ТОПОСЫ

Задания и методические указания
для студентов I–III курсов математического факультета

Омск
1989

Топосы: Задания и методические указания для студентов I-III курсов математического факультета /Сост. А.К.Гуц. Омск: Омск.ун-т, 1989. 35 с.

В математике 20-го века теоретико-множественный язык стал основным средством изложения и сообщения результатов. Мир понятий, созданный Георгом Кантором, стал тем раем, где нашлось место для специалистов в самых различных областях чистой математики, будь то алгебра, геометрия, анализ или теория вероятностей. И хотя каждый из них отдает себе отчет в том, что их мысли не обязаны всегда выражаться с помощью слов „элемент", „принадлежит", „множество", они все понимают, что пока нет оснований для того, чтобы дружно сняться с места и покинуть свое теоретико-множественное обиталище. Переселение, видимо, начнётся лишь в том случае, когда будет найден не только новый язык общения, но и новый способ математического мышления. Категорный язык теории топосов, с одной стороны, принципиально отличается от теоретико-множественного, а с другой стороны, вбирает в себя все достижения теории множеств как фундамента современного здания математики.

Освоить топософию несложно. Труднее принять ее как основу математики 21-го века. Данные методические указания ставят целью помочь читателю войти в эту теорию через примеры, задачи и упражнения.

Тема I. КАТЕГОРИИ

Исследуя различные явления, очень часто используют следующий прием. Прежде всего выделяют совокупность объектов, составляющих, по мнению исследователя, наиболее характерные детали изучаемого явления. Затем начинают разбираться в связях между этими объектами. Например, выделив на стадионе, где проходит футбольный матч, команду футболистов, то есть объектами исследования являются отдельно взятые футболисты, начинают интересоваться тем, насколько товарищескими являются отношения между игроками.

Таким образом, в нашем распоряжении находятся: I) совокупность объектов $\{a, b, c, \dots\}$ и 2) совокупность связей между объектами $\{f, g, h, \dots\}$. Если даны объекты a и b, то связь f между a и b может быть несимметричной (то есть футболист a хорошо относится к футболисту b, но, увы, b терпеть не может a). В этом случае такую несимметричную связь мы обозначим через $f: a \to b$. Как правило, большинство связей несимметричны, и поэтому любую связь будем обозначать как $f: a \to b$ или $a \xrightarrow{f} b$ и называть <u>стрелкой</u>.

Каждый объект может находится в связи с самим собой (например, футболист a считает себя нелюдимым, то есть существуют стрелки $f: a \to a$. Однако следует отметить, что ситуация, когда стрелка $1_a: a \to a$ никак не отражается на стрелках вида $f: a \to b$, где b - произвольный объект, должна быть признана заслуживающей особого внимания. Символически эта ситуация записывается как

$$a \xrightarrow{1_a} a \xrightarrow{f} b \quad \text{есть} \quad a \xrightarrow{f} b.$$

Должна допускаться также возможность "превращения" стрелок $f: a \to b$, $g: b \to c$ в стрелку $h: a \to c$. Символически запишем это в виде $h = g \circ f$.

Сказанное составляет содержание следующего формального определения категории.

О п р е д е л е н и е I. Категория $\mathcal{C}$ состоит из

(I) совокупности предметов, называемых $\mathcal{C}$-объектами;

(2) совокупности предметов, называемых $\mathcal{C}$-стрелками;

(3) операций, ставящих в соответствие каждой $\mathcal{C}$-стрелке f два $\mathcal{C}$-объекта a, b. При этом a называется началом $\mathcal{C}$-стрелки f, а b - концом и используются обозначения:

$$f: a \to b \quad \text{или} \quad a \xrightarrow{f} b$$

и

$$a = \operatorname{dom} f, \quad b = \operatorname{cod} f;$$

(4) операции, ставящей в соответствие каждой паре $\mathcal{C}$-стрелок (f, g) с $\operatorname{dom} g = \operatorname{cod} f$ $\mathcal{C}$-стрелку $g \circ f$, называемую к о м п о з и ц и е й $\mathcal{C}$-стрелок f и g, с $\operatorname{dom}(g \circ f) = \operatorname{dom} f$, $\operatorname{cod}(g \circ f) = \operatorname{cod} g$, т.е. $g \circ f: \operatorname{dom} f \to \operatorname{cod} g$ причем выполняется

<u>Закон ассоциативности</u>. Пусть

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$$

диаграмма $\mathcal{C}$-объектов и $\mathcal{C}$-стрелок. Тогда

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f; \qquad (I.I)$$

(5) особой $\mathcal{C}$-стрелки $1_a: a \to a$, сопоставленной каждому $\mathcal{C}$-объекту a и называемой е д и н и ч н о й такой, что выполнен

<u>Закон тождества.</u> Для любых $\mathcal{C}$-стрелок $f: a \to b$ и $g: b \to c$

$$1_b \circ f = f, \quad g \circ 1_b = g, \qquad (I.2)$$

т.е. диаграмма

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & b \arrow[d, "1_b"] \arrow[dr, "g"] & \\
& b \arrow[r, "g"'] & c
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Слово диаграмма, использованное здесь, как понятие теории категорий определено ниже. Интуитивно - это картинка, состоящая из букв (=объектов) и стрелок (= стрелок категории).

<u>Пример I</u>. К а т е г о р и я $\mathbf{Set}$. Объекты этой категории - произвольные множества A, B, C, ..., а стрелки - отображения $f: A \to B$, $g: C \to D$, ... Композицией стрелок f и g служит обычная композиция отображений. Единичная стрелка 1_A - это тождественное отображение id_A, т.е.

$$id_A : A \to A,$$
$$id_A(a) = a \quad \text{для любого} \quad a \in A.$$

Проверьте, что выполнены все условия определения I.

Пример 2. К а т е г о р и я $\mathbf{N}$. Пусть категория состоит из одного объекта N, и из бесконечного числа стрелок $N \to N$. По определению такими стрелками будем считать натуральные числа 0, I, 2, ... Если n, m – две стрелки, т.е. два натуральных числа, то композицией стрелок $n: N \to N$ и $m: N \to N$ считаем стрелку $m \circ n: N \to N$, которая является натуральным числом $m+n$.

Тогда закон ассоциативности (I.I)

$$m \circ (n \circ k) = (m \circ n) \circ k$$

сводится к закону ассоциативности для сложения натуральных чисел

$$m + (n + k) = (m + n) + k.$$

Единичная стрелка $1_N : N \to N$ по определению есть число 0. Так как

$$0 + m = m, \quad n + 0 = n,$$

то

$$1_N \circ m = m, \quad n \circ 1_N = n,$$

т.е. выполняется закон тождества (I.2)

Получили категорию $\mathbf{N}$.

Пример 3. К а т е г о р и я $G\text{-}Set$.

Пусть G –группа, а X множество. Действие λ группы G на X есть отображение $\lambda: G \times X \to X$, удовлетворяющее условиям:

I) $\lambda(e, x) = x$ для любого $x \in X$, где e –единица группы G;

2) $\lambda(g, \lambda(h, x)) = \lambda(g * h, x)$, где $*$ – обозначает групповую операцию в G.

Пара $\langle X, \lambda \rangle$ называется G – множеством.

Объекты $G\text{-}Set$ категории – это любые G – множества.

Стрелка $f: \langle X, \lambda \rangle \to \langle Y, \mu \rangle$ в категории $G\text{-}Set$ – это по определению э к в и в а р и а н т н о е отображение, т.е. отображение, сохраняющее действие. Другими словами, f – это отображение из X в Y такое, что

$$f(\lambda(g, x)) = \mu(g, f(x))$$

для любых $g \in G$, $x \in X$.

