуществить, стягивая в точку α^* границу ∂D_0 замкнутой области $D_0 \subset M_0^3$. Получается пространство $M_{1/2} = C_{1/2} \cup D_{1/2}$, где $C_{1/2}$ и $D_{1/2}$ имеют одну общую точку α^* (результат стягивания ∂D_0) и являются связными гладкими многообразиями, диффеоморфными связными компонентами пространства M_1^3 . Затем идёт отрыв $C_{1/2}$ от $D_{1/2}$; получаем M_1^3 .

Геометрически (метрически) нарушение связности можно охарактеризовать как процесс уменьшения до нуля площади поверхности ∂D_0 , ограничиваю-

щей отрывающуюся область D_0 . Значит, связность пространства нарушается вследствие возмущения 3-метрики $\gamma_{\alpha\beta} \rightarrow \gamma_{\alpha\beta} + \delta\gamma_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$). Локальное возмущение 3-метрики ведёт к изменению кривизны 3-пространства. В рамках общей теории относительности 3-пространство рассматривается как пространственно-подобное сечение пространства-времени. Поэтому следует исходить из возмущения 4-метрики g_{ik} ($i, k = 0, 1, 2, 3$) пространства-времени, индуцирующего возмущение 3-метрики $\gamma_{\alpha\beta}$ 3-пространства. Согласно уравнениям Эйнштейна, исходной причиной возмущения метрики является появление дополнительного локального энергетического источника. Необходимые затраты энергии, влекущие нарушение связности 3-пространства, можно было бы легко подсчитать, если бы имелась формула, связывающая некоторую числовую характеристику связности пространства с кривизной этого пространства.

В случае замкнутого 3-пространства M^3 такой числовой характеристикой является нульмерное число Бетти $\beta_0(M^3)$ [3]. Необходимая же формула также имеется, правда, лишь для частного случая замкнутого ориентированного риманова 3-пространства M^3 с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$, допускающего регулярное единичное киллингово векторное поле ξ [4]:

$$\frac{1}{2\pi l(\xi)} \int_{M^3} \{K(\xi^\perp) + 3K(\xi)\} dv = 2\beta_0(M^3) - \beta_1(M^3) + d_0, \quad (1)$$

где $d_0 = 0$ или 1 в зависимости от чётности или нечётности одномерного числа Бетти $\beta_1(M^3)$; $K(\xi^\perp)$ – значение римановой кривизны в плоскости, ортогональной ξ ; $K(\xi)$ – значение римановой кривизны для любой плоскости, содержащей ξ (отметим, что $K(\xi)$ не зависит от выбора плоскости); dv – форма объёма; $l(\xi)$ – длина интегральной траектории поля ξ (она постоянна).

Осуществим отрывание области D_0 следующим образом. На 3-многообразии M_0^3 зададим семейство римановых метрик $\gamma_{\alpha\beta}(t)$, $t \in [0, 1]$, удовлетворяющее условиям:

а) $\gamma_{\alpha\beta}(t)$ при $0 \leq t < 1/2$ C^2 -гладкое тензорное поле, а при $t \geq 1/2$ оно имеет разрывы производных первого рода на границе ∂D_0 замкнутой области D_0 ;

б) (стягивание ∂D_0 в точку α^*) площадь σ_t границы ∂D_0 , вычисленная в метрике $\gamma_{\alpha\beta}(t)$, стремится к нулю при $t \rightarrow 1/2 - 0$, или, иначе,

$$dv_t|_{\partial D_0} \xrightarrow{t \rightarrow \frac{1}{2} - 0} 0$$

и

$$dv_t|_{\partial D_0} = 0 \text{ при } t \geq 1/2,$$

где dv_t – форма объёма в метрике $\gamma_{\alpha\beta}(t)$; $dv_s/dv_t \leq 1$ на M_0^3 , $t < \frac{1}{2} < s$;

в) пространство $\langle M_0^3, \gamma_{\alpha\beta}(0) \rangle$, т.е. M_0^3 с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}(0)$ является связным C^2 -гладким римановым многообразием, а $C_t \equiv (M_0 \setminus D_0) \cup \{\alpha^*\}$ и $D_t \equiv D_0 \cup \{\alpha^*\}$ с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}(t)$, $t \geq 1/2$, и дополненные точкой α^* , представляют собой C^2 -гладкие связные римановы замкнутые многообразия;

г) $\partial\gamma_{\alpha\beta}/\partial n$, где n – нормаль к пространству $\langle M_0^3, \gamma_{\alpha\beta}(t) \rangle$, непрерывны;

- д) $\gamma_{\alpha\beta}(t) = \gamma_{\alpha\beta}(0)$ вне окрестности O_ε области D_0 ;
 е) пространство $\langle M_0^3, \gamma_{\alpha\beta}(t) \rangle$, $t > 1/2$ имеет неотрицательную кривизну;
 ж) пространство $\langle M_0^3, \gamma_{\alpha\beta}(t) \rangle$, $t \in [0, 1]$ допускает регулярное единичное киллингово поле ξ_t .

