ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

№ 9 ФИЗИКА 1973

УДК 530.12 : 531.51

А. К. ГУЦ

О ГРАВИТАЦИОННОМ АНАЛОГЕ ЭФФЕКТА ЗЕЕМАНА

Получена формула, позволяющая рассчитывать спин-гравитационное взаимодействие, аналогичное эффекту Зеемана.

Целью данной заметки является получение формулы, позволяющей рассчитывать спин-гравитационное взаимодействие, аналогичное эффекту Зеемана. Предсказавший это явление Зельдович Я. Б. [1] высказывал мысль, что эффект вызывают компоненты $g_{0\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ [2]. Однако это не совсем так: указанные компоненты могут быть отличными от нуля, тем не менее эффект отсутствовать.

Полученная нами формула — инвариант по отношению к произвольным преобразованиям координат.

Далее везде $i, \kappa, l, ... = 0, 1, 2, 3$; $\alpha, \beta, \gamma, ... = 1, 2, 3$.

§ 1. ВЫВОД ФОРМУЛЫ

Пусть $h^i_{(a)}$, $h_{(a)i}$ обозначают соответственно контрвариантные и ковариантные компоненты тетрады, отмечаемой индексом (a), причем

$$h^{(a)\,i} = \eta^{(ab)}\,h^i_{(b)}, \quad h^i_{(a)} = \eta_{(ab)}\,h^{(b)\,i}, \quad g_{i\kappa}\,h^i_{(0)}\,h^\kappa_{(0)} > 0,$$

где $\eta_{(ab)} = \{1, -1, -1, -1\}$ — метрический тензор Меньковского. Связь между тетрадным полем и метрическим полем дается соотношениями

$$g_{i\kappa} = h_{(a)\,i}\,h^{(a)}_\kappa, \quad g^{i\kappa} = h^i_{(a)}\,h^{(a)\,\kappa}, \quad h^i_{(a)}\,h^{(a)}_\kappa = \delta^i_\kappa.$$

Тетрадное поле задается с точностью до поворотов

$$\lambda_{(a)\,l} = \Omega^{(b}_{(a)}\,(x)\,h_{(b)\,i},$$

где матрица $\|\Omega^{(a)}_{(b)}(x)\|$ ортогональная. Тогда тетрады $h^{(a)}_l$ преобразуются с помощью ортогональной матрицы

$$\widetilde{\Omega}^{(a)}_{(b)}(x) = \eta^{(ac)}\,\Omega^{(t)}_{(c)}(x)\,\eta_{(tb)}. \tag{1}$$

Запишем уравнение Дирака в виде

$$i\hbar\gamma^\kappa\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^\kappa} - \Gamma_\kappa\psi\right) + \frac{e}{c}\,\gamma^\kappa A_\kappa\,\psi - mc\psi = 0, \tag{2}$$

где

$$\Gamma_\kappa = \frac{1}{4}\,g_{ml}\left(\frac{\partial h^{(s)}_r}{\partial x^\kappa}\,h^l_{(s)} - \Gamma^l_{r\kappa}\right)s^{mr} + a_\kappa\cdot I$$

([3], стр. 381; [4], стр. 131).

Мы предположим теперь, что искомая формула имеет вид

$$\mathfrak{Z} = \frac{\hbar c}{2} \sum_{\alpha} B^{\alpha} \sigma_{\alpha},$$

где величины B^{α} вещественны, не содержат постоянной Планка $\hbar$, и являются функциями только от компонент тетрад.

Уравнение (2) можно записать в виде

$$\hat{D}_{\mp} u_{\pm} + \sum_{\tau} C_{\tau} \sigma_{\tau} u_{\mp} = 0,$$

где

$$\psi = \begin{pmatrix} u_{+} \\ u_{-} \end{pmatrix},$$

$$\hat{D}_{\mp} \equiv i\hbar h^{\kappa}_{(0)} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\hbar}{2} \sum_{\alpha} B^{\alpha} \sigma_{\alpha} - i\hbar a_{\kappa} h^{\kappa}_{(0)} + \frac{e}{c} h^{\kappa}_{(0)} A_{\kappa} \mp mc;$$

$$B^{\alpha} \equiv A_{mr,\kappa} \left\{ h^{\kappa}_{(0)} \sum_{\gamma<\beta} h^{mr}_{(\gamma\beta)} \varepsilon_{\gamma\alpha\beta} + \sum_{\mu} h^{\kappa}_{(\mu)} \sum_{\gamma} h^{mr}_{(0\gamma)} \varepsilon_{\mu\gamma\alpha} \right\},$$

$$C_{\tau} \equiv i\hbar h^{\kappa}_{(\tau)} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} - i\hbar P_{\tau} - h^{\kappa}_{(\tau)} \left(i\hbar a_{\kappa} - \frac{e}{c} A_{\kappa} \right),$$

