УДК 513.812

Об отображениях семейств орициклов в пространстве Лобачевского

А. К. Гуц (Новосибирск)

В данной статье приводятся примеры семейств орициклов в n-мерном пространстве Лобачевского $Л^n$ ($n \geqslant 2$), инвариантность которых относительно биективных отображений определяет эти отображения как движения. В частности, биективное отображение, отображающее любой орицикл на орицикл, будет движением.

Прямую, проходящую через точку X, будем обозначать символом $l(X)$. Пусть $L \equiv \{l(X)\colon X \in Л^n\}$ — семейство параллельных прямых. С помощью этого семейства построим модель Пуанкаре пространства Лобачевского. Далее все объекты в модели обозначаем теми же символами, что и соответствующие им объекты в самом пространстве $Л^n$, но со знаком $\wedge$ сверху. Тогда пусть $\hat{Л}^n \equiv \{x^1 > 0\}$ и

$$\hat{l}(X) \equiv \{x^1 > 0;\ x^2, \ldots, x^n = \text{const}\}, \quad l(X) \in L.$$

Орициклы, лежащие в двумерных плоскостях, проходящих через прямые семейства L, изобразятся либо евклидовой прямой (E-прямой), E-параллельной E-гиперплоскости $H \equiv \{x^1 = 0\}$, либо E-окружностями, лежащими в E-плоскостях, ортогональных H, и касающимися E-гиперплоскости H.

Движения в пространстве изобразятся в модели либо E-симметриями относительно E-плоскостей, ортогональных H, либо E-инверсиями относительно E-сфер с центрами, лежащими в H.

Пусть $T(Л^n)$ — транзитивная подгруппа группы движений, элементы которой в модели задаются следующим образом:

$$\hat{t}\colon (x^1, \ldots, x^n) \to (\lambda(t)\, x^1,\ \lambda(t)\, x^2 + a^2(t), \ldots, \lambda(t)\, x^n + a^n(t)),$$

где $t \in T(Л^n)$, а $\lambda(t)$, $a^2(t)$, ..., $a^n(t)$ — числа, зависящие от t.

§ 1. Отображение ориконусов и эквиконусов

Пусть $n > 2$. Назовем множество, полученное вращением вокруг прямой $l(X)$ орицикла (эквидистанты), проходящего через точку X под углом α $\left(0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ к прямой $l(X)$ и лежащего в двумерной плоскости, проходящей через прямую $l(X)$ семейства L, *ориконусом* (*эквиконусом*).

Пусть $\{C(X)\colon X \in Л^n\}$ — семейство ориконусов или эквиконусов с фиксированным, одним и тем же углом α для всех множеств $C(X)$.

Можно написать, что $\{C(X)\colon X\in Л^n\}\equiv T(Л^n)C(O)$, где O — точка в пространстве с координатами $(1, 0, ..., 0)$.

Теорема 1. *Пусть $f\colon Л^n\to Л^n$ $(n>2)$ — биективное отображение такое, что $f[C(X)]=C[f(X)]$. Тогда f есть движение.*

В случае, когда эквиконус $C(X)$ таков, что гипорорисфера, ортогональная к прямой $l(X)$, в точке X имеет пересечение с $C(X)$, состоящее лишь из точки X, имеющееся доказательство использует условие непрерывности отображения, и здесь не приводится (находится в печати).

Доказательство. Приводимое доказательство очень наглядно в модели Пуанкаре.

A) Пусть множество $C(X)$ есть ориконус.

a) Множество $C(X)$ пересекается с прямой $l(X)$ по двум точкам X и X^+ при $\alpha>0$ и по одной точке X при $\alpha=0$. В последнем случае считаем, что $X^+=X$. Соответственно $C(X)$ разбивает пространство на три или две связные части. Обозначим через $C^+(X)$ ту связную часть, которая содержит часть прямой $l(X)$, имеющей в модели координату x^1, изменяющуюся от нуля до x^1-координаты точки X^+ (считаем, что x^1-координата точки X^+ меньше x^1-координаты точки X).