Единицей $1_{\langle X, \lambda \rangle}$ в категории $G\text{-}Set$ будет отображение $id_X : X \to X$.

Под д и а г р а м м о й $\mathcal{D}$ в категории $\mathcal{C}$ понимается просто совокупность $\mathcal{C}$ –объектов $d_i, d_j, \ldots$ вместе с некоторыми $\mathcal{C}$ –стрелками $g: d_i \to d_j$ между отдельными объектами из этой диаграммы (между данной парой объектов может быть несколько стрелок, а может и не быть их вовсе).

Диаграмма

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & x \arrow[d, "k"] \\ y \arrow[r, "h"'] & b \end{tikzcd}$$

называется декартовым квадратом или универсальным квадратом, если I) она коммутативна, т.е. $k \circ f = h \circ g$;

2) для любых стрелок $\varphi: c \to x$, $\psi: c \to y$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & x \arrow[d, "k"] \\ y \arrow[r, "h"'] & b \end{tikzcd}$$

существует единственная стрелка $j: c \to a$, такая, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} c \arrow[dr, dashed, "j"] \arrow[drr, "\varphi"] \arrow[ddr, "\psi"'] & & \\ & a \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "g"] & x \\ & y & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

З а д а н и я

I.I. Категория $Finset$. Проверьте, что совокупность всех конечных множеств и совокупность всех отображений одного конечного множества в другое конечное множество образует категорию, если под композицией стрелок понимать композицию отображений, а под единичной стрелкой – тождественное отображение.

I.2. <u>Категория предпорядка</u> $\mathbf{P}$. Пусть P множество с предпорядком $\preccurlyeq$, т.е. $\preccurlyeq$ -бинарное отношение на P , удовлетворяющее условиям:

(i) $a \preccurlyeq a$ для каждого $a \in P$;

(j) если $a \preccurlyeq b$ и $b \preccurlyeq c$, то $a \preccurlyeq c$.

Будем под $\mathbf{P}$ -объектами понимать элементы множества P, а под $\mathbf{P}$ -стрелками $f : a \to b$ отношение $a \preccurlyeq b$ или, точнее, пару $\langle a, b \rangle$, связанную отношением $a \preccurlyeq b$.

Для пары $\mathbf{P}$ -стрелок $\langle a, b \rangle$ и $\langle b, c \rangle$ положим

$$\langle b, c \rangle \circ \langle a, b \rangle = \langle a, c \rangle .$$

Единичная стрелка $1_a : a \to a$ - это пара $\langle a, a \rangle$.

Проверить, что $\mathbf{P}$ - категория.

I.3. <u>Категория $Set^{\to}$</u> . Объектами категории $Set^{\to}$ являются отображения $f : A \to B$, т.е. стрелки категории Set . Стрелка из $Set^{\to}$ -объекта $f : A \to B$ в $Set^{\to}$ -объект $g : C \to D$ - это пара отображений $\langle h, k \rangle$, такая, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. $g \circ h = k \circ f$.

Проверить выполнимость условий определения I.

I.4. <u>Категория $Set \downarrow \mathbb{R}$</u> . Рассмотрим в качестве объектов отображения вида $f : A \to \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ -множество вещественных чисел. Как нужно определить стрелки между такими объектами, чтобы получить категорию?

I.5. Привести пример декартова квадрата в категории $\mathbf{N}$.

(решение - см. с. 31).

I.6. Будет ли декартовым в категории Set квадрат

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & \{\emptyset\} \arrow[d, "id"] \\ \{\emptyset\} \arrow[r, "id"'] & \{\emptyset\} \end{tikzcd} ,$$

где $f(a) = \emptyset$ для любого $a \in A$ и $id(\emptyset) = \emptyset$?

(решение - см. с. 31).

I.7. Стрелка $f : a \to b$ в категории $\mathcal{C}$ называется <u>моно-стрелкой</u>, если для любого объекта c и любых стрелок $g : c \to a$, $h : c \to a$ коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & a \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd} , \text{ т.е. } f \circ g = f \circ h ,$$

влечет $g = h$. Моностредка обычно обозначается как $f : a \rightarrowtail b$.

Показать, что моностредка $f : A \rightarrowtail B$ в категории Set есть инъективное отображение.

Тема 2. КОНЕЧНО ПОЛНЫЕ КАТЕГОРИИ

Пусть дана диаграмма $\mathcal{D}$ в категории $\mathcal{C}$.

<u>Определение 2.</u> <u>Конусом</u> для диаграммы $\mathcal{D}$ с $\mathcal{C}$ -объектами $d_i , d_j , \ldots$ называется такой $\mathcal{C}$ -объект c вместе с $\mathcal{C}$ - стрелками $f_i : c \to d_i$ для каждого объекта d_i из $\mathcal{D}$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} d_i \arrow[rr, "g"] & & d_j \\ & c \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна для любой стрелки $g : d_i \to d_j$ из $\mathcal{D}$.

Конус для диаграммы $\mathcal{D}$ обозначаем через $(f_i : c \to d_i)$.

<u>Определение 3.</u> <u>Предел диаграммы</u> $\mathcal{D}$ есть $\mathcal{D}$ -конус $(f_i : c \to d_i)$ такой, что для любого другого $\mathcal{D}$ -конуса $(f'_i : c' \to d_i)$ существует единственная стрелка $f : c' \to c$, для которой диаграмма

$$\begin{tikzcd} & d_i & \\ c' \arrow[ur, "f'_i"] \arrow[rr, dashed, "f"'] & & c \arrow[ul, "f_i"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна для каждого объекта d_i из $\mathcal{D}$.

Диаграмма $\mathcal{D}$ <u>конечная</u>, если состоит из конечного числа объектов и конечного числа стрелок.

<u>Определение 4.</u> Категория $\mathcal{C}$ называется <u>конечно полной</u>, если она содержит предел любой конечной диаграммы.

Пример 4. Пусть $\mathcal{D}$ – пустая диаграмма

т.е. диаграмма без объектов и стрелок. Тогда $\mathcal{D}$ – конус для $\mathcal{D}$ – это просто объект c! Нет никаких f_i, так как $\mathcal{D}$ не имеет d_i. Предел для $\mathcal{D}$ – это объект c такой, что для любого объекта c' существует единственная стрелка $f: c' \to c$.

Этот удивительный объект получает специальное название – конечный объект категории и обозначается как 1.

В категории Set конечный объект есть любое одноэлементное множество (проверить!).

Пусть $\mathcal{D}$ – двуобъектная бесстрелочная диаграмма и ее объекты a и b. Произведение объектов a и b есть предел диаграммы $\mathcal{D}$, обозначаемый как $a \times b$ $(= (p_1 : a\times b \to a,\ p_2 : a \times b \to b))$.

Пусть $\mathcal{D}'$ еще одна бесстрелочная диаграмма с двумя объектами c и d. Если $f: a \to c$ и $g: b \to d$ две произвольные стрелки, тогда $a \times b$ становится $\mathcal{D}'$ – конусом.

По определению предела диаграммы $\mathcal{D}'$ существует единственная стрелка $a \times b \to c \times d$, такая, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r] & c & \\
a\times b \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] \arrow[rrr, dashed, "f\times g"] & & & c\times d \arrow[ul, "p_1"'] \arrow[dl, "p_2"] \\
 & b \arrow[r] & d &
\end{tikzcd} \qquad (2.1)$$

Эту стрелку обозначаем как

$$f \times g : a \times b \to c \times d$$

и называем произведением стрелок f и g.