$$P_{\tau} \equiv \frac{1}{2} A_{mr,\kappa} \left\{ h^{\kappa}_{(0)} h^{mr}_{(0\tau)} - \sum_{\mu} h^{\kappa}_{(\mu)} \sum_{\alpha<\beta} h^{mr}_{(\alpha\beta)} \sum_{\gamma} \varepsilon_{\alpha\gamma\beta} \varepsilon_{\mu\gamma\tau} \right\},$$

$$A_{mr,\kappa} = \frac{1}{2} g_{ml} \left(\frac{\partial h^{(s)}_{r}}{\partial x^{\kappa}} h^{l}_{(s)} - \Gamma^{l}_{r\kappa} \right),$$

$$h^{mr}_{(i\kappa)} \equiv h^{m}_{(i)} h^{r}_{(\kappa)} - h^{m}_{(\kappa)} h^{r}_{(i)},$$

где $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — символ Леви — Чевитта в специальной теории относительности.

Выпишем компоненты B^{α} подробнее:

$$B^{1} = A_{mr,\kappa} \{ - h^{\kappa}_{(0)} h^{mr}_{(23)} + h^{\kappa}_{(2)} h^{mr}_{(03)} - h^{\kappa}_{(3)} h^{mr}_{(02)} \},$$

$$B^{2} = A_{mr,\kappa} \{ h^{\kappa}_{(0)} h^{mr}_{(13)} - h^{\kappa}_{(1)} h^{mr}_{(03)} + h^{\kappa}_{(3)} h^{mr}_{(01)} \},$$

$$B^{3} = A_{mr,\kappa} \{ - h^{\kappa}_{(0)} h^{mr}_{(12)} + h^{\kappa}_{(1)} h^{mr}_{(02)} - h^{\kappa}_{(2)} h^{mr}_{(01)} \},$$

откуда сразу получаем

$$B^{\alpha} = \frac{1}{2} A_{mr,\kappa} \sum_{i,p,l} \varepsilon^{(ipl\alpha)} h^{mr}_{(ip)} h^{\kappa}_{(l)}.$$

Нетрудно видеть, что только эти величины обладают вышеприведенными условиями. Тем самым требуемая формула получена. Она обладает следующими свойствами:

а) величина $\mathfrak{Z}$ не изменяется при произвольных преобразованиях координат, поскольку $A_{mr,\kappa}$ и $h^{mr}_{(ip)} h^{\kappa}_{(l)}$ — тензоры третьего ранга;

б) по отношению к чисто пространственным поворотам тетрад с постоянными коэффициентами, то есть когда матрица $\Omega^{(a)}_{(b)}$ имеет вид

$$\Omega^{(0)}_{(0)} = 1, \quad \Omega^{(\alpha)}_{(0)} = \Omega^{(0)}_{(\alpha)} = 0 \ (\alpha = 1, 2, 3),$$

величины B^{α} ведут себя как псевдовектор. И, значит, $\mathfrak{Z}$ ведет себя так же, как ее аналог в квантовой теории поля. Это следует из формулы (1).

Более интересно свойство (a). Из него следует независимость эффекта от произвола в выборе системы координат.

§ 2. СИНХРОННАЯ СИСТЕМА ОТСЧЕТА

В синхронной системе отсчета метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dx^{0^2} + g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

([5], стр. 374). Всегда можно в этом случае выбрать тетрады следующим образом:

$$h_i^{(0)} = (1, 0, 0, 0), \quad h_i^{(\alpha)} = -h_{(\alpha)\,i} = (0, h_1^{(\alpha)}, h_2^{(\alpha)}, h_3^{(\alpha)}).$$

Вычисляя, получаем

$$B^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\gamma<\lambda} \varepsilon^{0\gamma\lambda\alpha} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^0}\, h^{\beta\mu}_{(\gamma\lambda)} +$$

$$+ \sum_{\gamma<\beta} \sum_{\delta<\mu} \left(h_{(s)\,\delta} \frac{\partial h^{(s)}_\mu}{\partial x^0} - h_{(s)\,\mu} \frac{\partial h^{(s)}_\delta}{\partial x^0} \right) \varepsilon^{\gamma\beta 0\alpha} h^{\delta\mu}_{(\gamma\beta)}.$$

Замечая, что первое слагаемое равно нулю, получим

$$B^\alpha = \frac{1}{2} h_{(s)\,[\delta} \frac{\partial h^{(s)}_{\mu]}}{\partial x^0} \varepsilon^{\gamma\beta 0\alpha} h^{\delta\mu}_{(\gamma\beta)}. \tag{3}$$

Так как для статического поля можно считать, что компоненты тетрад не зависят от времени, то в этом случае эффект отсутствует.