Пусть точка Y лежит на прямой $l(X)$ и ориконус $C(Y)$ таков, что для всякой двумерной плоскости P, содержащей прямую $l(X)$, орициклы множества $C(X)\cap P$ лишь касаются орициклов множества $C(Y)\cap P$, т. е. мощность множества $C(X)\cap C(Y)\cap P$ равна двум:

$$\mu[C(X)\cap C(Y)\cap P]=2. \tag{1}$$

Тогда имеем:

(i) $$f[C(Y)]\subset C^+[f(X)];$$

(j) для всякой двумерной плоскости P, содержащей прямую $l[f(X)]$,

$$\mu[C[f(X)]\cap C[f(Y)]\cap P]=2.$$

В самом деле, рассмотрим множество всех ориконусов $\{C(Z)\}$, где точка Z принадлежит ориконусу $C(X)$, причем ориконусы $C(Z)$ и $C(X)$ имеют один общий орицикл $h(Z)$ (образующую ориконуса): $C(Z)\cap C(X)=$ $=h(Z)\cup M$, где M некоторое множество. Тогда имеем

$$\mu[C(Y)\cap C(Z)]=\mu[C(Y)\cap h(Z)]=1. \tag{2}$$

Так как после отображения семейство $\{C[f(Z)]\}$ будет для ориконуса $C[f(X)]$ аналогичным семейству $\{C(Z)\}$ для ориконуса $C(X)$, то если бы множество $C[f(Y)]$ не лежало в $C^+[f(X)]$, имело бы место неравенство

$$\mu\{f[C(Y)]\cap C[f(Z)]\}>1,$$

которое противоречит в силу биективности отображения f равенству (2). Итак, (i) доказано; отсюда же следует и (j).

б) Пусть $\{X_n\}$ $(n=..., -1, 0, 1, ...)$ — последовательность точек на прямой $l(X)$, где $X=X_0$, такая, что для любой двумерной плоскости P, содержащей прямую $l(X)$, имеем

$$\mu[C(X_n)\cap C(X_m)\cap P]=\begin{cases}2, & n=m\pm 1,\\ 0, & n\neq m\pm 1.\end{cases}$$

Тогда точки множества $\{f(X_n)\}$ будут лежать на прямой $l[f(X)]$, что следует из условия теоремы и пункта а).

Пусть $\{Y_n\}$ $(n=..., -1, 0, 1, ...)$ — другая последовательность точек, аналогичная точкам $\{X_n\}$, на прямой $l(X)$. Тогда точки $\{f(Y_n)\}$ лежат на прямой $l[f(Y_0)]$.

Множества $\{C(X_n)\}$ и $\{C(Y_n)\}$ пересекаются друг с другом каждым своим ориконусом, т. е. для каждого $C(X_n)$ найдется такой ориконус $C(Y_m)$, что $C(X_n)\cap C(Y_m)\neq\varnothing$. Отображение f сохраняет это свойство. Однако если прямые $l[f(X)]$ и $l[f(Y_0)]$ не совпадают, то указанное свойство обязательно нарушится после отображения (что легко видеть на модели Пуанкаре).

Итак, для любой точки X имеем

$$f[l(X)]=l[f(X)]. \tag{3}$$

в) Пусть ориконусы $C(X)$ и $C(Y)$ таковы, что точка Y лежит на прямой $l(X)$ и выполняется условие (1). Положим $s(X)=C(X)\cap C(Y)$. Множество $s(X)$ есть $(n-2)$-сфера, лежащая в гиперорисфере. Ясно, что $f[s(X)]=s[f(X)]$. Пусть $q[l(X)]\equiv\bigcup\limits_{Y\in l(x)} s(Y)$; тогда

$$f[q[l(X)]]=q[l[f(X)]]. \tag{4}$$

г) Множество $\hat{q}[l(X)]$ есть E-конус, вершина которого лежит в H. Продолжим отображение $\hat{f}$ на все евклидово пространство E^n. Если точка X принадлежит H, то ее образом считаем начало X^* луча $\hat{l}[f(Y)]$, где X — начало луча $\hat{l}(Y)$.