Последнее предположение самое неприятное, так как в ходе отрыва D_0 от M_0^3 симметрия 3-пространства, по-видимому, может исчезнуть при приближении к критическому значению $t = 1/2$. Но, понимая это, мы вынуждены вводить условие «ж» для того, чтобы иметь право пользоваться формулой (1). Отметим, что на необходимость допустить симметрии как средство хоть как-то продвинуться в решении поставленной нами задачи указывал автор работы [2].

Индексом t будем помечать объекты, относящиеся к пространству $\langle M_0^3, \gamma_{\alpha\beta}(t) \rangle$.

Для простоты будем считать, что всегда $\beta_1 = 0$. Пространство $\langle M_0^3, \gamma_{\alpha\beta}(t) \rangle$ при $t < 1/2$ связно, и поэтому

$$\int_{M_0^3} f(\xi_t) dv_t = 4\pi l(\xi_t), \quad (2)$$

где

$$f(\xi_t) = K(\xi_t^\perp) + 3K(\xi_t).$$

При $s > 1/2$ пространство $\langle M_0^3, \gamma_{\alpha\beta}(s) \rangle$ имеет уже две связные компоненты. Следовательно,

$$\int_{C_s} f(\xi_s) dv_s = 4\pi l(\xi_s'), \quad \int_{D_s} f(\xi_s) dv_s = 4\pi l(\xi_s''), \quad (3)$$

где штрихи над ξ_s различают поле ξ_s на связных компонентах.

Из (2), (3) получаем

$$\int_{O_\varepsilon} \{f(\xi_s) dv_s - f(\xi_t) dv_t\} = 4\pi \{l(\xi_s') + l(\xi_s'') - l(\xi_t)\}.$$

Естественно считать, что объем области D_0 мал по сравнению со всем пространством. Поэтому $l(\xi_s') \sim l(\xi_t)$, а $l(\xi_s'')$ по порядку величины совпадает с линейным размером λ области D_0 . Далее, в O_ε для достаточно близких к $1/2$ значений t, s $dv_s/dv_t \leq 1$ в силу «б». Но тогда благодаря условию «е» имеем

$$\int_{O_\varepsilon} f(\xi_s) dv_t \geq \int_{O_\varepsilon} f(\xi_s) \frac{dv_s}{dv_t} dv_t \sim 4\pi\lambda + \int_{O_\varepsilon} f(\xi_t) dv_t,$$

т.е.

$$\int_{O_\varepsilon} \delta f \cdot dv_t \sim 4\pi\lambda, \quad (4)$$

где $\delta f \equiv f(\xi_s) - f(\xi_t)$, точнее,

$$\delta f \equiv \lim_{s \rightarrow 1/2+0} f(\xi_s) - \lim_{t \rightarrow 1/2-0} f(\xi_t).$$

Вводя среднее значение величины g

$$\langle g \rangle = \frac{1}{v_t(O_\varepsilon)} \int_{O_\varepsilon} g d\upsilon_t,$$

где $v_t(O_\varepsilon)$ – объем области O_ε в метрике $\gamma_{\alpha\beta}(t)$, перепишем (4) в следующем виде:

$$\langle \delta f \rangle \cdot v_t(O_\varepsilon) \sim 4\pi\lambda. \quad (5)$$

Это соотношение говорит о том, что отрыв области D_0 сопровождается скачком кривизны 3-пространства. Так как для скалярной кривизны $R^{(3)}$ 3-пространства можно написать [5, с.140].

$$R_t^{(3)} = 2\{K(\xi_t^\perp) + 2K(\xi_t)\},$$

то следует предположить

$$\langle \delta R^{(3)} \rangle \sim \langle \delta f \rangle. \quad (6)$$

Из уравнений Эйнштейна имеем [6, с.157]

$$R_t^{(3)} + K_{2,t} = \frac{16\pi G}{c^4} \varepsilon(t), \quad (7)$$

где

$$K_{2,t} = (K_\alpha^\alpha)^2 - K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta},$$

и $K_{\alpha\beta}$ – тензор внешней кривизны пространственного сечения; $\varepsilon(t)$ – плотность энергии.