Задача 1. Показать, что в категории Set стрелка $f \times g$, где $f: A \to C$, $g: B \to D$ совпадает с отображением

$$f \times g : A \times B \to C \times D,$$

где

$$(f\times g)(\langle a, b\rangle) = \langle f(a), g(b)\rangle.$$

Введем теперь двойственные понятия коконуса и копредела диаграммы $\mathcal{D}$.

Коконус $(f_i : d_i \to c)$ для $\mathcal{D}$ – это объект c вместе со стрелками $f_i : d_i \to c$ по одной для каждого объекта d_i из $\mathcal{D}$ такие, что каждая диаграмма вида

$$\begin{tikzcd}
d_i \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f_i"'] & & d_j \arrow[dl, "f_j"] \\
 & c &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Копредел диаграммы $\mathcal{D}$ – это коконус $(f_i : d_i \to c)$ такой, что для любого $\mathcal{D}$ – коконуса $(f_i' : d_i \to c')$ существует единственная стрелка $f: c \to c'$, для которой диаграммы вида

$$\begin{tikzcd}
 & d_i \arrow[dl, "f_i'"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\
c' & & c \arrow[ll, dashed, "f"]
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Категория называется кополной, если каждая конечная диаграмма имеет копредел.

Пример 5. Копредел пустой диаграммы $\mathcal{D}$ – это объект c такой, что для любого объекта c' существует единственная стрелка $f : c \to c'$. Он называется начальным объектом категории и обозначается через 0.

В категории Set начальный объект – это пустое множество $\varnothing$. В самом деле, для этого стрелку $f: A \to B$ в категории Set надо интерпретировать как тройку $\langle A, B, X \rangle$, где $X \subseteq A \times B$. Множество X – это график отображения $f: A \to B$, т.е.

$$X = \{\langle a, f(a)\rangle : a \in A\}.$$

В таком случае отображение $f: \varnothing \to C'$ есть тройка $\langle \varnothing, C', \varnothing\rangle$, ибо график отображения f – это подмножество $X \subseteq \varnothing \times C' = \varnothing$, т.е. $X = \varnothing$. Поскольку любое подмножество множества $\varnothing \times C' = \varnothing$ есть пустое множество, то отображение $f: \varnothing \to C'$ единственное для $\varnothing$ и C'. Значит, $\varnothing$ есть начальный объект в Set.

З а д а н и я

2.1. Показать, что предел для диаграммы $\mathcal{D}$ в категории $\mathbf{Set}$, состоящей из двух объектов A и B, но не содержащей стрелок

$$\cdot A \qquad \cdot B$$

есть декартово произведение $A \times B$.

Предел двуобъектной бесстрелочной диаграммы $\mathcal{D}$ в произвольной категории $\mathcal{C}$ называется произведением объектов a и b. Здесь a и b – объекты из $\mathcal{C}$, а для произведения используется обозначение $a \times b$.

2.2. Показать, что копредел двуобъектной бесстрелочной диаграммы $\mathcal{D}$ в категории $\mathbf{Set}$ есть дизъюнктное объединение $A+B$. Здесь A, B – множества из $\mathcal{D}$ и

$$A + B = A' \cup B',$$

где

$$A' = \{\langle a, 0\rangle : a \in A\} = A \times \{0\},$$
$$B' = \{\langle b, 1\rangle : b \in B\} = B \times \{1\}.$$

Копредел бесстрелочной диаграммы $\mathcal{D}$ с двумя объектами a и b в произвольной категории $\mathcal{C}$ называется копроизведением и обозначается $a + b$.

2.3. В категории предпорядка $\mathbf{P}$ произведение объектов $a \times b$ есть наибольшая нижняя граница для a и b, т.е. $a \times b = \inf(a, b)$.

2.4. Что является копроизведением $a + b$ объектов в категории предпорядка?

2.5. Определить понятие произведения (копроизведения) объектов без использования понятия предела (соотв.: копредела) диаграммы.

2.6. Существует ли произведение $N \times N$ для объекта N в категории $\mathbf{N}$?

(Решение – см. с. 31)

2.7. Существуют ли в категории $\mathbf{N}$ конечный и начальный объекты?

Тема 3. КАТЕГОРИИ С ЭКСПОНЕНЦИРОВАНИЕМ

Определение 5. Категория $\mathcal{C}$ допускает экспоненцирование, если

(I) в ней существует произведение любых двух объектов;

(2) для любых двух объектов a и b существует $\mathcal{C}$-объект b^a, называемый экспоненциалом, и $\mathcal{C}$-стрелка $ev : b^a \times a \to b$, называемая стрелкой значения, такие, что для любых $\mathcal{C}$-объекта c и $\mathcal{C}$-стрелки $g : c \times a \to b$ существует единственная $\mathcal{C}$-стрелка $\hat{g} : c \to b^a$, для которой диаграмма

$$\begin{tikzcd}
b^a \times a \arrow[dr, "ev"] & \\
& b \\
c \times a \arrow[uu, dashed, "\hat{g} \times 1_a"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.I}$$

коммутативна, т.е. $ev \circ (\hat{g} \times 1_a) = g$.

Пример 6. В категории $\mathbf{Set}$ экспоненциал B^A для множеств A и B есть множество всех отображений из A в B. При этом

$$ev : B^A \times A \longrightarrow B$$

задается правилом

$$ev(\langle f, a\rangle) = f(a),$$

где

$$f \in B^A,\ f : A \to B,\ a \in A.$$

Задача 2. Категория $\mathbf{N}$ не допускает экспоненцирования.

Решение.

Так как в $\mathbf{N}$ только один объект N, то берем $a = b = c = N$. Произведение $N \times N$ – это конус $(0 : N \to N, 0 : N \to N)$ (см. задание 2.6), причем $N \times N = N$, а стрелка $g : c \times a \to b$ в данном случае есть $\mathbf{N}$-стрелка $m : N \times N \to N$. Найдем $\mathbf{N}$-стрелку $\hat{g}$ (или $\hat{m}$)

$$\hat{m} \times 0 : N \times N \longrightarrow N^N \times N.$$

Из диаграммы (2.I) имеем

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "\hat{m}"] & N & \\
N\times N \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] \arrow[rrr, dashed, "\hat{m}\times 0"] & & & N^N\times N \arrow[ul, "0"'] \arrow[dl, "0"] \\
 & N \arrow[r, "0=1_N"'] & N &
\end{tikzcd}$$

где

$$\hat{m}\circ 0 = 0\circ(\hat{m}\times 0),$$
$$0\circ 0 = 0\circ(\hat{m}\times 0)$$

или

$$\hat{m} + 0 = 0 + (\hat{m}\times 0),$$
$$0 + 0 = 0 + (\hat{m}\times 0).$$

Откуда

$$\hat{m}\times 0 = 0,$$

и, следовательно, $\hat{m} = 0$.

Таким образом, диаграмма (3.I) имеет вид

$$\begin{tikzcd}
N^N\times N \arrow[dr, "ev"] & \\
 & N \\
N=N\times N \arrow[uu, dashed, "0"] \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

а условие ее коммутативности $ev\circ(\hat{m}\times 0) = m$ означает равенство

$$ev + 0 = m. \qquad (3.2)$$

Здесь ev – натуральное число, однозначно отвечающее функции значения $ev: N^N\times N \to N$, т.е. некоторое конкретное число, а число m – совершенно произвольное натуральное число (согласно определению 5 стрелка $g: c\times a\to b$ – произвольна!). Следовательно, не для каждого m уравнение (3.2) справедливо, и в силу этого экспоненциал N^N не существует.

