МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 13, № 5 (1973), 687—694

УДК 513

# ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ, СОХРАНЯЮЩИХ КОНУСЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

А. К. Гуц

Пусть $Л^n$ — $n$-мерное пространство Лобачевского, и $\{l_x : X \in Л^n\}$ — семейство прямых, параллельных прямой $l_0$, $o \in Л^n$ (в данном направлении). Пусть $\{C_x : X \in Л^n\}$ — семейство круговых конусов в $Л^n$ раствора $\alpha$ с осью $l_X$ и вершиной $X$.

Тогда, если $f : Л^n \to Л^n$ $(n > 2)$— биективное отображение и $f(C_X) = C_{f(x)}$, то $f$ есть движение в пространстве $Л^n$. Библ. 1 назв.

Пусть $Л^n$ $(n > 2)$ — $n$-мерное пространство Лобачевского, $\{l_X\colon X \in Л^n\}$ — семейство прямых, таких, что для всякой точки $X$ прямая $l_X$ содержит точку $X$ и параллельна прямой $l_0$, $O \in Л^n$ (в данном на $l_0$ направлении).

Пусть $\{C_X\colon X \in Л^n\}$ — семейство круговых конусов постоянного раствора с вершиной в точке $X$ и осью $l_X$; тогда если $f\colon Л^n \to Л^n$ биективное отображение, такое, что $f(C_X) = C_{f(X)}$, то $f$ есть движение в пространстве Лобачевского.

Этот результат доказывается с привлечением модели Пуанкаре пространства Лобачевского.

Через $\mathring{C}_X^+$, $\mathring{C}_X^-$ обозначаем связные компоненты множества $Л^n \setminus C_X$, содержащие полупрямые, на которые точка $X$ разбивает прямую $l_X$, а через $\overline{C}_X^+$, $\overline{C}_X^-$ — их замыкания.

Далее все объекты в модели Пуанкаре обозначаем теми же символами, но со знаком $\wedge$ сверху. Если ввести аффинные координаты в $\hat{Л}^n$ так, что $\hat{Л}^n = \{x^1 > 0\}$, то

$$\hat{l}_X = \{x^1 > 0;\ x^2, \ldots, x^n = \mathrm{const}\},$$

а прямые из конуса $C_X$ изобразятся полуокружностями:

$$
\begin{aligned}
&x^1 = R \sin \varphi,\\
&x^2 = x_0^2 + R \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \ldots \cos \alpha_{n-2} \cos \varphi,\\
&x^3 = x_0^3 + R \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \ldots \cos \alpha_{n-2} \cos \varphi, \qquad (1)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x^n = x_0^n + R \sin \alpha_{n-2} \cos \varphi,\\
&\qquad R > 0,\ 0 < \varphi < \pi.
\end{aligned}
$$

Движения в пространстве Лобачевского изобразятся либо симметрией относительно афинной гиперплоскости ($\mathcal{A}$-гиперплоскости), перпендикулярной к $\mathcal{A}$-гиперплоскости $\{x^1 = 0\}$, либо инверсией относительно $\mathcal{A}$-гиперсферы с центром в $\{x^1 = 0\}$.

1. Пусть дано Л$^2$, и $D_X = \bigcup\limits_{i=1}^{3} l_X^i$, где $l_X^2 = l_X$ — прямые, указанные выше, а $l_X^1$, $l_X^3$ — прямые в Л$^2$, проходящие через точку $X$ под углами $\alpha$, $\beta$ соответственно к прямой $l_X$. Причем эти углы одни и те же для любой точки $X$.