Благодаря условию «г», инвариант $K_{2,t} = K_{2,t}(x)$, $x \in M_0$, $t \in [0, 1]$ будет непрерывной функцией на $M_0^3 \times [0, 1]$. Следовательно, если $\delta K_2 = K_{2,s} - K_{2,t}$, то

$$\langle \delta K_2 \rangle = [K_{2,s} - K_{2,t}]|_{x=x_0(t,s)} \xrightarrow[t \rightarrow \frac{1}{2}-0]{s \rightarrow \frac{1}{2}+0} 0.$$

Поэтому для некоторых $t_0 < 1/2$ и $1/2 < s_0$ величина $\langle \delta K_2 \rangle$ пренебрежимо мала, и тогда из (5), (6), (7) получаем

$$\langle \delta \varepsilon \rangle \sim \frac{c^4}{4\pi G} \frac{\lambda}{v_{t_0}(O_\varepsilon)},$$

или можно написать

$$\boxed{\langle \delta \varepsilon \rangle \sim \frac{c^4}{4\pi G} \frac{1}{\sigma}}, \quad (8)$$

где σ – характерное сечение области D_0 .

Требуемая оценка получена¹.

¹В статье [7] оценка (3.32) выведена без предположения о компактности 3-пространства.

1.3. Учёт скачка внешней кривизны 3-пространства

Мы получили оценку (8) скачка энергии при условии г), означающего непрерывность внешней кривизны $K_{\alpha\beta}$ пространственно-подобной гиперповерхности. Величина $\langle \delta\varepsilon \rangle$ обратно пропорциональна площади характерного сечения σ отрываемой области D_0 . Для уменьшения скачка плотности энергии необходимо отказаться от непрерывного изменения внешней кривизны 3-мерного пространства в процессе нарушения его связности [8].

Отметим, что тензор $K_{\alpha\beta}$ задаётся соотношением

$$K_{\alpha\beta} = -e_\beta \nabla_\alpha n,$$

в котором базисные вектора e_β на гиперповерхности M_0^3 мы выбрали совпадающими с соответствующими базисными векторами в пространстве-времени, а временную координату x^0 зададим таким образом, чтобы вектор нормали n совпадал с e_0 . Такая система координат в 4-мерном пространстве-времени будет синхронной, а система координат на гиперповерхности – гауссовой нормальной (если мы дополнительно будет полагать $g_{00} = 1$). В этом случае

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial n} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^0}.$$

Предполагаем, что при $t = 1/2$ производная по времени от метрического тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ имеет разрыв первого рода. Это означает разрыв первого рода компонент тензора внешней кривизны.

Тогда из уравнения (7) имеем:

$$\langle \delta R^{(3)} \rangle + \langle \delta K_2 \rangle = \frac{16\pi G}{c^4} \langle \delta\varepsilon \rangle. \quad (9)$$

Из (5), (6) следует, что

$$\langle \delta R_t^{(3)} \rangle \sim \frac{4\pi}{\sigma}. \quad (10)$$

Таким образом, можно надеяться снизить затраты на скачок энергии для разрыва пространства, если принять, что скачок внешней кривизны равен

$$\langle \delta K_2 \rangle \sim \frac{1}{\sigma}$$

или, что равносильно,

$$\left\langle \delta \left(\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial x^0} \right) \right\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma}}. \quad (11)$$

Отметим, что внешняя кривизна имеет значение не только в момент разрыва двух областей пространственно-подобной гиперповерхности, но и при стягивании границы области D_0 в точку. Внешняя кривизна, по своей сути, определяет характер вложения гиперповерхности в объемлющее пространство. Поэтому стягивание границы отрываемой области в точку α^* , несомненно влекущее непрерывную деформацию гиперповерхности, соответствует изменению внешней кривизны пространства M_t^3 .

2. Топологическое описание образования 4-мерной кротовой норы

До сих пор основные результаты о нарушении связности пространственно-подобной гиперповерхности касались физической стороны вопроса. Давайте посмотрим на это явление с топологической точки зрения. Покажем, как реализуется разрыв некоторой области на две области.

Разрыв будем осуществлять за счёт рассмотрения семейства изменяющихся топологий на одном и том же множестве M .

Но прежде напомним полезное для наших целей определение топологии.

2.1. Топология и её задание

Если дано множество точек, то можно задать вопрос о форме, которую это множество имеет. В современной математике слово «форма» заменяется на слово «топология».

Топология (форма) множества M зависит от того, как для каждой точки задаётся то, что называется её *окрестностями*. Окрестность U_x точки x – это перечень тех других точек множества M , которые объявляются *близкими* к точке x .

Топология на множестве M – это семейство $\mathcal{T} = \{(U_x^\alpha)_{\alpha \in A_x} : x \in M\}$ окрестностей точек множества M , удовлетворяющих двум условиям:

- а) для любых $x \in M$ и $\alpha \in A_x$ $x \in U_x^\alpha$;
- б) для любых $U_x^\alpha, U_x^{\alpha'}$ существует $U_x^{\alpha''} \subset U_x^\alpha \cap U_x^{\alpha'}$.