Очевидно эффект отсутствует, если метрику можно некоторым преобразованием координат привести к диагональному виду.

В случае стационарного поля, создаваемого вращающимся телом, эффект присутствует ([1]; [4], стр. 144—147). Однако если перейти к синхронной системе отсчета, то по (a) эффект не исчезает и, значит, (3) может быть отличным от нуля.

Мы можем делать следующие выводы:

(i) равенство нулю компонент $g_{0\alpha}$ не означает отсутствие эффекта, и, наоборот, если компоненты отличны от нуля, то эффект может отсутствовать;

(ii) равенство или неравенство нулю 3-векторов

$$\tilde{\Omega}_\alpha = -\frac{c}{2} \frac{\sqrt{-g}}{g_{00}} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\beta\gamma}}{\partial x^0} + g^{\beta i}\, \Gamma^\gamma_{i0} \right)$$

и

$$\mathbf{\Omega} = -\frac{c}{2} \operatorname{rot} \overrightarrow{(g_{01}, g_{02}, g_{03})}$$

не означает отсутствие или присутствие эффекта ([2], стр. 29, 30).

§ 3. УРАВНЕНИЕ ПАУЛИ

Получим в общем виде обобщение уравнения Паули на случай общей теории относительности.

Считая, что скорость фермиона намного меньше скорости света, и не вдаваясь в математические тонкости, можем написать (полагаем $a_\kappa = 0$)

$$\hat{D}_\mp^{-1} \approx \mp \frac{1}{2mc} \left\{ 1 \pm \frac{1}{2mc} \hat{D}_\pm \right\}.$$

Поступая далее так же, как в [4] (стр. 145, 146), получим

$$\left(\pm i\hbar h^{\kappa}_{(0)}\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \pm \frac{1}{c}\mathfrak{Z} \pm \frac{e}{c} h^{\kappa}_{(0)} A_{\kappa} - mc\right) u_{\pm} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{2mc}\sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha} C_{\beta}\, \sigma_{\alpha}\sigma_{\beta} \mp \frac{1}{4m^2c^2}\sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha}\sigma_{\alpha}[\hat{D}_{\mp},\ C_{\beta}\sigma_{\beta}]_{-}\right\} u_{\pm}. \tag{4}$$

Определим теперь квантовомеханические операторы энергии и импульса следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \hat{E}_{\pm} &= \pm i\hbar c\, h^{\kappa}_{(0)}\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \\ \hat{p}_{\alpha} &= \pm i\hbar\, h^{\kappa}_{(\alpha)}\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Тогда (4) можно записать в виде

$$\hat{E}_{\pm} \approx mc^2 + \frac{1}{2m}\sum_{\alpha}\hat{p}_{\alpha}\hat{p}_{\alpha} \mp \mathfrak{Z} \mp$$

$$\mp e h^{\kappa}_{(0)} A_{\kappa} \mp \frac{1}{4m^2c}\sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha}\sigma_{\alpha}[\hat{D}_{\mp},\ C_{\beta}\sigma_{\beta}]_{-} + \cdots$$

Требуемое уравнение получено. Из него видно, что $\mathfrak{Z}$ действительно играет роль спин-гравитационного энергетического добавка.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Б. Зельдович. Письма в ЖЭТФ, 1, стр. 40, 1965. [2] Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. Теория тяготения и эволюция звезд, М., «Наука», 1971. [3] Новейшие проблемы гравитации. ИЛ, 1961. [4] Н. В. Мицкевич. Физические поля в общей теории относительности», М., «Наука», 1969. [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля, М., 1967.

Новосибирский госуниверситет

Поступила в редакцию
19 июня 1972 г.

УДК 530.12 : 531.51

А. К. ГУЦ

О ВРЕМЕНИПОДОБНЫХ ЗАМКНУТЫХ ГЛАДКИХ КРИВЫХ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Для пространства — времени, допускающего времениподобную гладкую замкнутую кривую, получена оценка $\tau \sim 2\cdot 10^{-24}\sqrt{\rho}\, l^2$, где τ — истинное время и l — пространственная длина, сопоставленные в. п. кривой; ρ — плотность вещества.

В связи со статьей С. Говарда [1], касающейся космологической модели К. Гёделя [2], причем главным образом утверждения Гёделя о существовании времениподобной замкнутой гладкой кривой в рассмотренной им модели, имеет смысл вернуться к этому небезынтересному вопросу общей теории относительности. Говард ставит под сомнение результат Ч. Чандрасекхара и Дж. Райта [3], которые отметили невозможность времениподобной замкнутой гладкой геодезической в модели Гёделя. Ниже показано, что вывод, сделанный в [3], верен.