Положим

$$F(X)=\begin{cases}\hat{f}(X), & X\in\hat{Л}^n,\\ X^*, & X\in H,\\ \sigma\circ\hat{f}\circ\sigma^{-1}(X), & X\in\{x^1<0\},\end{cases}$$

где σ — E-симметрия относительно H. Если точка X есть начало луча $\hat{l}(Y)$, то положим $K(X)\equiv\hat{q}[l(Y)]$. Пусть точка Z лежит внутри E-конуса $K(X)$. Если $Z\in\hat{l}(X)$, то $f(Z)$ лежит внутри E-конуса $K[F(X)]$ в силу (3) и (4). Пусть $Z\notin\hat{l}(X)$. Тогда существуют такие точки V и W из H, что точка Z принадлежит $(n-2)$-мерному гиперболоиду $\Gamma=K(V)\cap K(W)$, причем $\Gamma\cap K(X)=\varnothing$ и $\Gamma\cap\hat{l}(X)\neq\varnothing$. Тогда $F(\Gamma)$ есть также $(n-2)$-мерный гиперболоид, и если бы точка $F(Z)$ не лежала внутри E-конуса $K[F(X)]$, то, так как $F(\Gamma)\cap l[F(X)]\neq\varnothing$, имели бы $F(\Gamma)\cap K[F(X)]\neq\varnothing$, что противоречит вышеприведенному равенству.

Итак, отображение F отображает внутренность E-конуса $K(X)$ на внутренность E-конуса $K[F(X)]$.

Пусть X — точка из $\hat{Л}^n$. Тогда положим

$$\overline{K}(X) \equiv \bigcap_{X \in K(Y)} \overline{K}(Y), \qquad Y \in H,$$

где через $\overline{K}(Y)$ обозначено объединение E-конуса $K(Y)$ и его внутренности $K^0(Y)$. Множество $\overline{K}(X)$ есть E-конус с тем же углом раствора, что и у E-конуса $K(X)$ при $X \in H$. Нетрудно видеть, что граница E-конуса $\overline{K}(X)$ отобразится на границу E-конуса $\overline{K}[F(X)] \equiv \bigcap_{X \in K(Y)} \overline{K}[F(Y)]$, т. е. $F[K(X)] = K[F(X)]$.

Рассматривая семейство двойных E-конусов $\{K(X) : X \in E^n\}$, совпадающее на $\hat{Л}^n$ с вышепостроенным, видим, что биективное отображение $F : E^n \to E^n$ обладает тем свойством, что $F[K(X)] = K[F(X)]$, и, значит, по теореме А. Д. Александрова [1], [2] является аффинным, т. е.

$$[F(X)]^k = \sum_{i=1}^{n} a_i^k x^i + a^k \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Так как $F(H) = H$ и имеет место (3), то $a_1^k = a_k^1 = 0 \quad (k = 2, \ldots, n), a^1 = 0$. Матрицу отображения F можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\quad GU \quad} \\ 0 & \end{bmatrix},$$

где U — ортогональная матрица, а G — эрмитова. Но поскольку $(n-2)$-сфера, лежащая в H, переходит в $(n-2)$-сферу, отсюда следует, что матрица G единичная (с точностью, возможно, до постоянного множителя, что однако не ограничивает общности, так как E-подобие соответствует движению).

Вектор $\left(1, \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, 0, \ldots, 0\right)$, где α — угол раствора E-конуса, лежащий на E-конусе, должен перейти в аналогичный и, значит, должен составлять угол $\alpha/2$ с вектором $(1, 0, \ldots, 0)$. Отсюда легко вычислить, что $a_1^1 = 1$.

Подытоживая, видим, что отображение F можно представить как композицию E-симметрий, изображающих движение (см. [3], стр. 145), и, значит, f есть движение.

Случай А) доказан.

В) Пусть $C(X)$ есть эквиконус. Тогда, за исключением случая, оговоренного выше, доказательство является, по сути, повторением доказательства для ориконусов.

Теорема доказана.

§ 2. Отображение семейства орициклов

Пусть $n=2$. Возьмем точку $O \in Л^2$ и рассмотрим два различных орицикла $h_1(O)$ и $h_2(O)$, проходящих через точку O под углами α и β (которые определяются известным образом) соответственно к прямой $l(O)$; при этом $0 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Положим $H(O) = h_1(O) \cup h_2(O)$ и рассмотрим семейство $\{H(X) : X \in Л^2\} \equiv \equiv T(Л^2)H(O)$.

