А. К. Гуц

Нарушение связности физического пространства

Определяются условия, при которых физическое пространство изменяет число связных компонент.

В этой заметке мы определяем условия, при которых физическое пространство изменяет свою топологию, точнее, становится несвязным. Для замкнутой вселенной вопрос исследовался в [1].

Пусть M — связное трехмерное риманово многообразие с метрикой $\gamma^0_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3), D_0 \subset M$ — замкнутая область, гомеоморфная трехмерному шару. Допустим, что с течением времени $t \in [0, 1]$ многообразие $M_0 = M\,(t = 0)$ увеличивает число компонент связности, превращаясь в многообразие $M_1\,(t = 0)$, которое уже несвязно. Если говорить образно, то от M_0 отрывается область D_0. Чтобы не усложнять изложение, примем, что M_1 имеет две компоненты связности D_1 и C_1, т.е. $M_1 = D_1 \bigcup C_1,\ D_1 \bigcap C_1 = \emptyset$. Переход от M_0 к M_1 осуществляется через некоторое критическое 3-пространство $M_{1/2}\,(t = 1/2)$, которое получается из M_0 стягиванием границы ∂D_0 области D_0 в точку. Тогда D_0 превращается в область $D_{1/2}$, гомеоморфную трехмерной сфере S^3. Следовательно, необходимым этапом на пути к отрыву D_0 от M_0 является перетяжка M_0 по ∂D_0 — переход от M_0 к $M_{1/2}$. Если $F_0 \subset M_0$ — произвольное замкнутое двумерное подмногообразие, пересекающее D_0 по B_0, причем B_0 гомеоморфно двумерному шару, то при $t = 1/2$ граница ∂B_0 уже стянута в точку, а при $t = 1$ область B_0 оторвана от F_0. Поэтому предварительно изучим нарушение связности двумерного многообразия F_0. Многообразие или пространство, полученное из F_0 к моменту t, будем обозначать через F_t.

Осуществим отрывание B_0 от F_0 следующим образом. Рассмотрим семейство римановых метрик $a_{AB}(t)$, $t \in [0, 1]$, $A, B = 1, 2$, заданных на многообразии F_0, удовлетворяющее условиям:

1) $a_{AB}(t)$ при $0 \leq t < 1/2$ принадлежит классу C^2, и при $t \geq 1/2$ функции $a_{AB}(t)$ имеют разрывы производных первого рода на ∂B_0;

2) длина кривой ∂B_0, вычисленная в метрике $a_{AB}(t)$, $t < 1/2$, стремится к нулю при $t \to 1/2$, или, иначе,

$$d\sigma_t\big|_{\partial B_0} \xrightarrow[t \to 1/2-0]{} 0 \text{ и } \quad d\sigma_t\big|_{\partial B_0} = 0 \quad \text{при} \quad t \geq 1/2,$$

где $d\sigma_t$ — элемент площади в метрике $a_{AB}(t)$;

3) римановы пространства $F_0 \backslash (B_0 \bigcup \partial B_0)$, $B_0 \backslash \partial B_0$, с индуцированной метрикой $a_{AB}(t)$, $t \geq 1/2$, дополненные "точкой"∂B_0, представляют собой замкнутые ориентированные многообразия. Обозначим их соответственно через A_t, B_t

Разъясним метрические условия 1–3. Переход от F_0 к F_1 через $F_{1/2}$ мы изображаем на одном и том же множестве точек F_0. Для этого на F_0 вводится семейство топологий T_t, $t \in [0,1]$, причем каждая топология T_t согласована с топологией, порождаемой метрикой $a_{AB}(t)$. Следовательно, пространство F_t как множество равно F_0, но имеет, вообще говоря, иную топологию. Символически можно написать $F_t =< F_0, T_t >$, в частности $B_t =< B_0, T_t >$, имея в виду индуцированную топологию на B_t. В топологии $T_{1/2}$ кривая ∂B_0 есть точка, в то время как вычисление границы $\partial_{1/2} B_{1/2}$ в топологии $T_{1/2}$ множества $B_{1/2}$ дает $\emptyset$, т.е. $\partial_{1/2} B_{1/2} = \partial_{1/2} < B_0, T_{1/2} >= \emptyset$, ибо $B_{1/2} =< B_0, T_{1/2} >$ уже гомеоморфно сфере S^2. Таким образом, условие 2 означает стягивание ∂B_0 в точку. Пространство $F_{1/2}$ является критическим; оно состоит из двух многообразий $A_{1/2}$ и $B_{1/2}$, имеющих общую точку $< \partial B_0, T_{1/2} >$. При $t > 1/2$ многообразия A_t, B_t изображают различные компоненты связности разорванного F_0 (точка $< \partial B_0, T_{1/2} >$ уже изображает две различные точки). В этом нет ничего противоестественного, так как компоненты связности в действительности диффеоморфны (и изометричны) A_t, B_t соответственно. Наше построение не столь удобно, как лоренцев кобордизм [2] между F_0 и F_1, но зато приспособлено для сравнения интегралов, взятых по F_t, $t < 1/2$ и F_s, $s > 1/2$, которое предстоит сделать ниже.