На одном и том же множестве M можно задать разные топологии, переопределяя то, что считать близким к той или иной точке. В результате *форма* (топология) у одного и того же множества может меняться самым кардинальным образом. Например, множество может иметь форму отрезка прямой, а может быть парой отрезков. Как это может быть сделано, показано в § 2.2.

2.2. Нарушения связности отрезка

Для начала разорвём отрезок $[0,1]$ на два: $[0,1/2]$ и $[1/2,1]$, при этом единственная на отрезке $[0,1]$ точка $1/2$ раздваивается.

На отрезке $[0,1]$ определим параметрическое семейство функций $f_t(x)$, $t \in [0,1]$, такое, что для любого $x \in [0,1]$

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = 2|x - 1/2|,$$

а при $t \in (0,1)$ семейство функций f_t представляет непрерывную деформацию функции f_0 в функцию f_1 , причём все $f_t(x)$ ($t < 1$) непрерывны вместе с первыми производными. Единственной функцией, производная которой имеет разрыв первого рода в точке

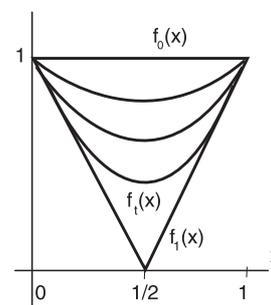


Рис. 3. Функции $f_t(x)$

$x = 1/2$, является $f_1(x)$ (рис. 3). Более того, для любого t

$$f_t(1) = f_t(1) = 1.$$

Рассмотрим топологическое подпространство

$$\Gamma_t = \{(x, f_t(x), f'_t(x-0)), (x, f_t(x), f'_t(x+0))\}$$

с индуцированной топологией трехмерного арифметического пространства \mathbb{R}^3 , где $f_t(x \pm 0) = \lim_{z \rightarrow x \pm 0} f_t(z)$. Две точки (a, b, α) и (c, d, β) пространства Γ_t назовём эквивалентными тогда и только тогда, когда

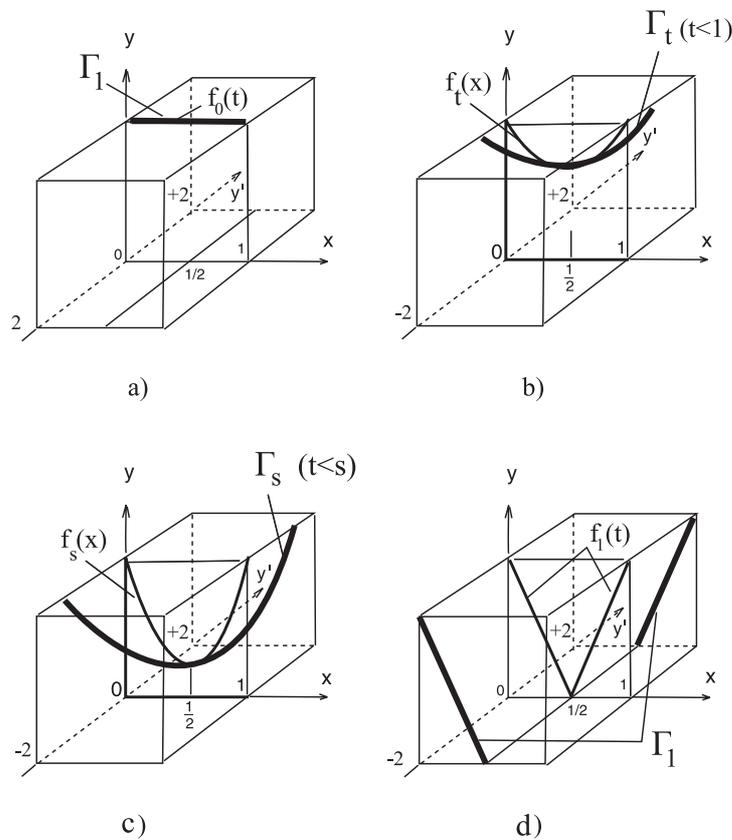


Рис. 4. а) пространство Γ_0 – отрезок; б) пространство Γ_t при $0 \leq t < 1$ – это кривая $x \rightarrow (x, f_t(x), f'_t(x))$, гомеоморфная отрезку $[0, 1]$; в) пространство Γ_s при $t < s < 1$ – это кривая $x \rightarrow (x, f_s(x), f'_s(x))$, гомеоморфная отрезку $[0, 1]$; д) пространство Γ_1 (справа) – это два отрезка; Γ_1 несвязно и гомеоморфно паре отрезков $[0, 1] \cup [2, 3]$

- 1) $a = c$;
- 2) $b = d$;
- 3) $\alpha \equiv \lim_{x \rightarrow a-0} f'_t(x) = \lim_{x \rightarrow c+0} f'_t(x) \equiv \beta$.