Теорема 2. *Если $f: Л^2 \to Л^2$ — биективное отображение такое, что $f[H(X)] = H[f(X)]$, то f есть движение.*

Доказательство. А) В модели Пуанкаре орицикл $h_1(O)$ изображается E-прямой, E-параллельной оси H. Тогда орицикл $h_2(O)$ изображается E-окружностью, касающейся оси H.

а) Легко видеть, что $f[h_i(X)] = h_i[f(X)]^{\bullet}$ $(i = 1, 2)$, где $\{h_i(X) :\ X \in Л^2\} \equiv \equiv T(Л^2)h_i(O)$.

Пусть $\{h_2(X)\}$ — всевозможные орициклы, имеющие в модели общую точку X^*, лежащую на оси H. Тогда орициклы $\{h_2[f(X)]\}$ будут обладать этим же свойством, и соответствующую им общую точку на H обозначим через X^{**}. Продолжаем $\hat{f}$ на H, полагая $\hat{f}(X^*) = X^{**}$. Так как точка орицикла $h_2(X)$ с наибольшей координатной x^1 переходит в такую же точку на орицикле $h_2[f(X)]$, то, используя вышесказанное, получаем, что

$$f[l(X)] = l[f(X)], \tag{5}$$

поскольку прямая $\hat{l}(X)$ является объединением точек с наибольшей координатой x^1 всевозможных орициклов $\hat{h}_2(X)$, имеющих общую точку X^*, лежащую в H, причем точка X^* является началом луча $\hat{l}(X)$.

б) Используя (5), нетрудно видеть, что отображение f сохраняет множества вида $K(X) \equiv \bigcup\limits_{Y \in \hat{l}(X)} \hat{s}(Y)$, $X \in H$, где Y — единственная общая точка двух орициклов $h_2(Z)$ и $h_2(W)$ таких, что существует орицикл $h_1(V)$, что имеем:

$$s(Y) = [h_2(Z) \cup h_2(W)] \cap h_1(V),$$

$$\mu(h_2(Z) \cap h_1(V)] = \mu[h_2(W) \cap h_1(V)] = 1.$$

Множество $K(X)$ состоит из двух E-лучей, наклоненных к E-лучу $\hat{l}(X)$ под одним и тем же углом. Поступая дальше так же, как и в пункте г) теоремы 1, построим биективное отображение $F: E^2 \to E^2$, сохраняющее четыре различных семейства E-параллельных E-прямых. Откуда сразу следует, что k-ая компонента отображения F зависит от k-ой координаты, т. е. $F^k(x^1, x^2) = F^k(x^k)$ $(k=1, 2)$. Пусть семейство E-прямых, входящее в множество $K(X)$, задается уравнениями

$$x^i(\tau) = \varkappa^i\tau + a^i \quad (i = 1, 2; -\infty < \tau < +\infty), \qquad \varkappa^1, \varkappa^2 \neq 0. \tag{6}$$

в) Отображение F монотонно на E-прямых (6). Действительно, это достаточно показать для E-лучей множества $K(X)$ при $X \in H$ и $K(X) \subseteq \hat{\Pi}^2$. Пусть Y и Z — две точки луча l на $K(X)$ такие, что, скажем, x^1-координата точки Y меньше x^1-координаты точки Z, т. е. $x^1(Y) < x^1(Z)$. Тогда $x^1[\hat{f}(Y)] < x^1[\hat{f}(Z)]$. В самом деле, пусть $h_2(V)$ — такой орицикл, что

$$\mu[h_2(V) \cap h_1(Y)] = 2, \qquad \mu[h_2(V) \cap h_1(Z)] = 1,$$

тогда после отображения эти равенства должны сохраниться, откуда и следует, что $x^1[f(Y)] < x^1[f(Z)]$.