ЛЕММА. *Если $f$: Л$^2 \to$ Л$^2$ — биективное отображение, такое, что $f(D_X) = D_{f(X)}$, то $f$ есть движение.*

Доказательство. А) Пусть $\alpha = \beta$. $f(l_X^2) = l_{f(X)}^2$ и пусть $f(l_X^3) = l_{f(X)}^3$ (если $f(l_X^3) = l_{f(X)}^2$, то доказательство не изменится). Это следует из того, что можно взять $D_X$ и $D_{Y_k}$, так что $D_X \cap D_{Y_k} = l_X^2$, $(k = 1, 2, \ldots)$, $D_{Y_k} \cap D_{Y_m} = l_X^2$, $k \neq m$.

Пусть $\{X_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ — точки, ординаты которых равны, а абсциссы связаны соотношением $x_{i+1}^2 = x_i^2 + d$ $(d = \mathrm{const} > 0)$. Пусть $\{D_{X_i}\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ таковы, что

$$
\begin{aligned}
&D_{X_i} \cap D_{X_{i+1}} = l_{X_i}^3,\\
&D_{X_i} \cap D_{X_j} = \phi \qquad (j \neq i \pm 1).
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
f\left(\bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} D_{X_i}\right) = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} D_{f(X_i)}
$$

и точки $\{\hat{f}(X_i)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ таковы, что если $\hat{f}(X_i) = (y_i^1, y_i^2)$, то

$y_i^1 = y_j^1$, $y_{i+1}^2 = y_i^2 + \lambda \cdot d$, где $\lambda > 0$. Это следует из биективности $f$.

Пусть $L$ — орицикл, причем $\hat{L} = \{x^1 = a = \text{const}\}$, где $a$ — наибольшее значение ординаты для $\hat{l}^1_{X_i}$, $\hat{l}^3_{X_i}$,

$$M = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} D_{X_i}$$

$$\{Y_i\}_{i=-\infty}^{+\infty} = (L \cap M) \setminus \left( L \cap \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} l^2_{X_i} \right). \tag{2}$$

Если $\{Z_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ — точки, аналогичные $\{Y_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ для $f(M)$, то $Z_i = f(Y_i)$ (можно считать, что индексы $Z_i$ и $Y_i$ одни и те же), т. е. $f$ отображает $\{Y_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ в $\{Z_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ с сохранением направления (монотонно). В самом деле, пусть даны прямые $(\{l^2_{X_i}\} \cup \{l^2_{Y_i}\})_{i=-\infty}^{+\infty}$. По ним однозначно строится множество (2), и так как $f$ сохранит полученную конструкцию, то утверждение очевидно.

Сдвигая $M$ вправо (влево) на $d/2, \ldots, d/2^k, \ldots$, получим на $L$ всюду плотное множество $L_0$, которое изометрично с точностью до множителя $\lambda > 0$, т. е. гомотетично отобразится на орицикл $L'$, аналогичный $L$ для $f(M)$. $L_0' = f(L_0)$, $L_0'$ — всюду плотное множество на $L'$.

Пусть $X$ — произвольная точка на $L$. Тогда существует последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_0$, монотонно сходящаяся к $X$. Пусть $Y$ — предельная точка на $L'$ для последовательности $\{f(X_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Покажем, что $Y = f(X)$. Пусть

$$\{Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\} = (\hat{D}_X \cap \{x^1 = 0\}) \setminus \hat{l}^2_X,$$

$$W_i = \hat{l}^2_{z_i} \cap \hat{L} \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

причем $W_1 < W_2 < W_3 < W_4$ на $L$ (где можно ввести порядок). Тогда существуют последовательности $\{W_i(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset L_0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ такие, что $W_i(n) < W_i(n+1)$ $(i = 1, 3)$, $W_j(n) > W_j(n+1)$ $(j = 2, 4)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} W_i(n) = W_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, причем $W_2(n)$ симметрична $W_3(n)$ относительно $X$ на $L$.