Профакторизуем пространство Γ_t по введённому отношению эквивалентности \sim . Получаем фактор-пространство Γ_t / \sim .

Нетрудно увидеть, что это фактор-пространство при $t < 1$ гомеоморфно отрезку $[0, 1]$, а при $t = 1$ несвязному пространству $[0, 1] \cup [2, 3]$. Удобно последнее

несвязное пространство обозначить как $\Gamma_1/\sim = [0, (1/2)_-] \cup [(1/2)_+, 1]$. Итак, мы определили семейство топологических пространств $\{\langle \Gamma_t/\sim, \mathcal{T}_t \rangle\}$, где \mathcal{T}_t рассмотренная фактор-топология на Γ_t/\sim . При этом, если $t \neq 1$, то $\Gamma_t/\sim \approx [0, 1]$, а $\Gamma_1/\sim = [0, (1/2)_-] \cup [(1/2)_+, 1]$, и справедливы соотношения $[0, (1/2)_-] \approx [0, 1]$ и $[(1/2)_+, 1] \approx [0, 1]$. Таким образом, мы рассмотрели разрыв отрезка на два с топологической точки зрения.

2.3. Нарушение связности для сфер S^2 и S^3

Деление сферы S^2 . Разрыв сферы S^2 проведём по аналогии с представленными выше результатами. Введём линейное отображение $\mu(\theta) : [-\pi/2, +\pi/2] \rightarrow [0, 1]$ такое, что $\mu(-\pi/2) = 0, \mu(0) = 1/2, \mu(\pi/2) = 1$. Далее, на сфере зададим семейство функций $\tilde{f}_t(\theta, \varphi)$ (здесь $\theta \in [-\pi/2, +\pi/2], \varphi \in [0, 2\pi]$) такое, что

- 1) $\tilde{f}_t(\theta, \varphi) = \tilde{f}_t(\theta)$;
- 2) $\tilde{f}_t(\theta) = f_t(x), x = \mu(\theta)$, где $f_t(x)$ определена в предыдущем параграфе.

Рассмотрим множество пар

$$\Gamma_t = \{((\varphi, \theta), \tilde{f}_t(\theta), \frac{d\tilde{f}_t}{d\theta}(\theta - 0)), ((\varphi, \theta), \tilde{f}_t(\theta), \frac{d\tilde{f}_t}{d\theta}(\theta + 0))\}.$$

Тогда точки A и B множества Γ_t , такие что $A = ((a, b), \alpha, u)$ и $B = ((c, d), \beta, v)$, назовём эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

во-первых,

- 1) $a = c, b = d$;
- 2) $\alpha = \beta$;
- 3) $v \equiv \lim_{\theta \rightarrow b-0} \frac{d\tilde{f}_t(\theta)}{d\theta} = \lim_{\theta \rightarrow b+0} \frac{d\tilde{f}_t(\theta)}{d\theta} \equiv u$;

во-вторых,

- 1) $b = d = 0$;
- 2) $\alpha = \beta$;
- 3) $v \equiv \lim_{\theta \rightarrow 0-0} \frac{d\tilde{f}_t(\theta)}{d\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0-0} \frac{d\tilde{f}_t(\theta)}{d\theta} \equiv u$ и $\lim_{\theta \rightarrow 0-0} \frac{d\tilde{f}_t(\theta)}{d\theta} \neq \lim_{\theta \rightarrow 0+0} \frac{d\tilde{f}_t(\theta)}{d\theta}$

или, в-третьих,

- 1) $b = d = 0$;
- 2) $\alpha = \beta$;
- 3) $v \equiv \lim_{\theta \rightarrow 0+0} \frac{d\tilde{f}_t(\theta)}{d\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0+0} \frac{d\tilde{f}_t(\theta)}{d\theta} \equiv u$ и $\lim_{\theta \rightarrow 0-0} \frac{d\tilde{f}_t(\theta)}{d\theta} \neq \lim_{\theta \rightarrow 0+0} \frac{d\tilde{f}_t(\theta)}{d\theta}$.

Два последних условия эквивалентности отождествляют все точки экватора $\theta = 0$ – стягивают экватор в точку. Причём экватор раздваивается в зависимости от того $\theta \rightarrow 0 + 0$ (верхний берег экватора, рис. 5) или $\theta \rightarrow 0 - 0$ (нижний берег экватора, рис. 5). Поэтому при стягивании появляются две точки, и, следовательно, сфера делится на две разные сферы (рис. 5).

Таким образом, мы определили семейства топологических пространств

$$\{\langle \Gamma_t/\sim, \mathcal{T}_t \rangle\}.$$

Нетрудно понять, что при $t \neq 1$ $\langle \Gamma_t / \sim, \mathcal{T}_t \rangle \approx S^2$, а при $t = 1$ $\langle \Gamma_1 / \sim, \mathcal{T}_1 \rangle \approx S^2 \cup S^2$, т.е. две сферы (рис. 5).