Проделанные построения позволят говорить о топологической метаморфозе многообразия F_0 благодаря применению теоремы Гаусса-Бонне. Последняя гласит, что для двумерного замкнутого ориентированного риманова многообразия F класса C^2

$$\int_F \Gamma d\sigma = 2\pi\chi(F),$$

где Γ — гауссова кривизна; $\chi(F)$ — характеристика Эйлера–Пуанкаре.

Следовательно, при $0 \leq t < 1/2$

$$\int_{F_0} \Gamma_t d\sigma_t = 2\pi\chi(F_0) \tag{1}$$

и при $s > 1/2$

$$\int\limits_{A_s} \Gamma_s d\sigma_s = 2\pi\chi(A_s), \quad \int\limits_{B_s} \Gamma_s d\sigma_s = 2\pi\chi(B_s), \tag{2}$$

где $\Gamma_t, d\sigma_t$ — соответственно гауссова кривизна и элемент площади в метрике $a_{AB}(t)$. Пусть F_0 гомеоморфно сфере S^2. Тогда $\chi(F_0) = \chi(A_s) = \chi(B_s) = 2$. Обратим внимание на то, что равенства (2) получены благодаря условию 1, т.е. за счет потери гладкости метрики $a_{AB}(t)$ на ∂B_0.

Пусть V — малая окрестность кривой ∂B_0 (в топологии T_0). Будем считать, что $a_{AB}(t) = a_{AB}(0)$ вне $\overline{V}$. Тогда из (1), (2) следует

$$\Big(\int\limits_{V\cap B_s} + \int\limits_{V\cap A_s}\Big)\Gamma_s d\sigma_s - \int\limits_{V} \Gamma_t d\sigma_t = 4\pi, \quad \text{где } t < 1/2,\ 1/2 < s$$

или

$$\int\limits_{V} \Big(\Gamma_s \frac{d\sigma_s}{d\sigma_t} - \Gamma_t\Big) d\sigma_t = 4\pi. \tag{3}$$

Так как $d\sigma_s = 0$ на ∂B_0, то из (3) получаем, что существует окрестность $W \subset V$, в которой $\Gamma_s \gg \Gamma_t$. Значит отрыв B_0 от F_0 означает резкое возрастание кривизны.

Возвращаясь теперь к нарушению связности физического пространства M_0, заключаем, что отрывание D_0 от M_0 характеризуется скачком гауссовой кривизны в некоторой окрестности U "сферы"∂D_0 у любого двумерного замкнутого многообразия F_0, пересекающего D_0. Отсюда можно сделать вывод о скачке скалярной кривизны ${}^{(3)}R$ многообразия M_0 в некоторой окрестности $U \supset \partial D_0$. В самом деле, ${}^{(3)}R = 2\Gamma + \varkappa$, где Γ — гауссова кривизна сечения F_0, а $\varkappa$ — инвариант его внешней кривизны (формула Гаусса–Кодацци). Сечение можно выбрать так, что $\varkappa = 0$ (например, сечения θ=const или φ=const замкнутой вселенной Фридмана). Поэтому скачок $\delta\Gamma$ кривизны Γ влечет скачок $\delta{}^{(3)}R$ кривизны ${}^{(3)}R$.

На множестве событий $M_0 \times [0, 1]$ рассмотрим пространственно-временную метрику

$$ds^2 = (N^2 - N_\alpha N^\alpha)dt^2 - 2N_\alpha dt dx^\alpha - \gamma_{\alpha\beta}(x, t)dx^\alpha dx^\beta,$$

удовлетворяющую условиям:

а) t=const есть пространственно-подобное сечение с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}(x, t)$;

б) $\partial\gamma_{\alpha\beta}/\partial n$, где n — нормаль к сечению t=const, непрерывны;

в) $\gamma_{\alpha\beta}(x,t) = \gamma^0_{\alpha\beta}$ вне некоторой окрестности U области D_0 в топологии многообразия M_0;

г) индуцированные на двумерных сечениях F_0 метрики $a_{AB}(t)$ (они индуцируются метриками $\gamma_{\alpha\beta}(x,t)$) удовлетворяют условиям 1–3 и $d\sigma_s/d\sigma_t \leq 1$ при $t < 1/2,\ s > 1/2$ в U;

д) гауссова кривизна Γ_s сечения F_0 в метрике $a_{AB}(s)$ неотрицательна ($s > 1/2$).