По $l^2_{W_2(n)}$, $l^2_{W_3(n)}$ однозначно находится прямая $l^3_{P_n}$, такая что $l^2_{W_2(n)}$, $l^3_{P_n} \subset D_{P_n}$; $l^3_{P_n}$, $l^2_{W_3(n)} \subset D_{K_n}$ и $l^3_{P_n} \subset \overset{\circ}{C}_{\overline{X}}$. Так как $D_X$ не пересекается с $l^2_{W_1(n)}$, $l^2_{W_4(n)}$, $l^3_{P_n}$ и $\hat{f}$ сохраняет это свойство, и кроме того, отображает последовательности $\{W_i(n)\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ гомотетично на $\hat{L}'$, то $f(D_X) = D_Y$, откуда $Y = f(X)$.

Итак, $\hat{f}$ отображает $\hat{L}$ гомотетично на $\hat{L}'$. Так как $f(D_X) = D_{f(X)}$, то $\hat{f}$ есть гомотетия с коэффициентом гомотетии $\lambda > 0$, которую можно теперь представить в виде произведения симметрий и инверсий, изображающих движение. Итак, в этом случае $f$ есть движение.

В) Пусть $\alpha \neq \beta$. Тогда возможна аналогичная (2) конструкция, при этом вместо орицикла $L$ используется эквидистанта, изображаемая $A$-полупрямой, наклоненной под углом $\gamma$ к оси $x^2$, причем

$$\sin\gamma = \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \left(0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}\right),$$

и доказательство, по сути дела, есть повторение А). Лемма доказана.

**2.** Пусть дано $n$-мерное пространство Лобачевского $Л^n$ $(n > 2)$. Пусть $\{C_X\colon X \in Л^n\}$ — семейство круговых конусов с осями $l_X$, причем раствор их один и тот же для любой точки $X$.

ТЕОРЕМА 1. *Если* $f\colon Л^n \to Л^n$ $(n > 2)$ — *биективное отображение и* $f(C_X) = C_{f(X)}$, *то* $f$ *есть движение.*

Доказательство. а) Пусть $\hat{L}_i$, $\hat{L}''_j$ $(-\infty < i, j < +\infty)$ — два семейства $A$-параллельных $A$-прямых, лежащих в $\{x^1 = \mathrm{const} > 0\}$, образующие решетку с узлами $\{X_{ij}\}_{i,j=-\infty}^{+\infty}$ $X_{ij} \in \hat{L}_i \cap \hat{L}''_j$, и если $C_{ij}$ — конус с вершиной $X_{ij}$, то $C_{ij} \cap C_{kl} \neq \phi$ лишь в случае, когда

$$kl \in \Sigma \cup \{(i-2,\ j-2),\ (i-1, j-2),\ (i, j-2),\ (i+1, j-1),$$
$$(i+2, j),\ (i+2, j+1),\ (i+2, j+2),\ (i+1, j+2),$$
$$(i, j+2),\ (i-1, j+1),\ (i-2, j),\ (i-2, j-1)\},$$

где $\Sigma = \{(i-1, j), (i-1, j-1), (i, j-1), (i+1, j), (i+1, j+1), (i, j+1)\}$. Причем $C_{ij} \cap C_{kl} = l_{ij,kl} \cup \cup F_{ij,kl}$ при $kl \in \Sigma$, где $l_{ij,kl}$ — прямая на конусе $C_{ij}$,

$F_{ij,kl}$ — $(n-2)$-мерное множество, пересекающееся с прямой $l_{ij,kl}$ лишь по одной точке и лежащее в гиперплоскости, перпендикулярной к $\{x^1 = 0\}$.

