Поступая далее так же, как в [4] (стр. 145, 146), получим

$$\left(\pm i\hbar h^{\kappa}_{(0)}\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \pm \frac{1}{c}\,\mathfrak{Z} \pm \frac{e}{c}\,h^{\kappa}_{(0)}\,A_{\kappa} - mc\right)u_{\pm} =$$

$$= \left\{\frac{1}{2mc}\sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha}\,C_{\beta}\,\sigma_{\alpha}\,\sigma_{\beta} \mp \frac{1}{4m^2c^2}\sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha}\,\sigma_{\alpha}\,[\hat{D}_{\mp},\ C_{\beta}\,\sigma_{\beta}]_{-}\right\}u_{\pm}. \tag{4}$$

Определим теперь квантовомеханические операторы энергии и импульса следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\hat{E}_{\pm} &= \pm i\hbar c\, h^{\kappa}_{(0)}\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\\ \hat{p}_{\alpha} &= \pm i\hbar\, h^{\kappa}_{(\alpha)}\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Тогда (4) можно записать в виде

$$\hat{E}_{\pm} \approx mc^2 + \frac{1}{2m}\sum_{\alpha}\hat{p}_{\alpha}\,\hat{p}_{\alpha} \mp \mathfrak{Z} \mp$$

$$\mp e h^{\kappa}_{(0)}\,A_{\kappa} \mp \frac{1}{4m^2c}\sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha}\,\sigma_{\alpha}\,[\hat{D}_{\mp},\ C_{\beta}\sigma_{\beta}]_{-} + \cdots$$

Требуемое уравнение получено. Из него видно, что $\mathfrak{Z}$ действительно играет роль спин-гравитационного энергетического добавка.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. Б. Зельдович. Письма в ЖЭТФ, 1, стр. 40, 1965. [2] Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. Теория тяготения и эволюция звезд, М., «Наука», 1971. [3] Новейшие проблемы гравитации. ИЛ, 1961. [4] Н. В. Мицкевич. Физические поля в общей теории относительности», М., «Наука», 1969. [5] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля, М., 1967.

Новосибирский госуниверситет

Поступила в редакцию
19 июня 1972 г.

УДК 530.12 : 531.51

А. К. ГУЦ

О ВРЕМЕНИПОДОБНЫХ ЗАМКНУТЫХ ГЛАДКИХ КРИВЫХ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Для пространства — времени, допускающего времениподобную гладкую замкнутую кривую, получена оценка $\tau \sim 2\cdot 10^{-24}\sqrt{\rho}\, l^2$, где τ — истинное время и l — пространственная длина, сопоставленные в. п. кривой; ρ — плотность вещества.

В связи со статьей С. Говарда [1], касающейся космологической модели К. Гёделя [2], причем главным образом утверждения Гёделя о существовании времениподобной замкнутой гладкой кривой в рассмотренной им модели, имеет смысл вернуться к этому небезынтересному вопросу общей теории относительности. Говард ставит под сомнение результат Ч. Чандрасекхара и Дж. Райта [3], которые отметили невозможность времениподобной замкнутой гладкой геодезической в модели Гёделя. Ниже показано, что вывод, сделанный в [3], верен.

По поводу моделей, допускающих времениподобные гладкие замкнутые кривые (в. п. циклы), существуют различные мнения (см. [5], стр. 228; [8]; [6], стр. 625), однако, как показывают проводимые ниже оценки, отмеченные явления либо не могут практически наблюдаться, либо реализуются там, куда современная физика еще не проникла, либо должны рассматриваться не с классических позиций, а, скажем, с точки зрения квантовой механики.

Что касается принципа причинности, который якобы нарушается при допущении моделей с в. п. циклами, то здесь скорее надо обратиться к философии ([7], стр. 197, Причинность), и тогда станет ясно, что опасения напрасны. Некоторые сведения о в. п. циклах можно найти в [9].

1. Метрика Гёделя имеет вид

$$ds^2 = a^2 (dx^{0^2} - dx^{1^2} + \frac{1}{2} e^{2x^1} dx^{2^2} - dx^{3^2} + 2e^{x^1} dx^0 dx^2), \tag{1}$$

где $a = \text{const}$, а переменные x^0, x^1, x^2, x^3 имеют областью изменения всю числовую ось.

Предположим, что метрика допускает в. п. цикл, и он задан соотношениями

$$\left.\begin{aligned} x^i = f_i(t), \quad t \in [0,1] \\ f_i(0) = f_i(1), \quad \frac{df_i}{dt}(0) = \frac{df_i}{dt}(1) \end{aligned}\right\} (i = 0, 1, 2, 3),$$

где f_i —функция класса C^κ $(\kappa \geqslant 1)$. Нетрудно видеть, что функция f_2 не может быть постоянной, и значит область изменения функции $\xi(t) = f_0'/f_2'$, где штрих означает дифференцирование по t, есть вся числовая ось, поскольку функция f_2 имеет в интервале $(0,1)$ экстремум.