Пример 7. Категория $G\text{-}Set$ допускает экспоненцирование. Произведением $G\text{-}Set$ – объектов $\langle A,\lambda\rangle$ и $\langle B,\mu\rangle$ является $G\text{-}Set$ – объект $\langle A\times B, \lambda\times\mu\rangle$, где действие $\lambda\times\mu$ на $A\times B$ определено следующим образом

$$(\lambda\times\mu)(g, \langle a,b\rangle) = \langle\lambda(g,a), \mu(g,b)\rangle.$$

Экспоненциал $\langle B,\mu\rangle^{\langle A,\lambda\rangle}$ есть пара $\langle E,\sigma\rangle$, где E множество всех эквивалентных отображений u вида

$$u: G\times A \to B,$$
$$u(g, \lambda(h,a)) = \mu(h, u(g,a)),$$

а действие $\sigma: G\times E \to E$ отображению $u\in E$ ставит в соответствие отображения $v\in E$ такое, что

$$v(h,a) \equiv \sigma(g, u(h,a)) = u(g*h, a).$$

Стрелка значений

$$ev: \langle E,\sigma\rangle\times\langle A,\lambda\rangle \to \langle B,\mu\rangle$$

определяется по формуле

$$ev(f,a) = f(e,a),$$

а для стрелки $g: \langle C,\tau\rangle\times\langle A,\lambda\rangle \to \langle B,\mu\rangle$ стрелка $\hat{g}: \langle C,\tau\rangle \to \langle E,\sigma\rangle$ имеет вид

$$\hat{g}(c) = g_c \in E,$$
$$g_c(h,a) = g(\tau(h,c), a).$$

Проверка коммутативности диаграммы (3.I) предоставляется читателю.

З а д а н и я

3.I. Пусть $\mathcal{C}(a,b)$ – множество всех стрелок из a в b в категории $\mathcal{C}$. Показать, что имеет место биекция

$$\mathcal{C}(c\times a, b) \cong \mathcal{C}(c, b^a).$$

3.2. Стрелка $f: a \to b$ называется изострелкой, если существует стрелка $g: b \to a$ такая, что $g\circ f = 1_a$ и $f\circ g = 1_b$.
Если $f: a \to b$ изострелка, то объекты a и b называем изоморфными и используем для изоморфных объектов обозначение $a \cong b$.

Пусть $\mathcal{C}$ конечно полная категория с экспоненцированием и начальным объектом 0. Показать, что

$$0\times a \cong a,$$
$$a^0 \cong 1,$$
$$a^1 \cong a,$$
$$1^a \cong 1.$$

3.3. Пусть $\langle P, \preccurlyeq \rangle$ линейно упорядоченное множество с максимальным элементом 1, и $\mathbf{P}$ соответствующая категория предпорядка (см. задание I.2). Вычислить экспоненциал и стрелку значения для $\mathbf{P}$.

3.4. К а т е г о р и я Set^2. Состоит из пар множеств $\langle A, B \rangle$. Стрелками являются пары отображений

$$\langle f, g \rangle : \langle A, B \rangle \to \langle C, D \rangle,$$

где

$$f: A \to C, \quad g: B \to D.$$

Доказать, что категория Set^2 допускает экспоненцирование ([3] , с. 95).

Тема 4. КАТЕГОРИИ С КЛАССИФИКАТОРОМ

Пусть $\mathcal{C}$ - категория с конечным объектом 1.

Определение 6. Классификатором подобъектов для $\mathcal{C}$ называется $\mathcal{C}$ - объект Ω вместе с $\mathcal{C}$ -стрелкой $T: 1 \to \Omega$ такой, что выполняется следующая Ω - аксиома.
Для каждой моностределки $f: a \rightarrowtail d$ существует одна и только одна $\mathcal{C}$ - стрелка $\chi_f: d \to \Omega$, для которой диаграмма

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d, "!"'] & d \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "T"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

является декартовым квадратом.

Здесь через $!: a \to 1$ обозначается единственная стрелка из a в 1 (см. пример 4).

Стрелка χ_f называется характеристической или характером моностределки f, а объект Ω - классифицирующим объектом. Стрелка T носит название "истина".

Задача 3. Классификатор подобъектов, если он существует единственен с точностью до изоморфизма, т.е.если Ω и Ω' классифицирующие объекты, то $\Omega \cong \Omega'$.

Замечание. Слово "подобъект,использованное в определении 6, возникло в силу того, что подобъектом объекта d в теории категорий называется моностределка $f: a \rightarrowtail d$.

Пример 8. В категории Set классификатор - это множество $\Omega \cong 2 = \{0, 1\}$ и отображение $T \equiv true: \{\varnothing\} \to 2$, $true(\varnothing) = 1$. При этом под подобъектом $f: a \rightarrowtail d$ подразумевается вложение $A \hookrightarrow D$, т.е. A - это подмножество множества D. В таком случае характер χ_f есть обычная характеристическая функция множества A, т.е. $\chi_f \equiv \chi_A$, где

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Легко проверяется декартовость квадрата

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "!"'] & D \arrow[d, "\chi_A"] \\ \{\varnothing\} \arrow[r] & \{0, 1\} \end{tikzcd} \qquad (4.I)$$

И то, что χ_A - единственное отображение, делающее диаграмму (4.I) декартовой.

Таким образом, существование классификатора в Set - это категорное выражение теоретико-множественного утверждения

$$P(D) \cong 2^D,$$

т.е. того факта, что множество всех подмножеств множества D находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех отображений из D в $2 = \{0, 1\}$. Категория с классификатором подобна в этом смысле категории Set.

Элементом объекта a называется стрелка $f: 1 \to a$.

Элемент объекта Ω называется истинностным значением.

В Set два истинностных значения $true$ и $false$:

$$true(\emptyset) = 1, \text{ т.е. истина,}$$
$$false(\emptyset) = 0, \text{ т.е. ложь.}$$

Это наводит на мысль о связи классификатора с логикой. Два элемента Ω в Set – это классическая (двузначная) логика. Наличие трех и более истинностных значений – проявление неклассической логики в совокупности подобъектов.

Задача 4. Категория Set^2, где $\Omega = \langle 2,2\rangle = \langle\{0,1\},\{0,1\}\rangle$, а $1 = \langle\{\emptyset\},\{\emptyset\}\rangle$ имеет четыре истинностных значения: $\langle true, true\rangle$, $\langle true, false\rangle$, $\langle false, true\rangle$, $\langle false, false\rangle$.

Задача 5. Вырожденная категория, т.е. категория, все объекты которой изоморфны, имеет единственное истинностное значение.

Пример 9. Существуют категории, у которых только два истинностных значения, т.е. два элемента в Ω с точки зрения теории категорий, но как множество Ω содержит три элемента уже с точки зрения теории множеств (см. [3], с. 175, 135, топос M_2).

Задания

4.1. Найти классификаторы в категориях $Finset$, Set^2, $Set^{\to}$.

4.2. Привести пример категории, не имеющей классификатора.

Тема 5. ТОПОСЫ

Определение 7. Элементарным топосом называется категория $\mathcal{E}$ такая, что

(1) $\mathcal{E}$ конечно полная;

(2) $\mathcal{E}$ допускает экспоненцирование;

(3) $\mathcal{E}$ имеет классификатор подобъектов.