Деление сферы S^3 . Разрыв осуществляется аналогично разрыву двумерной сферы S^2 . На экваторе для стягивания экваториальной 2-сферы в точку углы φ и θ берутся любыми, а третья угловая координата χ выполняет роль θ .

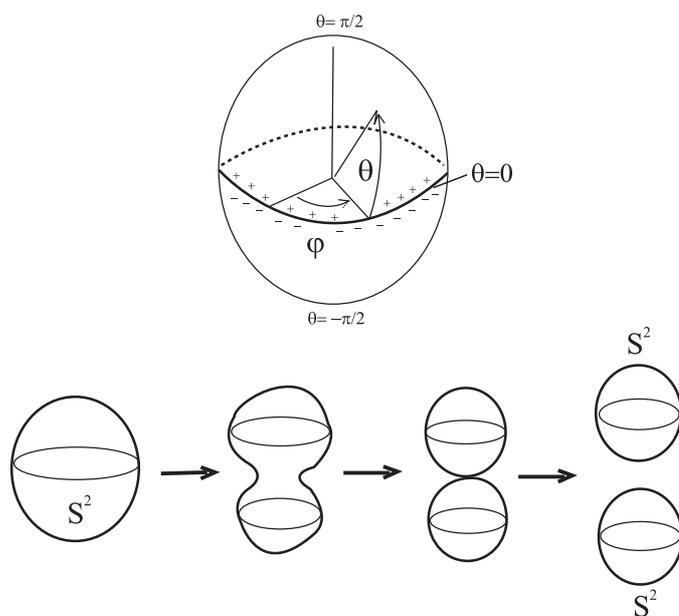


Рис. 5. Рождение 4-мерной кротовой норы в пространстве с топологией S^2 . Пространство теряет связность; образуются две сферы

3. Топологическое описание образования 3-мерной кротовой норы

Аналогично процессу нарушения связности, означающего рождение 4-мерной кротовой норы за счёт изменения топологии на множестве M , описанному в предыдущем параграфе, можно таким же образом описать возникновение 3-мерной кротовой норы в пространстве.

3.1. Нарушение односвязности \mathbb{R}^2

Начнём в качестве примера с описания рождения 2-мерной кротовой норы у 2-мерной плоскости.

На отрезке $[0,1]$ определим параметрическое семейство функций $h_t(x)$, $t \in [0,1]$ такое, что для любого $x \in [0,1]$ $h_0(x) = 1$, $h_t(0) = h_t(1) = 1$, и при $t \in (0,1)$ семейство функций h_t представляет непрерывную деформацию функции h_0 в функцию h_1 , причём все $h_t(x)$ непрерывны вместе с первыми производными. Единственной функцией, производная которой имеет разрывы первого в точках

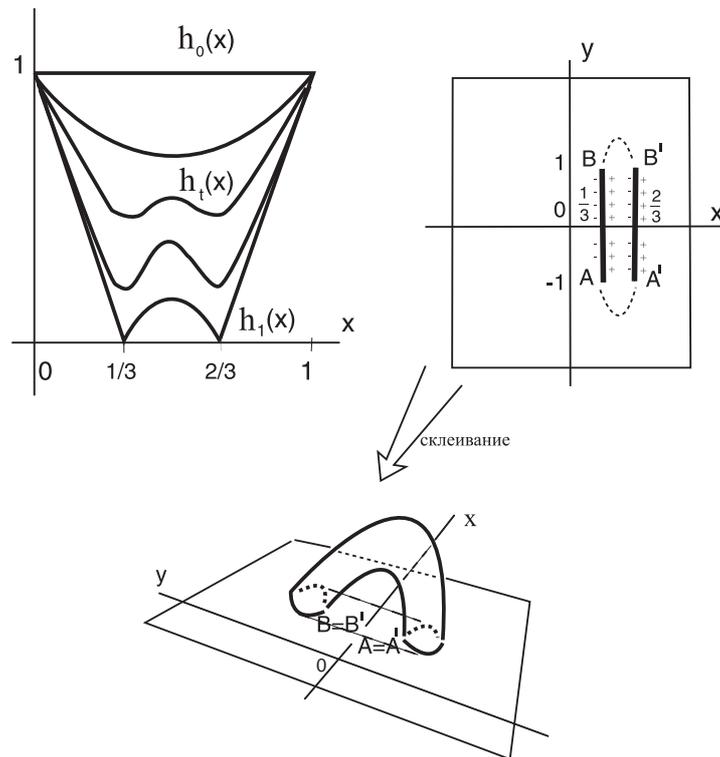


Рис. 6. Переход к неодносвязной поверхности за счёт разрезов по отрезкам AB , $A'B'$ и склеивания «левого берега» (минусы) отрезка AB с «правым берегом» отрезка $A'B'$ (плюсы) и склеивания «правого берега» (плюсы) отрезка AB с «левым берегом» отрезка $A'B'$ (плюсы).
Получается плоскость с приклеенной 2-ручкой (2-мерная кротовая нора)