Тогда имеем

$$(s')^2 = [f_0' + e^{f_1(t)} f_2']^2 - (f_1')^2 - \frac{e^{2f_1(t)}}{2} (f_2')^2 - (f_3')^2 \leqslant [f_0' + e^{f_1(t)} f_2']^2.$$

Пусть $\{I_i\}_{i=1}^m$ $(m \geqslant 1)$ — интервалы, содержащие нули функции $f_2'(t)$, причем настолько малые, что

$$A \equiv [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^m I_i \neq \varnothing.$$

Тогда на A имеем: $(s')^2 \leqslant (f_2')^2 F(t)$, где $F(t) \equiv [\xi(t) + \exp f_1(t)]^2$. Берем множество $\bigcup_{i=1}^m I_i$ таким, чтобы на концах интервалов I_i $(i = 1,\ldots,m)$ имело место неравенство

$$|\xi(t)| > \exp f_1(t), \tag{2}$$

Ошибка
а также $A \neq \varnothing$. Пусть $t_0 \in (0,1)$ — точка экстремума функции f_2. Тогда $t_0 \in I_\kappa$, и в силу (2), а также того факта, что функция $\xi(t)$ имеет в интервале $(0,1)$ нуль в точке t_1 (ясно $t_1 \neq t_0$), немедленно следует, что графики функций $\xi(t)$ и $-\exp f_1(t)$ имеют общую точку, то есть существует t_2, что $t_2 \in A$ и $\xi(t_2) = -\exp f_1(t_2)$. Но тогда $(s')^2(t_2) \leqslant 0$, что противоречит времениподобности нашей кривой.

Итак, метрика Гёделя, рассматриваемая как космологическая модель с евклидовой топологией, не допускает в. п. циклов. Тем самым вывод Чандрасекхара и Райта верен.

2. На наш взгляд, ошибка Гёделя произошла из-за неосторожного пользования преобразованием координат, поскольку замена коорди-

нат таит в себе возможность перехода от одной топологии к другой. Поясним сказанное на примере. Из плоскости Меньковского, то есть из плоскости с метрикой $ds^2 = dx^2 - dy^2$, (3) вырежем полосу $\{0 \leqslant x \leqslant 1\}$ и отождествим граничные точки: точку $(0, y)$ отождествляем с точкой $(1, y)$. Тем самым от евклидовой топологии перешли к цилиндрической, и тем самым обеспечили существование в. п. цикла, которого ранее не было. Указанная процедура содержится и в преобразовании

$$x = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)\,\mathrm{sharctg}\,(\xi/\eta), \qquad y = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)\,\mathrm{charctg}\,(\xi/\eta), \tag{4}$$

при котором (3) примет вид

$$ds^2 = (\eta^2 - \xi^2)(d\xi^2 - d\eta^2) - 4\xi\eta d\xi d\eta, \tag{5}$$

поскольку в(4) содержится отображение $\exp(x + iy)$, „выкалывающее" точку из плоскости. В. п. цикл для (5) задается соотношениями $\xi = \sin t$, $\eta = \cos t$, причем скорость частицы, с данной мировой линией, в момент „замыкания" цикла равна $c \cdot \mathrm{th} 4\pi \approx 0{,}99c$!

3. Получим теперь некоторые оценки, которые позволят судить о физических ситуациях, в которых реализуются в. п. циклы.

В дальнейшем мы используем обозначения и терминологию из [4].

Предположим, что гравитационное поле постоянное и создается покоящейся макропылью. Поскольку истинное время и пространственное расстояние являются хронометрически инвариантными, то можно считать, что $g_{00} = \mathrm{const} > 0$, ибо в противном можно сделать преобразование $x^0 \to \sqrt{g_{00}}\,x^0$, $x^\alpha \to x^\alpha$.

Предположим, что в. п. цикл L является аналитической жордановой кривой, а также лежит на поверхности $F\{x^0, x^3 = \mathrm{const}\}$ и ограничивает область F. Без ограничения общности можно считать, что цикл L задается условиями $x^{1^2} + x^{2^2} = \mathrm{const}$; $x^0, x^3 = \mathrm{const}$, т. е. является „окружностью", поскольку мы можем сделать аналитическое преобразование координат x^1 и x^2, если это не так, в силу теоремы Римана и принципа Шварца [10]. Пусть также $g_{03} = g_{13} = g_{23} = 0$.