Задача 6. Set – топос.

Следовательно, топос – не множество, не пространство, а нечто очень похожее на категорию множеств, или, более грубо, топос – это скорее "множество" всех множеств.

Однако быть похожим на Set не означает совпадение топоса с Set, как видно из следующих задач и примеров.

Задача 7. $Finset$ – топос

Пример 10. Set^2 – топос ([3], с. 98).

Пример 11. $Set^{\to}$ – топос ([3], с. 98)

Пример 12. G-Set – топос ([3], с. 115)

Гольдблатт заявляет: "топос есть категория, строение которой настолько похоже на строение Set, что интерпретации основных теоретико-множественных конструкций обладают в ней почти такими же свойствами, как в самой Set". Возникает вопрос: в каком случае топос $\mathcal{E}$ совпадает с топосом Set?

Прежде всего при ответе на этот вопрос следует уяснить, что Set как теория множеств является противоречивой теорией и поэтому должна быть заменена на математически безупречную теорию множеств, совокупность объектов которой будут образовывать категорию $FSet$. Таким образом, для ответа на интересующий нас вопрос необходимо вместо Set рассмотреть некоторую формальную теорию множеств $FSet$. В качестве $FSet$ берется слабая теория множеств Цермело Z_0, дополненная некоторыми аксиомами (см. [2], [3]). Получается теория множеств Z. Далее поступают следующим образом.

Рассматривается топос $\mathcal{E}$, подчиненный дополнительным условиям (например, вводится аксиома частичной транзитивности объектов из $\mathcal{E}$). В топосе $\mathcal{E}$ строится совокупность $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$, состоящая из так называемых теоретико-множественных объектов. Показано, что $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ является моделью теории Z. Каждый "элемент" модели $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ изображает множество теории Z. Из "элементов" модели $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$ образуют объекты новой категории, обозначаемой через $\mathcal{E}(\mathfrak{A}(\mathcal{E}))$. Категория $\mathcal{E}(\mathfrak{A}(\mathcal{E}))$ есть топос, "совпадающий" с $\mathcal{E}$, т.е. категории $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}(\mathfrak{A}(\mathcal{E}))$ неразличимы в рамках теории категорий. Это и означает, что топос $\mathcal{E}$ есть $FSet$.

Данный результат имеет важнейшее следствие. Коль скоро теория множеств есть топос, то есть построена категорная теория множеств, то можно говорить о теории топосов как о теории, которая может быть положена в основание всего здания математики. Другими словами, наравне с теоретико-множественной точкой зрения на математику можно говорить о теоретико-топосном взгляде на математику. "Ведущая роль теории множеств в современной математике поставлена под сомнение: стрелка, а не отношение принадлежности элемента множеству должна отныне служить основной математической концепцией."

Для того чтобы претендовать на роль основополагающей теории, теория топосов должна продемонстрировать свою силу и возможности в реализации понятия числа.

Определение 8. Натуральный объект – это объект N топоса $\mathcal{E}$ вместе с такими стрелками $1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{s} N$, что для любого объекта a и стрелок $1 \xrightarrow{x} a \xrightarrow{f} a$ имеется ровно одна стрелка $h: N \to a$, для которой диаграмма

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "s"] \arrow[dd, dashed, "h"] & N \arrow[dd, dashed, "h"] \\ 1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "x"'] & & \\ & a \arrow[r, "f"'] & a \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Задача 8. Натуральный объект в $\mathbf{Set}$ – это множество натуральных чисел $\omega = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, $0(\{0\}) = 0$, $s(n) = n+1$.

Задача 9. В $\mathbf{Set}^2$ $N = \langle \omega, \omega \rangle$.

Натуральное число – это стрелка $n: 1 \to N$. Натуральных чисел в произвольном топосе может быть "больше", чем в $\mathbf{Set}$. Однако натуральный объект всегда удовлетворяет категорному аналогу аксиом Пеано. Существуют также стрелки $\oplus: N \times N \to N$, $\otimes: N \times N \to N$ – аналоги операций сложения и умножения.

Определение сложения $\oplus: N \times N \to N$.

В топосе $\mathcal{E}$ с натуральным объектом N для диаграммы

$$N \xrightarrow{1_N} N \xrightarrow{s} N$$

существует ровно одна стрелка $\oplus: N \times N \to N$, делающая коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} & N \times N \arrow[r, "1_N \times s"] \arrow[dd, "\oplus"] & N \times N \arrow[dd, "\oplus"] \\ N \arrow[ur, "\langle 1_N, 0_N \rangle"] \arrow[dr, "1_N"'] & & \\ & N \arrow[r, "s"'] & N \end{tikzcd} \tag{6.1}$$

Здесь 0_N есть композиция $N \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{0} N$, а $\langle 1_N, 0_N \rangle$ стрелка из диаграммы

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "1_N"'] \arrow[d, dashed, "\langle 1_N, 0_N \rangle"] \arrow[dr, "0_N"] & \\ N & N \times N \arrow[l] \arrow[r] & N \end{tikzcd} \tag{6.2}$$

существование которой вытекает из определения $N \times N$ как предела бесстрелочной диаграммы с двумя объектами N, N. Стрелка $\langle 1_N, 0_N \rangle : N \to N \times N$ существует в силу универсальности произведения $N \times N$.

Пример 13. В $\mathbf{Set}$ $N = \omega = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$. Сложение $m+n$ можно понимать как последовательность

$$m+0,\ m+1,\ \ldots,\ m+n$$

или

$$m + 0 = 1_\omega(m) \tag{6.3}$$
$$m + (n+1) = (m+n) + 1$$

или

$$m + s(n) = s(m+n). \tag{6.4}$$

Имеем $\langle 1_\omega, 0_\omega \rangle (m) = \langle 1_\omega(m), 0_\omega(m) \rangle = \langle m, 0 \rangle$, ибо $1 = \{0\}$, $0_\omega(m) = 0(!(m)) = 0(\{0\}) = 0$.

Следовательно,

$$\begin{tikzcd} & \omega \times \omega \arrow[d, "+"] \\ \omega \arrow[ur, "\langle 1_\omega, 0_\omega \rangle"] \arrow[r, "1_\omega"'] & \omega \end{tikzcd}$$

означает просто формулу (6.3).

Далее $(1_\omega \times s)(\langle m, n \rangle) = \langle 1_\omega(m), s(n) \rangle = \langle m, n+1 \rangle$ и поэтому

$$\begin{tikzcd} \omega\times\omega \arrow[r, "1_\omega\times s"] \arrow[d, "+"] & \omega\times\omega \arrow[d, "+"] \\ \omega \arrow[r, "s"'] & \omega \end{tikzcd}$$

дает

$$\begin{tikzcd} \langle m,n\rangle \arrow[r, "1_\omega\times s"] \arrow[d, "+"] & \langle m, n+1\rangle \arrow[d, "+"] \\ m+n \arrow[r, "s"] & s(m+n) = m+(n+1), \end{tikzcd}$$

т.е. формулу (6.4).

Задача 10. Показать, что в $\mathbf{Set}^2$ $\oplus : N\times N \longrightarrow N$ имеет вид $\oplus = \langle +, + \rangle$.

При этом

$$\langle \omega,\omega\rangle \times \langle \omega,\omega\rangle \cong \langle \omega\times\omega, \omega\times\omega\rangle,$$

и, следовательно,

$$\oplus(\langle n,m\rangle,\langle k,l\rangle) = \langle n+k, m+l\rangle .$$

Определение умножения $\otimes : N\times N \longrightarrow N$.