Множество

$$S_{ij} = \bigcup_{kl \in T} C_{kl}, \qquad T = \{(i+k,\ j+k),\ (i+k,\ j+k+1\}_{k=-\infty}^{+\infty}$$

назовем цепочкой. Пусть $\hat{S}$ есть цепочка, получаемая из цепочки $\hat{S}_{ij}$ смещением ее $A$ — параллельно самой себе в направлении $X_i\ X_{i-1,\ j+1}$. Если $l$, $F$ обозначают в $S$ множества, полученные из $l_{ij,kl}$, $F_{ij,kl}$, то, двигая $S$ так, что $F_{ij,kl} \cap F \neq \phi$, видим, что $S$ может пересекаться только с цепочками $S_{i-m,j}$ $(m = 0, 1, 2, 3, 4)$. После отображения вся эта конструкция сохранится (в силу ее «жесткости»), и если соответствующие объекты обозначать теми же символами, но со штрихом, то не может быть, чтобы $F' \cap \cap l'_{ij,kl} \neq \phi$ (а значит, и $F'_{ij,kl} \cap l' \neq \phi$). Действительно, до отображения, при $n = 3$, $F \cap F_{ij,kl}$ есть точка, а после отображения имели бы две точки в силу того, что $F' \cap l'_{ij,kl}$ и $F'_{ij,kl} \cap l'$ дают по точке; а при $n > 3$, $F \cap \cap F_{ij,kl}$ есть $(n-3)$-мерное множество, континуум точек, а после отображения имели бы только две точки. Это бы противоречило биективности отображения $f$. Итак, точки множества $F_{ij,kl}$ переходят при отображении в аналогичные точки, а это означает, что $f(l_{ij,kl}) = l'_{ij,kl}$, т. е. прямая на конусе $C_{ij}$ переходит в прямую на конусе $C'_{ij} = f(C_{ij})$.

Итак, прямая на конусе $C_X$ переходит в прямую на конусе $f(C_X)$.

b) Пусть $P_1$ и $P_2$ — двумерные плоскости Лобачевского, различные, и $P_1 \cap P_2 = l_X$. $f$ отображает $P_1$, $P_2$ в $Л^n$, сохраняя прямые, получаемые при пересечении $P_i$ $(i = 1, 2)$ с конусами $C_X$, когда $X \in P_i$. Покажем, что $f(P_i)$ есть 2-плоскость Лобачевского.

Если $l_1$, $l_2$, $l_1 \cap l_2 \neq \phi$ — две прямые, лежащие в $P_1$, сохраняющиеся при отображении $f$, то существует третья такая же прямая $l_3$, что $l_3 \cap l_1 \neq \phi$, $l_3 \cap l_2 \neq \phi$, $l_3 \subset \subset P_1$. Рассматривая $f(Л^n)$ в модели Бельтрами (где пространство Лобачевского рассматривается как единичный шар в аффинном пространстве), видим, что $f(l_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ изобразятся тремя $A$-прямыми, имеющими общие точки. Двигая $l_3$ по $P_1$ так, что $l_3 \cap l_1 \neq \phi$, $l_3 \cap l_2 \neq \phi$, получим, что кусок 2-плоскости $P_1$ перейдет в кусок 2-плоскости. Так как с помощью $l_1$, $l_2$, $l_3$ можно исчерпать всю плоскость $P_1$, то легко убедиться, что $f(P_1)$ в модели Бельтрами изобразится двумерной плоскостью, т. е. $f(P_1)$ есть 2-плоскость. Итак, $f(P_1)$ и $f(P_2)$ есть 2-плоскости. Тогда $f(l_X) = f(P_1 \cap P_2) = f(P_1) \cap f(P_2)$ есть прямая, которая есть прямая $l_{f(X)}$ в силу а) и уравнений (1), т. е. ось конуса $C_X$ переходит в ось конуса $C_{f(X)}$.

с) Пусть $P$ — произвольная 2-плоскость такая, что $P \supset l_X$. Тогда на плоскости $P$ выполнены условия леммы, так как $f(P)$ есть 2-плоскость. Значит, $\hat{f}$ есть гомотетия на $\hat{P}$ и так как $P$ — произвольная плоскость и $f(C_X) = C_{f(X)}$, то $\hat{f}$ есть гомотетия в $\hat{\text{Л}}^n$, т. е. $f$ есть движение.