$x = 1/3$ и $x = 2/3$, является $h_1(x)$. Наконец, пусть (рис. 6)

$$\lim_{z \rightarrow 1/3-0} h'_1(z) = -1, \quad \lim_{z \rightarrow 1/3+0} h'_1(z) = +1$$

$$\lim_{z \rightarrow 2/3-0} h'_1(z) = -1, \quad \lim_{z \rightarrow 2/3+0} h'_1(z) = +1.$$

Рассмотрим топологическое подпространство

$$\Gamma_t = \{((x, y), h_t(x), h'_t(x - 0)), ((x', y'), h_t(x'), h'_t(x' + 0))\}$$

с индуцированной топологией 4-мерного арифметического пространства \mathbb{R}^4 , где $h'_t(x \pm 0) = \lim_{z \rightarrow x \pm 0} h'_t(z)$. Две точки $((x, y), a, \alpha)$ и $((x', y'), b, \beta)$ пространства Γ_t назовём эквивалентными, тогда и только тогда, когда, во-первых,

1) $(x, y) = (x', y')$;

2) $a = b$;

3) $\lim_{z \rightarrow x-0} h'_t(z) = \lim_{z \rightarrow x'+0} h'_t(z)$.

и, во-вторых, если

1) $x = 1/3, x' = 2/3, -1 \leq y \leq 1$;

2) $a = b$;

3) $(\lim_{z \rightarrow 1/3-0} h'_t(z) = -1 \ \& \ \lim_{z \rightarrow 2/3+0} h'_t(z) = +1)$ или

$$\left(\lim_{z \rightarrow 1/3+0} h'_t(z) = +1 \ \& \ \lim_{z \rightarrow 2/3-0} h'_t(z) = -1 \right).$$

Профакторизуем пространство Γ_t по введённому отношению эквивалентности \sim . Получаем фактор-пространство Γ_t/\sim . Нетрудно увидеть, что это фактор-пространство при $t < 1$ гомеоморфно плоскости \mathbb{R}^2 , а при $t = 1$ неодносвязной поверхности с 2-мерной ручкой, которую физики называют 2-мерной кротовой норой.

Таким образом, мы рассмотрели процесс образования 2-мерной кротовой норы.

3.2. Нарушение односвязности \mathbb{R}^3

Рассмотрим параметрическое семейство функций $s_t(r)$, $t \in [0, 1]$, $r \in [0, +\infty)$, такое, что для любого $r \in [0, +\infty)$

$$s_0(r) \equiv 1, \quad s_t(0) = 1, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} s_t(r) = 1$$

и при $r \in (0, +\infty)$ семейство функций s_t представляет непрерывную деформацию функции s_0 в функцию s_1 , причём все $s_t(x)$ непрерывны вместе с первыми производными. Единственной функцией, производная которой имеет разрыв первого в точке $r = 1$ является $s_1(x)$. Наконец, пусть (рис. 7)

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} s'_1(r) = -1, \quad \lim_{r \rightarrow 1+0} s'_1(r) = +1.$$

Используем цилиндрическую систему координат в пространстве \mathbb{R}^3 .

Пусть $Z = \{(r, \varphi, z) : r = 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1\}$ – цилиндр (рис.8).

Рассмотрим топологическое подпространство $\Gamma_t = \{(r, \varphi, z), s_t(r), s'_t(r \pm 0)\}$ с индуцированной топологией пятимерного арифметического пространства \mathbb{R}^5 , где $s'_t(r \pm 0) = \lim_{\rho \rightarrow r \pm 0} s'_t(\rho)$.

Две точки $((r, \varphi, z), a, \alpha)$ и $((r', \varphi', z'), b, \beta)$ пространства Γ_t назовём эквивалентными тогда и только тогда, когда, во-первых,

$$1) \ (r, \varphi, z) = (r', \varphi', z');$$

$$2) \ a = b;$$

$$3) \ \lim_{\rho \rightarrow r-0} s'_t(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow r+0} s'_t(\rho);$$

и, во-вторых, если

$$1) \ r = 1, \varphi' = \varphi + 2\pi, z' = z \ (0 \leq z, z' \leq 1);$$

$$2) \ a = b;$$

$$3) \ (\alpha = \beta = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} s'_t(\rho) = -1);$$