В топосе $\mathcal{E}$ с натуральным объектом N существует единственная стрелка $\otimes : N\times N \to N$, делающая коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} & N\times N \arrow[d, "\otimes"] \\ N \arrow[ur, "\langle 1_N, 0_N\rangle"] \arrow[r, "0_N"'] & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N\times N \arrow[r, "1_N\times s"] \arrow[d, "\langle P_1,\otimes\rangle"'] & N\times N \arrow[d, "\otimes"] \\ N\times N \arrow[r, "\oplus"'] & N \end{tikzcd} \qquad (6.5)$$

где $P_1 : N\times N \longrightarrow N$ – стрелка, существующая в силу определения $N\times N$ как конуса бесстрелочной диаграммы с двумя объектами N, N :

$$\begin{tikzcd} N & & N \\ & N\times N \arrow[ul, "P_1"] \arrow[ur, "P_2"'] & \end{tikzcd}$$

а стрелка $\langle P_1, \otimes \rangle$ в силу того, что $N\times N$ не просто конус, но предел этой диаграммы

$$\begin{tikzcd} & c' = N\times N \arrow[dl, "P_1"'] \arrow[dr, "\otimes"] \arrow[d, dashed, "\langle P_1,\otimes\rangle"] & \\ N & N\times N \arrow[l] \arrow[r, "P_2"'] & N \end{tikzcd}$$

Пример 14. В $\mathbf{Set}$ $N = \omega = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ умножение $m\times n$ можно понимать как последовательность

$$\begin{aligned} m\times 0 &= 0 \\ m\times 1 &= m \\ &\ldots\ldots \\ m\times(n+1) &= m+(m\times n) \end{aligned} \qquad (6.6)$$

Первое равенство, как видно из примера 13 , записывается в виде

$$\times(\langle 1_\omega, 0_\omega\rangle(m)) = 0_\omega(m),$$

а это первая диаграмма в (6.5). Нижнее равенство (6.6) можно переписать как

$$m\times s(n) = m+(m+n), \qquad (6.7)$$

Имеем

$$\langle m,n\rangle \xrightarrow{1_\omega\times s} \langle 1_\omega(m), s(n)\rangle = \langle m, s(n)\rangle \xrightarrow{\times} m\times s(n)$$

– это левая часть равенства (6.7) и часть

$$\omega\times\omega \xrightarrow{1_\omega\times s} \omega\times\omega \xrightarrow{\times} \omega$$

диаграммы (6.5).

Далее

$$\begin{tikzcd} & \langle m,n\rangle \\[-2em] & \omega\times\omega \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[d, dashed, "\langle p_1,\times\rangle"] \arrow[dr, "\times"] & \\ m \quad \omega & \omega\times\omega \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & \omega \quad m\times n \end{tikzcd}$$

поэтому $\langle p_1,\times\rangle(\langle m,n\rangle) = \langle m, m\times n\rangle$,
и, следовательно,

$$\langle m,n\rangle \xrightarrow{\langle p_1,\times\rangle} \langle m, m\times n\rangle \xrightarrow{+} m+(m\times n)$$

дает часть

$$\omega\times\omega \xrightarrow{\langle p_1,\times\rangle} \omega\times\omega \xrightarrow{+} \omega$$

диаграммы (6.5).

<u>Аксиомы Пеано</u>

Известно, что аксиомы Пеано лежат в основе аксиоматического описания натуральных чисел.

В Set аксиомы Пеано имеют вид:

(I) $s(n)\neq 0$ для всех $n\in\omega$;

(2) $s:\omega\to\omega$ инъекция;

(3) если $A\subseteq\omega$ такое подмножество, что $0\in A$ и $s(A)\subseteq A$, то $A=\omega$.

Категорная запись аксиом (I) – (3) такова:

(I′) диаграмма

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "n"'] \arrow[dr, "0"] & \\ N \arrow[rr, "s"] & & N \end{tikzcd}$$

не коммутативна ни для какого "натурального числа" $n:1\to N$;

(2′) $N\xrightarrow{s}N$ – монострелка.

(3′) Пусть $f:a\rightarrowtail N$ такая монострелка, что, во-первых, для некоторого $n:1\to a$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "n"'] \arrow[dr, "0"] & \\ a \arrow[rr, tail] & & N \end{tikzcd}$$

и, во-вторых, для некоторой стрелки $g:a\to a$ коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "s\circ f"] & \\ a \arrow[rr, tail, "f"'] & & N \end{tikzcd}$$

Тогда существует изострелка $a\xrightarrow{i}N$ такая, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "f"] & \\ N \arrow[r, "1_N"'] & N \end{tikzcd}$$

<u>Теорема</u>. Любой натуральный объект N удовлетворяет аксиомам Пеано (I′) – (3′).

Таким образом, в топосе $\mathcal{E}$ с натуральным объектом существует аналог классической арифметики. Хотя в ряде топосов эта арифметика сильно отличается от привычной, известной из школы.

Задания

6.I. Показать, что объект натуральных чисел в $Set\downarrow\mathbb{R}$ – это отображение $N:\omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такое, что $N(\langle n,x\rangle)=x,\ n\in\omega\ ,\ x\in\mathbb{R}$.

6.2. Показать, что объект натуральных чисел в $G-Set$ есть G-множество $\langle\omega,\varepsilon\rangle$, где ε – тривиальное действие G на ω , т.е. $\varepsilon(g,n)=id(n)=n$. (решение см. на с. 32).

6.3. Найти $\oplus$ и $\otimes$ в топосе $Set\downarrow\mathbb{R}$.

6.4. Существует ли натуральный объект в категории предпорядка?

6.5. Сколько натуральных чисел в топосе $Set\downarrow\mathbb{R}$? Т.е. какова мощность множества натуральных чисел в $Set\downarrow\mathbb{R}$? (ответ см. на стр. 34).

Покажем, как вводятся целые и рациональные числа в топосах. Пусть $\mathcal{E}$ - топос с натуральным объектом N.

Определение 9. Целый объект в топосе $\mathcal{E}$ - это объект Z, являющийся копределом диаграммы

$$N \xleftarrow{0} 1 \xrightarrow{0} N \qquad (7.\mathrm{I})$$

Пример I5. В Set копредел диаграммы (7.I) с учетом того, что $N=\omega$ - это коконус

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] \arrow[dr, "p_0"] & \omega \arrow[d, "p_2"] \\
\omega \arrow[r, "p_1"'] & Z
\end{tikzcd}$$

задаваемый следующим образом: $1=\{0\}$, $Z=\{\dots,-n,\dots,-1,0,1,\dots,m,\dots\}$,
$p_0(0)=0$, $p_1(n)=n$, $p_2(n)=-n$, $n\in\omega$.

Уравнителем пары стрелок $f,g: a\to b$ в топосе $\mathcal{E}$ называется стрелка $i: e\to a$ такая, что

I) $f\circ i = g\circ i$;

2) для любой $h: c\to a$, удовлетворяющей равенству $f\circ h=g\circ h$ существует единственная стрелка $k: c\to e$ такая, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "i"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\
c \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

Пример I6. В Set уравнитель $i: E\to A$ отображений $f,g: A\to B$ строится так: $E=\{a\in A: f(a)=g(a)\}$,

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, hook, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
C \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

т.е. уравнитель выделяет подмножество $E\hookrightarrow A$ множества A, на котором совпадают f и g, причем выделяет "универсальным образом" в том смысле, что если $h: C\to A$ тоже уравнивает" f и g по правилу: $f(h(c))=g(h(c))$ для каждого $c\in C$, то h однозначно "пропускается" через уравнивание $i: E\hookrightarrow A$.

