

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования «Витебский государственный  
университет имени П.М. Машерова»

# **НАУКА – ОБРАЗОВАНИЮ, ПРОИЗВОДСТВУ, ЭКОНОМИКЕ**

*Материалы XXIV(71) Региональной  
научно-практической конференции преподавателей,  
научных сотрудников и аспирантов*

Витебск, 14 февраля 2019 г.

В 2 томах

## **Том 1**

*Витебск  
ВГУ имени П.М. Машерова  
2019*

совпадает с прямым произведением  $F^0$ -корадикалов этих групп. Формацию  $F$  называют *формацией Локетта*  $F = F^0$ .

Основная цель настоящей работы – описание необходимого и достаточного условия, когда частично локальный класс Фиттинга является формацией Локетта.

Пусть  $\mathbb{P}$  – множество всех простых чисел,  $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$  и  $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$ . Класс Фиттинга  $F$  называют  $\omega$ -*локальным* [4], если локальный класс Фиттинга, порожденный  $F$ , содержится в фиттинговом произведении  $F N_{\omega'}$ , где  $N_{\omega'}$  – класс Фиттинга всех нильпотентных групп  $\omega'$ -групп. Как установлено в работе [5], каждый  $\omega$ -локальный класс Фиттинга  $F$  можно определить посредством функции  $F$  такой, что для всех  $p \in \omega$ , что  $F(p) = F(p) N_p \subseteq F$  и классы  $F(p)$  являются классами Локетта, а  $f(\omega) = F$ . Такую функцию будем называть *канонической* для  $F$ .

Развитие и усиление результатов первого автора из [6] представляет

**ТЕОРЕМА.**  $\omega$ -*Локальный класс Фиттинга  $F$  является формацией Локетта тогда и только тогда, когда все значения его канонической функции – формации Локетта.*

1. Doerk, K. Finite solvable groups / K. Doerk, T. Hawkes // Berlin–New York : Walter de Gruyter. – 1992. – P.891.
2. Lockett, P. The Fitting class  $F^*$  / P. Lockett // Math. Z. – 1974. – Bd. 137. – S. 131–136.
3. Doerk, K. On the residual of a direct product / K. Doerk, T. O. Hawkes // Arch. Math. – 1978. – Bd. 30. – S. 458–468.
4. Skiba, A. N. Multiply  $\omega$ -local formations and Fitting classes of finite groups / A. N. Skiba, L. A. Shemetkov // Siberian. Adv. Math. – 2000. – Vol. 10, № 2. – P. 112–141.
5. Воробьев, Н. Т. О наибольшей приведенной функции Хартли / Н. Т. Воробьев // Вопросы алгебры. – 1999 – Т. 15, № 1. – С. 14–17.
6. Guo, W. Formations defined by Doerk-Hawkes operation / W. Guo, S. N. Vorob'ev // J. Algebra. Appl. – 2018. – Vol. 17, № 12. // doi.org/10.1142/S0219498818502298.

## КАНОНИЧЕСКОЕ АФФИННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ ЛИ $G_4I$

А.К. Гуц<sup>1</sup>, М.Н. Подоксенов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Омск, ОмГУ имени Ф.М. Достоевского

<sup>2</sup>Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

В работе [1] был изложен метод построения аффинных представлений разрешимых вещественных групп Ли по коммутационным соотношениям соответствующей алгебры Ли. Результат, т.е. вид представления естественно зависит от вида коммутационных соотношений, и было бы полезно получить аффинное представление четырехмерных разрешимых групп Ли для коммутационных соотношений, используемых в классической монографии А.З.Петрова [2].

Цель данной работы: на примере группы Ли  $G_4I$  показать, как с помощью метода Ямагучи [1] решается задача получения желанного аффинного представления. Группа Ли  $G_4I$  интересна тем, что она фигурирует в качестве группы движений у пространств максимальной подвижности  $T_2^*$ ,  $T_2$  и  $T_3^*$ ,  $T_3$  [2].

**Материал и методы.** Рассматривается вещественная четырехмерная разрешимая алгебра Ли  $\mathfrak{g}_4I$  типа Бианки в форме [2]. Методом Ямагучи находится аффинное представление ее группы Ли в аффинном арифметическом пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

**Результаты и их обсуждение.** Пусть  $G$  вещественная связная группа Ли. Она допускает *аффинное представление в  $\mathbb{R}^n$* , если существует гомоморфизм

$$\alpha : G \rightarrow \text{Aff}(\mathbb{R}^n) \cong \text{GL}(\mathbb{R}^n), \quad G \ni g \mapsto \alpha(g) \in \text{Aff}(\mathbb{R}^n),$$

где  $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$  – группа аффинных преобразований  $n$ -мерного арифметического пространства  $\mathbb{R}^n$ , или, равно, общих линейных преобразований пространства  $\mathbb{R}^n$ .