Подсчитывая истинное время, затрачиваемое на прохождение пути L, получаем

$$\tau(L) = \frac{1}{c}\oint_L \sum_\alpha \frac{g_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}}\,dx^\alpha = \iint_F \Omega\, dx^1 dx^2,$$

где

$$\Omega = \frac{\sqrt{g_{00}}}{c}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{g_{02}}{g_{00}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{g_{01}}{g_{00}}\right)\right\}.$$

На основании формулы ([4], стр. 359) можем написать

$$\Omega^2 = \frac{8\pi G\rho}{c^4}\,\frac{1}{g^{11}g^{22} - (g^{12})^2},$$

где ρ — плотность вещества. Замечая, что тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ задает на поверхности F индуцированную риманову метрику и обозначая через δ определитель матрицы $\|\gamma_{\alpha\beta}\|$ $(\alpha, \beta = 1,2)$, можем написать

$$\tau(L) = \frac{(8\pi G)^{1/2}}{c^2}\iint_F \sqrt{\rho\delta}\,dx^1 dx^2. \tag{6}$$

Поскольку $\det\|g_{ik}\| < 0$, то площадь, ограничиваемая в. п. циклом L, в смысле указанной индуцированной метрики не может быть произвольно малой. Предположим, что рассматриваемый нами цикл L имеет минимальную площадь, а также пусть плотность ρ мало изменяется в области F. Тогда из (6) получаем

$$\tau(L) \approx \frac{(8\pi G\rho)^{1/2}}{c^2}\sigma(F),$$

где через $\sigma(F)$ обозначена площадь области F. Предположим теперь, что для пространственной длины $l(L)$ цикла L и площади $\sigma(F)$ выполнено соотношение

$$\sigma(F) \sim \pi^{-1}[l(L)]^2. \tag{7}$$

При этом можно предполагать, что компоненты метрического тензора поверхности F либо зависят только от $x^{1^2}+x^{2^2}$, либо отклонения от этого мало влияют на соотношение (7). Таким образом, мы получаем требуемое соотношение

$$\tau \sim 2\cdot 10^{-24}\sqrt{\rho}\, l^2.$$

Откуда следует, что при $\rho \sim 10^{-31}$ *г/см*^{3} в случае, когда $\tau \approx 1$ год, имеем $l \sim$ [расстояния от Солнца до центра Галактики] ≈ 8000 *парсек*; если же $l = 1000$ *км*, то $\tau \sim 6\cdot 10^{-23}$ *сек*! Если принять $\tau = 1$ год и $l = 1000$ *км*, то $\rho \sim 10^{28}$ *г/см*^{3}!! Если отказаться от условия (7), то при $\tau = 1$ год, $l = 1000$ *км* и $\rho \sim 10^{-31}$ *г/см*^{3} получаем $\sigma \sim 10^9\pi^{-1}l^2$. То есть отклонения от евклидовой геометрии в 3- пространстве, где реализуются в. п. циклы, огромные, и вряд ли могут поколебать общий вывод о том, что ситуации, в которых реализуются в. п. циклы, лежат за пределами современных знаний.

4. Приведем пример многообразия с евклидовой топологией и метрикой, допускающей в. п. циклы.

Пусть
$$ds^2 = \frac{1}{2}dx^{0^2} + 2\Omega(x^2dx^1 - x^1dx^2)dx^0 + \left(\Omega^2x^{2^2} - \frac{1}{2}\right)dx^{1^2} - 2\Omega^2x^1x^2dx^1dx^2 + \left(\Omega^2x^{1^2} - \frac{1}{2}\right)dx^{2^2} + \alpha\, dx^{3^2}.$$

Искомая кривая задается соотношениями $\{x^0,\ x^3 = \mathrm{const},\ x^1 = a\sin t,\ x^2 = a\cos t\}$, где $a \geqslant 1/\sqrt{2}\Omega$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Stein Howard. Philos. Sci., v. 37, № 4, 589—601, 1970. [2] K. Gödel. Rev. Mod. Phys., v. 21, 447, 1949. [3] S. Chandrasekhar, J. P. Wright. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, v. 47, 341, 1961. [4] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля, М., 1967. [5] Дж. Синг. Общая теория относительности. ИЛ, 1963. [6] Я. Зельдович, И. Новиков. Релятивистская астрофизика, М., «Наука», 1967. [7] Ф. Энгельс. Диалектика природы, М., 1969. [8] S. W. Hawking, R. Penrose. Proceedings of the Roy. Soc. of London, v. A314, № 1519, 529—548, 1970. [9] C. J. S. Clarke. Proceedings of the Roy. Soc. of London, v. A314, 417—428, 1970. [10] А. В. Бицадзе. Основы теории аналитических функций комплексного переменного, М., «Наука», 1969.

Новосибирский госуниверситет

Поступила в редакцию 19 июня 1972 г.