Коуравнитель пары стрелок $f,g: a\to b$ есть стрелка $q: b\to e$ такая, что

I) $q\circ f = q\circ g$;

2) для любой $h: b\to c$, удовлетворяющей равенству $h\circ f=h\circ g$, существует единственная стрелка $k: e\to c$, для которой коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "h"'] & e \arrow[d, dashed, "k"] \\
& & c
\end{tikzcd}$$

Пример I7. В категории Set коуравнитель определяет фактор-множества X/R, т.е. осуществляет факторизацию множества X по некоторому отношению эквивалентности $R\subseteq X\times X$.

В самом деле, имеем, как известно,

$$X/R = \{[x] : x\in X\}$$

-множество классов эквивалентности, а класс эквивалентности - это

$$[x] = \{y : \langle x,y\rangle \in R\}.$$

Далее берем

$$f=p_1: R\to X,\quad g=p_2: R\to X,$$

$$p_1(\langle x,y\rangle)=x,\quad p_2(\langle x,y\rangle)=y,$$

и наконец,

$$q: X\to X/R,$$

$$q(x)=[x],\quad x\in X.$$

Тогда $(q\circ f)(\langle x,y\rangle)=(q\circ p_1)(\langle x,y\rangle)=[x]=[y]=$ $=(q\circ p_2)(\langle x,y\rangle)=(q\circ g)(\langle x,y\rangle)$ для каждого $\langle x,y\rangle\in R$, т.е. выполняется условие I) в определении коуравнителя.

Условие 2) говорит о том, что "коуравнивание" f и g по принципу $h\circ f = h\circ g$ однозначно основано на "коуравнивании" посредством факторизации.

Другими словами, условие I) – это принцип, по которому выделяется X/R, а условие 2) подчеркивает, что при отборе стрелок, основанном на условии I), факторизация занимает исключительное, универсальное место.

Объект целых положительных чисел P определяется как подообъект $P \overset{p}{\rightarrowtail} Z$, являющийся пределом диаграммы

$$N \overset{s}{\rightarrowtail} N \overset{p_1}{\rightarrowtail} Z$$

Для произведения $(Z\times P)\times(Z\times P) = Z\times P\times Z\times P$ определено четыре проекции:

$$pr_1 : (Z\times P)\times(Z\times P) \to Z\times P,$$
$$pr_2 : (Z\times P)\times(Z\times P) \to Z\times P,$$
$$p_1 : Z\times P \to Z,$$
$$p_2 : Z\times P \to Z,$$

существующие в силу определения произведений $(Z\times P)\times(Z\times P)$, $Z\times P$.

Пусть

$$\pi_{14} = p_1\times p_2 : (Z\times P)\times(Z\times P) \to Z\times P,$$
$$\pi_{23} = p_2\times p_1 : (Z\times P)\times(Z\times P) \to Z\times P$$

$$\begin{tikzcd}
& Z\times P \arrow[r, "p_1"] & Z \\
(Z\times P)\times(Z\times P) \arrow[ur, "pr_1"] \arrow[rr, dashed, "p_1\times p_2"] \arrow[dr, "pr_2"'] & & Z\times P \arrow[ul, "p_1"'] \arrow[dl, "p_2"] \\
& Z\times P \arrow[r, "p_2"'] & P
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& Z\times P \arrow[r, "p_2"] & P \\
(Z\times P)\times(Z\times P) \arrow[ur, "pr_1"] \arrow[rr, dashed] \arrow[dr, "pr_2"'] & & Z\times P \arrow[ul, "p_2"'] \arrow[dl, "p_1"] \\
& Z\times P \arrow[r, "p_1"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Определение I0. Объект рациональных чисел или рациональный объект в топосе $\mathcal{E}$, обладающем натуральным объектом, – это объект Q вместе с коуравнителем

$$E \underset{pr_2\circ i}{\overset{pr_1\circ i}{\rightrightarrows}} Z\times P \xrightarrow{q} Q, \qquad (7.2)$$

где E – объект, входящий в уравнитель

$$E \xrightarrow{i} (Z\times P)\times(Z\times P) \underset{\pi_{23}}{\overset{\pi_{14}}{\rightrightarrows}} Z\times P \xrightarrow{1\times p} Z\times Z \xrightarrow{\otimes} Z \qquad (7.3)$$

Пример I8. Продемонстрируем определение I0 в топосе Set. Имеем в Set

$$Z = \{\ldots,-1,0,1,\ldots\},\quad P = \{1,2,\ldots\},$$
$$Z\times P = \{\langle z,p\rangle : z\in Z,\ p\in P\}.$$

Пусть

$$E = \{\langle z,p,z',p'\rangle : z\times p' = z'\times p\},$$
$$i : E \hookrightarrow (Z\times P)\times(Z\times P).$$

Как известно, рациональное число – это дробь вида $\frac{z}{p}$, где $z\in Z$, $p\in P$. При этом подразумевается, что одно и то же рациональное число может представляться любой другой дробью $\frac{z'}{p'}$, лишь бы

$$\frac{z'}{p'} = \frac{z}{p} \quad \text{или} \quad z\times p' = z'\times p .$$

Другими словами, рациональное число r – это множество пар вида $\langle z, p\rangle \in \mathbb{Z}\times P$, причем, если $\langle z', p'\rangle \in r$, то должно выполняться равенство

$$z\times p' = z'\times p . \tag{7.4}$$

Множество E, введенное выше и задаваемое уравнителем (7.3), как раз выделяет пары $\langle z,p\rangle, \langle z',p'\rangle$, связанные соотношением (7.4).

Условие (7.4) определяет отношение эквивалентности $\sim$ на $\mathbb{Z}\times P$. Действительно, полагаем

$$(\langle z,p\rangle \sim \langle z',p'\rangle) \overset{def}{\Longleftrightarrow} (z\times p' = z'\times p).$$

Фактор-множество $\mathbb{Z}\times P/_\sim$ – это множество классов эквивалентности $[\langle z,p\rangle]$, т.е.

$$\mathbb{Z}\times P/_\sim = \{\langle z,p\rangle : \langle z,p\rangle \in \mathbb{Z}\times P\},$$

$$[\langle z,p\rangle] = \{\langle z',p'\rangle : \langle z',p'\rangle \sim \langle z,p\rangle\}.$$

Тогда множество рациональных чисел

$$Q = \mathbb{Z}\times P/_\sim$$

Факторизация, как мы знаем, осуществляется с помощью коуравнителя, который в данном случае имеет вид (7.2):

$$\begin{tikzcd}
 & \langle z,p\rangle \arrow[dr, "q"] & \\
E \ni \langle z,p,z',p'\rangle \arrow[ur, "pr_1\circ i"] \arrow[dr, "pr_2\circ i"'] & & {[\langle z,p\rangle] = [\langle z',p'\rangle]} \\
 & \langle z',p'\rangle \arrow[ur, "q"'] &
\end{tikzcd}$$

или

$$E \underset{pr_2\circ i}{\overset{pr_1\circ i}{\rightrightarrows}} \mathbb{Z}\times P \xrightarrow{q} (\mathbb{Z}\times P/_\sim = Q)$$

Задания

7.1. Найти рациональные объекты в Set^2, $Set\downarrow\mathbb{R}$, $G\text{-}Set$.