Пусть дана  $n$ -мерная группа Ли  $G_n$ , ее алгебра Ли  $\mathfrak{g}_n$  с базисом  $X_1, \dots, X_n$ . Строим представление

$$\Lambda : \mathfrak{g}_n \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_n), \quad \Lambda(X_i) : \mathfrak{g}_n \ni X_j \mapsto \Lambda(X_i)X_j \in \mathfrak{g}_n,$$

такое, что

$$\Lambda(X_i)X_j - \Lambda(X_j)X_i = [X_i, X_j].$$

Рассматриваем алгебру Ли группы Ли  $Aff(\mathbf{R}^n)$ :

$$\text{aff}(\mathbf{R}^n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : A - n \times n - \text{матрица}, a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n \right\}.$$

Определяем представление  $\rho: \mathfrak{g}_n \rightarrow \text{aff}(\mathbf{R}^n)$ , полагая

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} & t_1 \\ \Lambda(X) & \vdots \\ & t_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \sum_{i=1}^n t_i X_i \in \mathfrak{g}_n, \quad \rho(X_i) = \begin{pmatrix} \Lambda(X_i) & e_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i.$$

Пусть  $G(n)$  – аналитическая подгруппа группы  $Aff(\mathbf{R}^n)$  с алгеброй Ли  $\rho(\mathfrak{g}_n)$ . Тогда  $G(n) \cong G_n$  и  $G(n)$  действует просто транзитивно на  $\mathbf{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n, 1)^T : x^i \in \mathbf{R}\}$  (см. [1]).

Имеем 1-параметрическую подгруппу  $G(t_i) = \exp(t_i X_i)$  группы Ли  $G_n$ , которой соответствует аффинное преобразование  $\exp(t_i \rho(X))$ : в  $\mathbf{R}^n = \{(x^1, \dots, x^n, 1) : x^i \in \mathbf{R}\}$ :

$$G_n \ni \exp(t_i X_i) \rightarrow \exp(t_i \rho(X)) = e^{t_i \rho(X_i)} \in G(n),$$

$$e^{t_i \rho(X_i)} : \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow e^{t_i \rho(X_i)} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t_i \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Преобразования (1) порождают аффинное представление  $\alpha(G_n)$ :

$$\alpha: G_n \rightarrow GL(\mathfrak{g}_n) \cong GL(\mathbf{R}^n),$$

$$\alpha(\exp(t_i \Lambda(X_i))) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = e^{t_i \Lambda(X_i)} \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + t_i e_i, \quad t_i \in \mathbf{R},$$

$$\exp: \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}_n) \rightarrow GL(\mathfrak{g}_n),$$

группы Ли  $G_n$  с параметрами  $(t_1, \dots, t_n)$ .

Коммутационные соотношения для алгебры Ли  $\mathfrak{g}_4 I$  имеют вид [2]:

$$[X_2, X_3] = X_1, \quad [X_1, X_4] = cX_1, \quad [X_2, X_4] = X_2, \quad [X_3, X_4] = (c-1)X_3, \quad c \in \mathbf{R}.$$

Находим матрицы Ямагучи:

$$\Lambda(X_1) = \Lambda(X_2) = 0,$$

$$\Lambda(X_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(X_4) = \begin{pmatrix} -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(c-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e^{t_1\rho(X_1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{t_2\rho(X_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{t_3\rho(X_3)} = \begin{pmatrix} 1 & -t_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$e^{t_4\rho(X_4)} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c^n t_4^n}{n!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t_4^n}{n!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(c-1)^n t_4^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Отсюда получаем соответствующие 1-параметрические группы аффинных преобразований:

$$G(t_1): (x^1, x^2, x^3, x^4) \rightarrow (x^1 + t_1, x^2, x^3, x^4),$$

$$G(t_2): (x^1, x^2, x^3, x^4) \rightarrow (x^1, x^2 + t_2, x^3, x^4),$$

$$G(t_3): (x^1, x^2, x^3, x^4) \rightarrow (x^1 - t_3 x^2, x^2, x^3 + t_3, x^4),$$

$$G(t_4): (x^1, x^2, x^3, x^4) \rightarrow (e^{-ct_4} x^1, e^{-t_4} x^2, e^{-(c-1)t_4} x^3, x^4 + t_4).$$

Композиция этих 1-параметрических подгрупп дает аффинное представление всей группы.

**Заключение.** В данной работе найдено аффинное представление вещественной разрешимой группы Ли  $G_4I$  для коммутационных соотношений из [2]. Аналогично находятся аффинные представления остальных разрешимых четырехмерных групп Ли.

1. Yamaguchi S. On complete affinely flat structures of some solvable Lie groups // Memories of the Faculty of Science, Kyushu Univ., Ser. A. – 1979. – Vol.33, no.2. – P. 209-218.
2. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. – М.: Изд-во «Наука», 1966. – 496 с.

## КОНЦЕПЦИЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ДАННЫХ В УЧЕБНОМ ПРИЛОЖЕНИИ ДЛЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»

*С.А. Ермоченко  
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова*

На кафедре прикладного и системного программирования уже несколько лет ведётся разработка учебного web-приложения-тренажёра, позволяющего студентам развивать навыки решения задач по дисциплинам, имеющим математический компонент [1–2]. Специфика практических задач по этим дисциплинам заключается в том, что для преподавателя затруднён подбор условий таких задач, для студента затруднён процесс решения задач, а после решения для преподавателя затруднён процесс проверки решений. Автоматизация этих процессов позволяет экономить время, как студентов, так и преподавателей, что обуславливает *актуальность работы*. Одной из таких дисциплин является дисциплина «Теоретическая механика», читаемая у студентов специальности «Прикладная математика». Для решения описанных выше проблем и решено было разработать модуль для приложения-тренажёра.