3. Пусть $K_X$ — множество, получаемое вращением эквидистанты $e_X$, проходящей через точку $X$ вокруг оси $l_X$, причем угол $\measuredangle(e_X, l_X) = \alpha$ один и тот же для любой точки $X \in \text{Л}^n$ $(n > 2)$.

В модели Пуанкаре $K_X$ есть пересечение полупространства $\{x^1 > 0\}$ с аффинным конусом.

ТЕОРЕМА 2. *Если* $f$: $\text{Л}^n \to \text{Л}^n$ *биективно и непрерывно и* $f(K_X) = K_{f(X)}$, *то* $f$ *есть движение.*

Доказательство. Ясно, что эквидистанта, принадлежащая $K_X$, переходит в эквидистанту на $K_{(X)}$ (достаточно рассмотреть $K_X \cap K_Y$ при $Y \in K_X$, $Y \neq X$).

а) Пусть $E = \bigcup_{Y \in e_X} K_Y$, где $e_X$ эквидистанта на $K_X$. $\hat{E}$ есть пересечение $\{x^1 > 0\}$ с аффинным полупространством плюс сама эквидистанта $e_X$, и $f(E)$ — аналогичное множество. В силу непрерывности $f$ это означает, что касательная $\mathcal{A}$-гиперплоскость к $\hat{K}_X$ переходит в касательную $\mathcal{A}$-гиперплоскость к $\hat{K}_{f(X)}$.

Пусть $l$ — $\mathcal{A}$-прямая, $\mathcal{A}$-параллельная $\mathcal{A}$-гиперплоскости $\{x^1 = 0\}$. Ее можно представить как пересечение касательных $\mathcal{A}$-гиперплоскостей к $\hat{K}_X$, $X \in l$. Но тогда $f(l)$ есть аналогичная $\mathcal{A}$-прямая.

Если $\hat{P}$ — 2-плоскость, $P \supset l_X$, то в силу выше сказанного на ней есть три семейства $\mathcal{A}$-параллельных $\mathcal{A}$-прямых, сохраняющихся при отображении $\hat{f}$. Значит, $f(P)$ есть 2-плоскость.

b) Пусть $X_0 \in \{x^1 = 0\}$ и

$$P \cap K_{X_0} = e^1_{X_0} \cup e^2_{X_0}, \qquad \hat{e}^1_{X_0} \cap \hat{e}^2_{X_0} = \{X_0\}.$$

Пусть $X_i \in e^i_X$, $(i = 1, 2)$. Рассматривая $\dot{K}_{X_i}$, $\ddot{K}_Y$, где $\{Y\} = K_{X_1} \cap K_{X_2} \cap P$, получим, что если $\hat{f}(K_{X_0})$ не есть множество $\hat{K}_z$, $Z \in \{x^1 = 0\}$, то $\hat{f}(e^1_{X_0}) \cap \hat{f}(e^2_{X_0}) = \phi$ на $\{x^1 = 0\}$. Но тогда существует точка $S$, такая, что

$$\overline{K}_S^- \subset f(\overline{K}_Y^- \setminus (\overline{K}_{X_1}^- \cup \overline{K}_{X_2}^-)),$$

$$K_S \cap f(P) = e^1_S \cup e^2_S,$$

$$\left.\begin{aligned} f(P) \cap K_S \cap f(K_{X_1}) = e^1_S \cap e^2_{f(X)} \neq \phi, \\ f(P) \cap K_S \cap f(K_{X_2}) = e^2_S \cap e^1_{f(X)} \neq \phi. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Возвращаясь к прообразам, видим, что если учесть соотношения $f(e^2_{X_1}) = e^2_{f(X_1)}$, $f(e'_{X_2}) = e'_{f(X_2)}$, то для точки $S$ нет прообраза, так как в противном случае в силу биективности $f$ нарушились бы условия (3).