7.2. Являются ли N и $\mathbb{Z}$ подобъектами Q, т.е. существуют ли монострелки $N \rightarrowtail Q$, $\mathbb{Z} \rightarrowtail Q$?

Решения

1.5.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[drr, "m"] \arrow[dr, dashed, "0"] \arrow[ddr, "n"'] & & \\
 & N \arrow[r, "m"] \arrow[d, "n"] & N \arrow[d, "n"] \\
 & N \arrow[r, "m"'] & N
\end{tikzcd}$$

1.6. Не будет, ибо биекция $j: C \to A$ для диаграммы

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[drr, "\varphi"] \arrow[dr, dashed, "j"] \arrow[ddr, "\psi"'] & & \\
 & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"] & \{\emptyset\} \arrow[d, "id"] \\
 & \{\emptyset\} \arrow[r, "id"] & \{\emptyset\}
\end{tikzcd}$$

может быть взята совершенно произвольной, а диаграмма при этом останется коммутативной.

2.6. Для двуобъектной бесстрелочной диаграммы $\mathfrak{D}$ в N $\mathfrak{D}$-конус всегда существует

$$\begin{tikzcd}
N & & N & \leftarrow \text{диаграмма} \\
 & N \arrow[ul, "m"] \arrow[ur, "n"'] & & \leftarrow \mathfrak{D}\text{-конус}
\end{tikzcd}$$

$\mathfrak{D}$-предел– это $\mathfrak{D}$-конус вида $(0: N\to N,\ 0: N\to N)$, ибо диаграмма $(c' = N,\ c = N)$:

произвольный $\mathfrak{D}$-конус

$$\begin{tikzcd}
 & N & \\
N \arrow[ur, "n"] \arrow[rr, "n"'] & & N \arrow[ul, "0"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Следовательно, $N\times N = N$.

6.2. Диаграмма

$$1 \xrightarrow{0} N \xrightarrow{s} N$$

в G-Set имеет вид

$$\langle\{0\},\varepsilon\rangle \xrightarrow{0} \langle\omega,\varepsilon\rangle \xrightarrow{s} \langle\omega,\varepsilon\rangle,$$

где $0(0)=0$, $s(n)=n+1$ для $n\in\omega$.

Надо убедиться в эквивариантности 0 и s. Но это следствие тривиальности действия G на 1 и N :

$$0(\varepsilon(g,0)) = 0(0) = 0 = \varepsilon(g,0) = \varepsilon(g,0(0)),$$

$$s(\varepsilon(g,n)) = s(n) = n+1 = \varepsilon(g,n+1) = \varepsilon(g,s(n)).$$

Если $a=\langle A,\lambda\rangle$ – произвольный объект в G-Set , то $x: 1\to a$ это эквивариантное отображение

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "\varepsilon_g"'] & A \arrow[d, "\lambda_g"] \\ \{0\} \arrow[r, "\varkappa"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} \varepsilon_g(x) &\equiv \varepsilon(g,x), \\ \lambda_g(x) &\equiv \lambda(g,x), \end{aligned}$$

или

$$\lambda_g(\varkappa(0)) = \varkappa(\varepsilon_g(0)) = \varkappa(0).$$

Т.е. $\varkappa(0)$ – неподвижная точка для каждого $\lambda_g: A\to A$

Диаграмма

$$1 \xrightarrow{x} a \xrightarrow{f} a$$

имеет теперь вид

$$\begin{tikzcd} \{0\} \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "\varepsilon_g"'] & A^{\varkappa(0)} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda_g"] & A^{f(\varkappa(0))} \arrow[d, "\lambda_g"] \\ \{0\} \arrow[r, "\varkappa"'] & A_{\varkappa(0)} \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd} \qquad f(\varkappa(0)) = \lambda_g(f(\varkappa(0))$$

Значит

$$\lambda_g(f(\varkappa(0)) = f(\varkappa(0)) \qquad (*)$$

и отображение $h: N\to a$ определяется следующим образом:

$$h(0) = \varkappa(0),$$

$$h(n) = \underbrace{f\circ\dots\circ f}_{n\text{-раз}}(\varkappa(0))$$

Тогда диаграммы

$$\begin{tikzcd} \overset{n}{\omega} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "h"'] & \overset{n+1}{\omega} \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \overset{0}{\omega} \arrow[d, "h"] \\ \{0\} \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "\varkappa"'] & \underset{\varkappa(0)}{A} \end{tikzcd}$$

$$\underbrace{f\circ\dots\circ f}_{n\text{-раз}}(\varkappa(0)) \qquad f(\underbrace{f\circ\dots\circ f}_{n\text{-раз}})(\varkappa(0)) = \underbrace{f\circ\dots\circ f}_{n+1\text{-раз}}(\varkappa(0))$$

коммутативны, а отображение h эквивариантно, т.к. диаграмма

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varepsilon_g"'] & A \arrow[d, "\lambda_g"] \\ \omega \arrow[r, "h"] & A \end{tikzcd}$$

коммутативна в силу того, что

$$h(\varepsilon_g(n)) = h(n) = \underbrace{f\circ\dots\circ f}_{n\text{-раз}}(\varkappa(0))$$

$$\lambda_g(h(n)) = \lambda_g(\underbrace{f\circ\dots\circ f}_{n\text{-раз}}(\varkappa(0))) = \underbrace{f\circ\dots\circ f}_{n\text{-раз}}(\varkappa(0))$$

(см. $(*)$).

Единственность h следует из того, что если имеем коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r, "s"] \arrow[d, "\tilde h"'] & \omega \arrow[d, "\tilde h"] \\ A \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \omega \arrow[d, "\tilde h"] \\ \{0\} \arrow[ur, "0"] \arrow[r, "\varkappa"'] & A \end{tikzcd}$$

то

$$\tilde h(n+1) = f(\tilde h(n)),\ n\in\omega,$$

$$\tilde h(0) = \varkappa(0).$$

Откуда

$$\tilde h(n) = \underbrace{f\circ\dots\circ f}_{n\text{-раз}}(\varkappa(0)) = h(n).$$

6.5.

$$\mathrm{card}\,(\omega^{\mathbb{R}}) = \aleph_0^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c},$$

где $\mathfrak{c}$ – мощность континуума.

Натуральное число в $Set\downarrow\mathbb{R}$ – это отображение $n:\mathbb{R}\to\omega\times\mathbb{R}$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[rr, "n"] \arrow[dr, "id_{\mathbb{R}}"'] & & \omega\times\mathbb{R} \arrow[dl, "N"] \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

Значит $n(x)=\langle n_x, x\rangle$, $n_x\in\omega$ и отображению n однозначно отвечает функция $x\to n_x\in\omega$. Натуральных чисел в $Set\downarrow\mathbb{R}$ столько, сколько функций из $\mathbb{R}$ в ω.

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

I. Цаленко М.Ш., Шульгейфер Е.Г. Основы теории категорий. М.: Наука, 1974.

2. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир, 1972.

3. Гольдблатт Р. Топосы. М.: Мир, 1983.

4. Джонстон П.Т. Теория топосов. М.: Наука, 1986.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Александр Константинович Гуц

ТОПОСЫ

Задания и методические указания
для студентов I-III курсов
математического факультета

Редактор Н.Ф.Платоненко

Подписано в печать 27.07.89. Формат бумаги 60х84/16
Печ.л.2,25. Уч.-изд.л.2,1. Тираж 200.
Заказ 314. Бесплатно

Редакционно-издательская группа ОмГУ
Полиграфическая лаборатория
644077, Омск-77, пр. Мира, 55-а, госуниверситет