Из (3), «в» – «д» следует

$$\int\limits_{U\cap F_0} \Gamma_s d\sigma_t \geq 4\pi + \int\limits_{U\cap F_0} \Gamma_t d\sigma_t, \ \ t < 1/2,\ 1/2 < s$$

или

$$< \delta\Gamma > \cdot\sigma_t(U \cap F_0) \geq 4\pi, \tag{4}$$

где

$$\delta\Gamma = \Gamma_s - \Gamma_t,$$

$\sigma_t(A)$ — площадь области $A \subset F_0$ в метрике $a_{AB}(t)$,

$$< f >= \frac{1}{\sigma_t(A)} \int\limits_A f d\sigma_t -$$

интегральное среднее величины f.

Динамика 3-геометрии описывается уравнениями Эйнштейна, из которых следует ([3], с. 157)

$$^{(3)}R_t + K_{2,t} = \frac{16\pi G}{c^4}\,\varepsilon(t), \ \ t\in[0,1]; \tag{5}$$

$$K_{2,t} = (K^{\cdot\alpha}_{\alpha}(t))^2 - K_{\alpha\beta}(t)K^{\alpha\beta}(t),$$

где $K_{\alpha\beta}(t)$ — тензор внешней кривизны сечения $t = \text{const}$.

Тогда

$$< \delta^{(3)}R > + < \delta K_2 >= \frac{16\pi G}{c^4} < \delta\varepsilon >, \tag{6}$$

где

$$\delta^{(3)}R = {}^{(3)}R_s - {}^{(3)}R_t, \quad \delta K_2 = K_{2,s} - K_{2,t}, \quad \delta\varepsilon = \varepsilon(s) - \varepsilon(t), \quad t < 1/2,\ 1/2 < s.$$

Но как показывалось выше,

$$< \delta^{(3)}R > \sim\ 2 < \delta\Gamma >, \tag{7}$$

где Γ — гауссова кривизна двумерного сечения F_0. В то же время, благодаря условию "б внешняя кривизна $K_{2,t}$ будет непрерывной функцией на $M_0 \times [0,1]$. Следовательно

$$< \delta K_2 > = (K_{2,s} - K_{2,t})\big|_{x=x_0(t,s)} \xrightarrow[s\to 1/2+0]{t\to 1/2-0} 0 \tag{8}$$

Поэтому для некоторых $t_0 < 1/2$ и $1/2 < s_0$ величина $< \delta K_2 >$ пренебрежимо мала, и тогда из (4)–(8) получаем

$$< \delta\varepsilon > \gtrsim \frac{c^4}{2\pi G} \frac{1}{\sigma_{t_0}(U \cap F_0)} \,.$$

Вполне позволительно теперь написать

$$< \delta\varepsilon > \gtrsim \frac{c^4}{2\pi G} \frac{1}{\sigma} \,, \tag{9}$$

где σ — характерное сечение области D_0.

Формула (9) дает нам среднее значение скачка плотности энергии, который обеспечивает отрыв области D_0.

Из (9) получаем следующие оценки:

1) при $\sigma \sim 10^{20}$ см^2 (Солнце) $< \delta\rho > = < \delta\varepsilon > /c^2 \sim 10^7$ г/см^3;

2) $\sigma \sim 10^{12}$ см^2 (нейтронная звезда) $< \delta\rho > \sim 10^{15}$ г/см^3;

3) $\sigma \sim 10^{-66}$ см^2 (сингулярность) $< \delta\rho > \sim 10^{93}$ г/см^3.

Таким образом, отрыву малых областей препятствует мощный потенциальный барьер. Искусственное перемещение в пространстве за счет изменения топологии самого пространства потребует огромных энергетических затрат. Сверхплотные конфигурации близки по своим параметрам к тому, чтобы оторваться от пространства. Тем самым подтверждаются выводы, сделанные нами в [1] в случае замкнутой модели вселенной. Следует ожидать, что нарушение связности происходит при гравитационном коллапсе массивных звезд, ибо при этом возникают сингулярности (на основании теоремы Пенроуза [4], с. 242), влекущие сингулярность кривизны. Нетрудно заметить, что картина нарушения связности, описываемая нами, во многом сходна с процессом гравитационного самозамыкания, сопровождающего гравитационный коллапс однородных сферически-симметричных конфигураций, столь подробно разбираемым в ([5], с. 52). Поэтому можно ожидать, что образование сингулярностей происходит вследствие нарушения связности 3-пространства.

Список литературы

[1] Г у ц А. К. Изв. вузов, Физика, 1982, **5**, 23.

[2] P.Y o d z i s. Gen. Relat. and Gravit.,1973 **4**, 299.

[3] Ч. М и з н е р, К. Т о р н, Д ж. У и л е р. Гравитация, **2**, М., Мир, 1977.

[4] Х о к и н г С., Э л л и с Д ж. Крупномасштабная структура пространства-времени, М., Мир, 1977.

[5] Ч. М и з н е р, К. Т о р н, Д ж. У и л е р. Гравитация, **3**, М., Мир, 1977.