г) В силу б) и в) существует строго монотонная вещественная функция $\sigma(\tau, a^1, a^2)$ такая, что

$$F^k(\varkappa^k\tau + a^k) = \varkappa^k\sigma(\tau, a^1, a^2) + F^k(a^k) \quad (k = 1, 2). \tag{7}$$

Из (7), исключая функцию $\sigma(\tau, a^1, a^2)$ (используем при этом (7) при $k=1$ и $k=2$) и учитывая тот факт, что (7) верно для любых векторов (a^1, a^2), скажем, верно для $(\bar{a}^1, \bar{a}^2)$, получим

$$F^k(\varkappa h + \xi) + F^k(-\varkappa h + \eta) = F^k(\xi) + F^k(\eta),$$

где $\varkappa = \varkappa^k/\varkappa^m$, $h = \bar{a}^m - a^m$, $\xi = a^k$, $\eta = \bar{a}^k$. Числа ξ, η, h — независимые, поэтому взяв $\eta = \varkappa h$ и приняв $F(0, 0) = (0, 0)$, что возможно без ограничения общности, получим

$$F^k(\xi + \eta) = F^k(\xi) + F^k(\eta) \quad (k = 1, 2). \tag{8}$$

Так как функции F^k монотонны, то из (8) следует, что $F^k(\xi) = \alpha^k\xi$, где $\alpha^k = \mathrm{const}$ $(k=1, 2)$ (см. [4]). Итак, отображение F — аффинное. Повторяя пункт г) теоремы 1, получим

$$F(X) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix},$$

где $a, b, c = \mathrm{const}$. Так как E-подобие отвечает движению, то можно считать, не ограничивая общности, что $b=1$. Тогда легко видеть, что $a=1$. Полученное показывает, что f есть движение.

В) Оба орицикла изображаются E-окружностями.

а) Если орициклы $\hat{h}_1(X)$ и $\hat{h}_2(X)$ симметричны относительно прямой $\hat{l}(X)$, то имеем как раз ситуацию, рассмотренную в теореме 1. Повторяя это доказательство и используя пункт б) теоремы 2, построим отображение $F: E^2 \to E^2$, которое сохраняет три семейства E-параллельных E-прямых. Используя равенство (5), имеющее здесь место, нетрудно убедиться в монотонности отображения F на указанных прямых. С помощью аффинных преобразований от отображения F можно перейти к отображению, которое рассматривалось в случае А). Отсюда следует аффинность отображения F. Повторяя конец пункта г) из А), убеждаемся, что и в этом случае f есть движение.

б) Пусть орицикл $\hat{h}_1(X)$ не симметричен орициклу $\hat{h}_2(X)$. Пусть Y и Z — точки касания орициклов $h_1(X)$ и $h_2(X)$ с осью H. Легко видеть, что $f[h_i(X)]=h_i[f(X)]$ $(i=1, 2)$. Значит, f отображает всякий орицикл, изображающийся в модели Пуанкаре E-окружностью, на такой же орицикл. Обозначая указанный орицикл, проходящий через точку X, через $h(X)$, получим $f[h(X)]=h[f(X)]$. Тогда найдется точка X_1 такая, что орицикл $h(X_1)$ касается орициклов $h_1(X)$ и $h_2(X)$ и точка V его касания с осью H лежит между точками Y и Z. Та же ситуация будет наблюдаться и после отображения. Повторяя это рассуждение для орициклов $h_1(X)$ и $h(X_1)$, найдем такую точку X_2, что орицикл $h(X_2)$ касается орициклов $h_1(X)$ и $h(X_1)$ и точка его касания с осью H лежит между точками Y и V. Повторяя этот процесс, можно построить последовательность орициклов $\{h(X_n)\}$, точки касания которых $\{V_n\}$ с осью H образуют всюду плотное множество на отрезке $[Y, Z]$ оси H. Это множество E-изометрично (с точностью, возможно, до постоянного множителя $\lambda>0$) отобразится на аналогичное всюду плотное множество $\{\hat{f}(V_n)\}$ на отрезке $[\hat{f}(Y), \hat{f}(Z)]$ оси H.

Пусть W—точка пересечения орициклов $h_1(X)$ и $h_2(X)$, имеющая меньшую координату x^1. Если E-окружность $\hat{h}_1(X)$ имеет радиус $r>0$, меньший, чем радиус E-окружности $\hat{h}_2(X)$, то проведем через точку W орицикл $h(W)$ такой, что E-окружность $\hat{h}(W)$ имеет радиус, равный r. Тогда точка касания M орицикла $\hat{h}(W)$ с осью H лежит внутри отрезка $[Y, Z]$. Значит, существуют последовательности $\{V^+_{n(k)}\}$ и $\{V^-_{n(k)}\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ точек множества $\{V_n\}$, E-сходящиеся к точке M соответственно справа и слева; причем $\hat{h}(W)\cap\hat{h}(V^\pm_{n(k)})\neq\varnothing$ $(k=1, 2, \ldots)$.

