Автоматизация анализа и синтеза структур ЭВМ и вычислительных алгоритмов

Омск—1982

УДК 550.87:550.837

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВЕРТИКАЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

А.К.Гуц, С.А.Терентьев

Омский государственный университет, г.Омск

При аналитическом решении задач электроразведки очень часто компоненты электромагнитного поля выражаются в виде интеграла

$$\int_0^\infty K(x,y,\lambda)\cdot u(z,\lambda)\,d\lambda,$$

где $K(x,y,\lambda)$ – быстро осциллирующее по λ ядро. При вычислении таких интегралов на ЭВМ приходится деформировать контур интегрирования в комплексную область $\mathcal{D}_\lambda$ изменения переменной λ. Поэтому важно установить, что в $\mathcal{D}_\lambda$ плотность $u(z,\lambda)$ не имеет особенностей по λ. В этой статье рассматривается неоднородная среда, параметры которой ε,μ,σ зависят лишь от глубины z залегания слоя и, вообще говоря, кусочно-непрерывны. Источник поля-гармонический диполь.

Уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} E = i\omega\mu H - j^m; \qquad \operatorname{div} i\omega\mu H = i\omega\rho^m;$$

$$\operatorname{rot} H = (\sigma - i\omega\varepsilon)E + j^e; \qquad \operatorname{div}(\sigma - i\omega\varepsilon)E = -i\omega\rho^e;$$

с помощью преобразования Фурье $f(x,y,z)\to\hat f(\xi,\eta,z)$ по x,y приводятся к следующей системе уравнений:

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{(\sigma-i\omega\varepsilon)}\frac{d}{dz}\left\{(\sigma-i\omega\varepsilon)\hat E_z+\hat j^e_z\right\}-\frac{(\lambda^2+k^2)}{(\sigma-i\omega\varepsilon)}\left\{(\sigma-i\omega\varepsilon)\hat E_z+\hat j^e_z\right\}=$$
$$=-\frac{d}{dz}\frac{1}{(\sigma-i\omega\varepsilon)}\left(i\xi\hat j^e_x+i\eta\hat j^e_y\right)-\frac{\lambda^2}{(\sigma-i\omega\varepsilon)}\hat j^e_z+i\xi\hat j^m_y-i\eta\hat j^m_x$$
$$\frac{d}{dz}\frac{1}{i\omega\mu}\frac{d}{dz}\left\{i\omega\mu\hat H_z-\hat j^m_z\right\}-\frac{(\lambda^2+k^2)}{i\omega\mu}\left\{i\omega\mu\hat H_z-\hat j^m_z\right\}= \tag{1}$$
$$=\frac{d}{dz}\frac{1}{i\omega\mu}\left(i\xi\hat j^m_x+i\eta\hat j^m_y\right)+\frac{\lambda^2}{i\omega\mu}\hat j^m_z-i\xi\hat j^e_y+i\eta\hat j^e_x,$$

где $\lambda^2=\xi^2+\eta^2$, $k^2=-(\omega^2\varepsilon\mu+i\omega\mu\sigma)$. Остальные компоненты поля $\hat E_x,\hat E_y,\hat H_x,\hat H_y$ выражаются через

$$(\sigma - i\omega\varepsilon)\hat{E}_z + \hat{j}^e_z, \quad \frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)}\frac{d}{dz}\{(\sigma - i\omega\varepsilon)\hat{E}_z + \hat{j}^e_z\},$$

$$i\omega\mu\hat{H}_z - \hat{j}^m_z, \quad \frac{1}{i\omega\mu}\frac{d}{dz}\{i\omega\mu\hat{H}_z - \hat{j}^m_z\},$$

а также $(i\xi\hat{j}^e_x + i\eta\hat{j}^e_y)/(\sigma - i\omega\varepsilon)$ и $(i\xi\hat{j}^m_x + i\eta\hat{j}^m_y)/i\omega\mu$ с коэффициентами $i\xi/\lambda^2$ и $i\eta/\lambda^2$.

В случае вертикального диполя $j=(0,0,\delta(x)\delta(y)\delta(z))$, а горизонтального – $j=(\delta(x)\delta(y)\delta(z),0,0)$, т.е. источник находится в точке $(0,0,0)$. Следовательно, в правой части (1) стоят сингулярные обобщенные функции. Если коэффициенты, входящие в (1), принадлежат классу $L^\infty_2(R)$, то (1) следует понимать как уравнения в классе обобщенных функций $\mathcal{D}'$. Рассматриваемую задачу можно "регуляризовать", сведя ее к задаче вида

$$-\frac{d}{dz}\frac{1}{a(z)}\frac{d}{dz}u + \frac{\lambda^2+k^2}{a(z)}u = 0 \quad (z \neq 0)$$

$$[u]_0 = \alpha \qquad \left[\frac{1}{a(z)}\frac{d}{dz}u\right]_0 = \beta, \tag{2}$$

где $[f]_0 = f(+0) - f(-0)$, требуя уже, чтобы $u \in W^2_2(R^- + R^+)$, где $R^- = (-\infty, 0)$, $R^+ = (0, \infty)$. Под $W^l_2(R^- + R^+)$ понимаем замыкание в норме

$$\|u\| = \left\{\left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}\right)\sum_{k=0}^{l}|u^{(k)}|^2 dz\right\}^{1/2}$$

пространства, сужения которого на R^- и R^+ совпадает с соответствующими сужениями пространства $W^l_2(R)$.