Итак, при отображении $\hat{f}$ множество $\hat{K}_X$, $X \in \{x^1 = 0\}$ переходит в множество $\hat{K}_{X^*}$, $X^* \in \{x^1 = 0\}$.

c) Подразумевая теперь под $\hat{K}_X$ — $\mathcal{A}$-конусы в $\mathcal{A}^n$, продолжим $\hat{f}$ на все аффинное пространство $\mathcal{A}^n$:

$$F(X) = \begin{cases} \hat{f}(X), & X \in \hat{Л}^n, \\ X^*, & X \in \{x^1 = 0\}, \\ \sigma \circ \hat{f} \circ \sigma^{-1}(X), & X \in \{x^1 < 0\}, \end{cases}$$

где $\sigma$ — симметрия относительно $\{x^1 = 0\}$. $F$: $A^n \to A^n$ биективно и $F(\hat{K}_X) = \hat{K}_{F(X)}$, но тогда по теореме А. Д. Александрова [1], $F$ есть аффинное преобразование, т. е. в координатах его можно записать в виде

$$F^i(X) = \sum_{k=1}^n a^i_k x^k + a^i \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Так как $F(\{x^1 = 0\}) = \{x^1 = 0\}$, то

$$a^1_k = 0 \ (k = 2, \ldots, n), \ a^1 = 0.$$

Если $A$ — матрица, соответствующая (4), то можно записать

$$A = HU,$$

где

$$H = \begin{pmatrix} a_1^1 & 0 \ldots 0 \\ a_1^2 & \\ \vdots & \boxed{\quad H_1 \quad} \\ a_1^n & \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\quad U_1 \quad} \\ 0 & \end{pmatrix},$$

и $H_1$ — эрмитова, а $U_1$ — унитарная матрицы.

Так как образ $\mathscr{A}$-сферы $x^{2^2} + \ldots + x^{n^2} = R^2$ есть $(n-2)$-мерная $\mathscr{A}$-сфера в $\{x^1 = 0\}$, то отсюда следует, что $H_1$ — единичная матрица.

Далее, векторы $(1, \pm \operatorname{tg} \alpha, 0, \ldots, 0)$, $(1, 0 \pm \operatorname{tg} \alpha, 0, \ldots, 0), \ldots, (1, 0, \ldots, 0, \pm \operatorname{tg} \alpha)$ переходят под действием матрицы $H$ в векторы, имеющие угол $\alpha$ с вектором $(1, 0, \ldots, 0)$:

$$\cos \alpha = \frac{a_1^1}{\left\{(a_1^1)^2 + (a_1^i \pm \operatorname{tg} \alpha)^2 + \sum_{j=2 j \neq i}^{n} (a_1^j)^2\right\}^{1/2}} \quad (i = 2, \ldots, n),$$

откуда

$$-(a_1^1)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \pm 2a_1^i \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + \sum_{k=2}^{n} (a_1^k)^2 = 0, \quad (i = 2, \ldots, n). \quad (5)$$

Из этих уравнений получаем

$$a_1^i = a_1^j, \quad a_1^i = -a_1^j \qquad (i \neq j)$$

и, значит,

$$a_1^2 = a_1^3 = \ldots = a_1^n = 0.$$

Из (5) тогда следует, что $a_1^1 = 1$.

Итак,

$$\hat{f}(X) = UX + a, \; a = (0, a^2, \ldots, a^n),$$

которое можно представить в виде произведения симметрий, изображающих движение. Значит, $f$ есть движение.

Замечания. 1. Лемма доказана без требования непрерывности отображения $f$. Аналогичная лемма в евклидовой геометрии не верна без этого условия.

2. Из леммы и пункта а) доказательства теоремы 1 видно, что конусы могут быть не обязательно круговыми, а достаточно произвольными.

Новосибирский государственный университет

Поступило 23.XI.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Alexandrov A. D., A contribution to chronogeometry, Canadian journal of Mathematics, 19, № 6 (1967), 1119—1128.