и, в-третьих,

$$1) \ r = 1, \varphi' = \varphi + 2\pi, z' = z \ (0 \leq z, z' \leq 1);$$

$$2) \ a = b;$$

$$3) \ (\alpha = \beta = \lim_{\rho \rightarrow 1+0} s'_t(\rho) = +1).$$

Профакторизуем пространство Γ_t по введённому отношению эквивалентности \sim . Получаем фактор-пространство Γ_t/\sim . Нетрудно увидеть, что это фактор-пространство при $t < 1$ гомеоморфно плоскости \mathbb{R}^3 , а при $t = 1$ неодносвязному

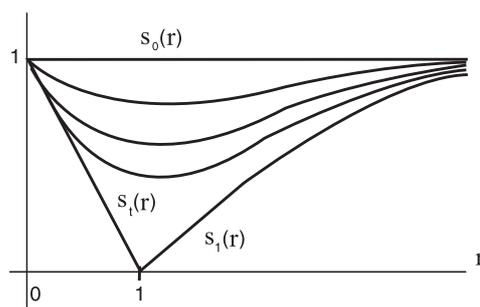


Рис. 7. Графики функций $s_t(r)$, $t \in [0, 1]$

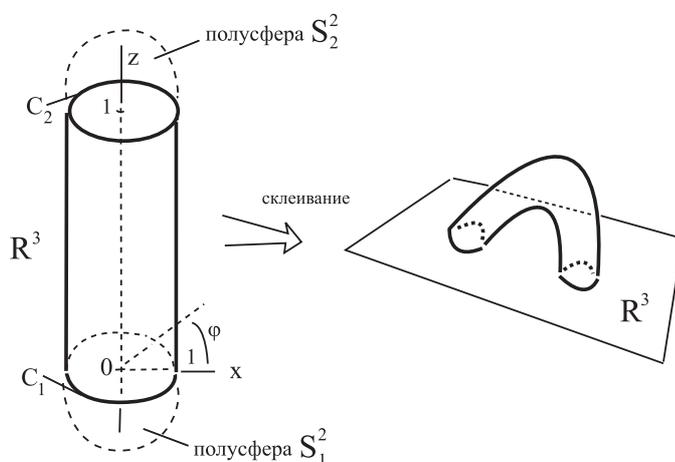


Рис. 8. Переход к неодносвязному 3-многообразию за счёт разреза по цилиндру $Z = \{(r, \varphi, z) : r = 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1\}$ и склеивания «внешнего берега» по диаметрально противоположным точкам $((1, \varphi, z)$ с $(1, \varphi + \pi, z)$) и «внутреннего берега» по диаметрально противоположным точкам. Окружности C_1 и C_2 каждая стягивается в точку; при этом полусферы S_1^2 и S_2^2 перестраиваются в сферы, к которым приклеен 3-мерный цилиндр $S^2 \times [0, 1]$, получаемый из цилиндра Z при факторизации по отношению эквивалентности \sim . Как результат, имеем 3-многообразие с приклеенной 3-ручкой (3-мерной кротовой норой)

некомпактному 3-многообразию с 3-мерной ручкой, которую физики называют 3-мерной кротовой норой.

Изменение геометрии. Зададим семейство римановых метрик,

$$dl_t^2 = A_t^2(r, z)[dr^2 + dz^2] + r^2[B_t(r, z)]^{-2}d\varphi^2,$$

отражающих изменение геометрии по мере изменения топологии, где функции A_t, B_t выбираются так, что, во-первых, при $t < 1$ они C^2 -гладкие, и, во-вторых, при $t = 1$ имеем: $\lim_{r \rightarrow 1+0} A_t \neq \lim_{r \rightarrow 1-0} A_t$, $\lim_{r \rightarrow 1+0} B_t \neq \lim_{r \rightarrow 1-0} B_t$ при $0 < z < 1$ и

$$A_t(1, c)[B_t(1, c)]^{-1} \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 1$$

$$c = 0, 1.$$

Последнее условие — это геометрическое отражение условия стягивания окружностей C_1, C_2 в точку, при котором их длина должна стремиться к нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуц А.К. Космический корабль, разрушающий пространство? // Техника молодежи. 1983. №11. С.14-16.
2. Yodzis P. Lorentz cobordisms // Gen. Relat. and Gravit. 1973. V.4. P.299.
3. Спеньер Э. Алгебраическая топология. М. : Мир, 1971.
4. Reventos A. On the Gauss-Bonnet formula on the odd-dimensional manifolds // Tohoku Math. J. 1979. V.31, N.2. P.165-178.
5. Эйнзерхарт Л.П. Риманова геометрия. М. : ИЛ, 1948.
6. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т. 2. М. : Мир, 1977.
7. Гуц А.К. Нарушение связности физического пространства // Известия вузов. Физика. 1983. № 8. С. 3-6.
8. Палешева Е.В. Внешняя кривизна 3-мерного пространства и энергетические затраты, необходимые для образования 4-мерной кротовой норы // Математические структуры и моделирование. 2005. Вып. 15. С.89-96