При этом в (2) использованы обозначения:

1) для вертикального электрического диполя – $a_1 = \sigma - i\omega\varepsilon$, $u_1 = a_1\hat{E}_z + \delta(z)$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = -\lambda^2/a_1(0)$;
2) для вертикального магнитного – $a_2 = i\omega\mu$, $u_2 = a_2\hat{H}_z - \delta(z)$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = \lambda^2/a_2(0)$;
3) для горизонтального электрического – $a_1 = \sigma - i\omega\varepsilon$, $u_1 = a_1\hat{E}_z$, $\alpha_1 = -i\xi$, $\beta_1 = 0$; $a_2 = i\omega\mu$, $u_2 = a_2\hat{H}_z$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = i\eta$;
4) для горизонтального магнитного – $a_1 = \sigma - i\omega\varepsilon$, $u_1 = a_1\hat{E}_z$, $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = -i\eta$; $a_2 = i\omega\mu$, $u_2 = a_2\hat{H}_z$, $\alpha_2 = i\xi$, $\beta_2 = 0$.

Если $a^{-1} \notin C(0)$, то интерпретация вертикального диполя неоднозначна.

От (2) можно теперь перейти к вариационной задаче (3) для $\forall \varphi \in W_2^1(R)$ и $u \in K$, где K - выпуклое множество в $W_2^1(R^- + R^+)$, определяемое условием $[u]_0 = \alpha$. При этом достаточно брать a^{-1}, $(\lambda^2 + k^2)/a \in L^\infty(R)$.

$$\left(\int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{\infty}\right)\left\{\frac{1}{a}\frac{du}{dz}\frac{d\bar\varphi}{dz} + \frac{\lambda^2 + k^2}{a} u \bar\varphi\right\} dz = -\beta \bar\varphi(0) \qquad (3)$$

Понимаем (3) как обобщенную задачу для электромагнитного поля с диполем в качестве источника.

<u>Теорема</u>. Если $u \in K$ - решение задачи (3) и

$$\max\left\{\operatorname*{vrai\,sup}_{z \in R} |a^{-1}|,\ \operatorname*{vrai\,sup}_{z \in R} |(\lambda^2 + k^2)/a|\right\} < \infty,$$

то в области

$$\mathcal{D}_\lambda = \left\{\lambda = \lambda_x + i\lambda_y : \operatorname*{vrai\,sup}_{z \in R} \operatorname{Re} a^{-1} < 0 \ \&\ \operatorname*{vrai\,sup}_{z \in R} \operatorname{Re}(\lambda^2 + k^2)/a < 0 \ \vee\right.$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{z \in R} \operatorname{Im} a^{-1} < 0 \ \&\ \operatorname*{vrai\,sup}_{z \in R} \operatorname{Im}(\lambda^2 + k^2)/a < 0 \ \vee \operatorname*{vrai\,inf}_{z \in R} \operatorname{Re} a^{-1} > 0 \ \&$$

$$\left.\operatorname*{vrai\,inf}_{z \in R} \operatorname{Re}(\lambda^2 + k^2)/a > 0 \ \vee \operatorname*{vrai\,inf}_{z \in R} \operatorname{Im} a^{-1} > 0 \ \&\ \operatorname*{vrai\,inf}_{z \in R} \operatorname{Im}(\lambda^2 + k^2)/a > 0\right\}$$

функция $u(z, \xi, \eta, \lambda)$ не имеет особенностей по λ.

Компоненты полей E и H выражаются в виде линейной комбинации интегралов вида

$$\int_0^\infty \frac{d^k u}{dz^k} \lambda^p \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} J_0\left(\lambda \sqrt{x^2 + y^2}\right) d\lambda; \ k = 0, 1;\ p = \pm 1;\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0, 1, 2. \qquad (4)$$

Как следует из теоремы, $d^k u / dz^k$ не имеет особенностей по λ в области $\mathcal{D}_\lambda$. Поэтому можно деформировать контур интегрирования в $\mathcal{D}_\lambda$. В квазистационарном приближении $\omega\varepsilon = 0$ и $\mathcal{D}_\lambda = \{\lambda = \lambda_x + i\lambda_y : |\lambda_y| < |\lambda_x|\}$, что вполне удовлетворительно, с точки зрения вычисления интегралов (4) на ЭВМ.