Отсюда в силу сказанного выше о множестве $\{V_n\}$ и того факта, что E-окружность $\hat{h}(W)$ определяется точкой W и условием касания с осью H, сразу следует, что E-окружность $\hat{h}[f(W)]$ имеет радиус, равный радиусу E-окружности $\hat{h}_1[f(X)]$.

Итак, мы показали, что симметричные относительно прямой орициклы отображаются в симметричные, т. е. дело сводится к случаю а) из В).

Теорема доказана.

Следствие. *Если биективное отображение $f: Л^2\to Л^2$ обладает тем свойством, что любой орицикл оно отображает на орицикл, то f есть движение.*

Действительно, без ограничения общности можно считать, что орициклы, изображаемые E-прямыми, f отображает на такие же орициклы, поскольку если $h_1(X)$ и $h_1(Y)$ — два таких орицикла, то существуют орициклы $\{h_2(X_n)\}$ $(n=\ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ такие, что

$$\mu[h_1(X)\cap h_2(X_n)]=2, \quad \mu[h_2(X_n)\cap h_1(Y)]=1,$$

$$\mu[h_2(X_n)\cap h_2(X_m)]=\begin{cases}0, & n\neq m\pm 1,\\ 1, & n=m\pm 1.\end{cases}$$

Значит, если $\hat{f}[h_1(X)]$ — E-окружность, то и $\hat{f}[h_1(Y)]$ есть E-окружность. Тем самым мы находимся в условиях пункта А), откуда и следует наше утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $f: Л^n \to Л^n$ $(n \geqslant 2)$ — *биективное отображение и любой орицикл отображает на орицикл. Тогда* f *есть движение.*

Доказательство. Достаточно показать без ограничения общности, что двумерная плоскость, проходящая через прямую $l(X)$, отображается на такую же плоскость. Тогда, применив следствие теоремы 2, получим требуемое. Воспользовавшись моделью Клейна пространства Лобачевского, легко видеть, что всевозможные орициклы, лежащие в двумерной плоскости, отображаются на орициклы, лежащие в одной и той же двумерной плоскости.

Но тогда, если P — двумерная плоскость, проходящая через прямую $l(X)$, без ограничения общности можно считать, что она отображается на себя, причем орициклы h_1, лежащие в P, отображаются на такие же орициклы. Если Q — плоскость, проходящая через прямую $l(Y)$, $X \neq Y$, и $Q \cap P \neq \varnothing$, то образом плоскости Q будет плоскость, проходящая через прямую $l[f(Y)]$. В самом деле, $P \cap Q = l$ — прямая, но тогда $f(P) \cap f(Q) = f(l)$ также прямая, причем $\hat{f}(l)$ является E-полуокружностью. Значит, существует E-прямая, орицикл h_1, лежащий в плоскости P, такой, что $\mu[h_1 \cap f(l)] = 2$. Но в то же время, в силу вышесказанного, $\mu[f^{-1}(h_1) \cap l] = 1$, т. е. получаем противоречие с биективностью отображения f.

Отсюда сразу следует, что (без ограничения общности) двумерные плоскости, проходящие через прямые $\{l(X) \colon X \in Л^n\}$, отображаются сами на себя, чего мы и добивались.

Теорема доказана.

(Поступила в редакцию 21/VI 1972 г.)

Литература

1. А. Д. Александров, В. В. Овчинникова, Замечания к основам теории относительности, Вестник ЛГУ, вып. **11** (1953), 95—100.
2. A. D. Alexandrov, Contribution to chronogeometry, Canad. J. Math., **19**, № **6** (1967), 1119—1128.
3. Б. А. Розенфельд, Многомерные пространства, Москва, изд-во «Наука», 1966.
4. А. Д. Александров, Об одном обобщении функционального уравнения $f(x+y) = f(x) + f(y)$, Сиб. матем. ж., **XI**, № **2** (1970), 264—279.