Сибирский математический журнал
Июль—август, 1993. Том 34, № 4

УДК 513.82

ЕДИНСТВЕННОСТЬ АБЕЛЕВОЙ АФФИННОЙ ХРОНОГЕОМЕТРИИ

А. К. Гуц

При аксиоматическом построении псевдоевклидовой геометрии сигнатуры $(+ - \ldots -)$ или геометрии пространства-времени специальной теории относительности на основе понятия частичного порядка, как правило, предполагают, что порядок задан на некотором топологическом пространстве V, на котором просто транзитивно действует абелева группа преобразований G, относительно которой рассматриваемый порядок является инвариантным. Доказывается, что пространство V оказывается аффинным, порядок задается семейством конусов, а для группы G выбирается представление в виде группы параллельных переносов (см. [1]). После этого с помощью полученного семейства равных и параллельных конусов пространство V оснащается псевдоевклидовой структурой. Однако в стороне остается вопрос об однозначности такого вывода. Дело в том, что абелева группа может иметь различные аффинно неэквивалентные просто транзитивные представления в $\mathbb{R}^n$ [2], и, следовательно, возникает вопрос о существовании аффинно неэквивалентных причинных теорий пространства-времени специальной теории относительности или хроногеометрий. Цель этой работы — доказать единственность абелевой аффинной хроногеометрии. Другими словами, стандартная традиционная аффинная интерпретация специальной теории относительности, излагаемая в большинстве учебников и монографий, единственна.

Пусть G — абелева связная односвязная группа Ли размерности $n \geqslant 3$ и

$$\alpha_i : G \to \mathrm{Aff}\,(\mathbb{R}^n) \quad (i = 1, 2)$$

просто транзитивное аффинное действие G на $\mathbb{R}^n$. Здесь $\mathrm{Aff}\,(\mathbb{R}^n)$ — группа всех аффинных преобразований n-мерного арифметического пространства. Действия α_1 и α_2 называются *аффинно сопряженными*, если существует аффинная биекция $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такая, что $\alpha_1(g) = A \circ \alpha_2(g) \circ A^{-1}$ для любого $g \in G$.

Аффинная левоинвариантная структура на G — это гладкая структура, для которой все функции перехода и левые сдвиги, записанные в координатах, продолжаемы до преобразований из $\mathrm{Aff}\,(\mathbb{R}^n)$.

Просто транзитивное аффинное действие $\alpha_i : G \to \mathrm{Aff}\,(\mathbb{R}^n)$ задает полную левоинвариантную аффинную структуру $\mathcal{A}_i$ на группе Ли G. В самом деле, рассмотрим следующие диффеоморфизмы:

$$\varphi_i : G \to \mathbb{R}^n \quad (i = 1, 2),$$

$$G \ni g \xrightarrow{\varphi_i} \alpha_i(g)(e) = x(i) = (x^1, \ldots, x^n) \quad (i = 1, 2), \tag{1}$$

где $e \in \mathbb{R}^n$ — фиксированная точка. Числа $x^1, \ldots, x^n$ — система аффинных координат на $\mathbb{R}^n$. Их можно использовать в качестве координат на G:

$$\begin{tikzcd} G \ni g \arrow[d, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\mu_i"] & \\ \alpha_i(g)(e) = x(i) & \stackrel{\varepsilon}{=} (x^1, \dots, x^n), \end{tikzcd} \tag{2}$$

где ε — отображение отождествления вектора $x \in \mathbb{R}^n$ с кортежем $(x^1, \dots, x^n)$. Любой левый сдвиг $L_h : G \to G$ в этих координатах задается аффинной биекцией

$$\begin{aligned}(\mu_i \circ L_h \circ \mu_i^{-1})(x^1, \dots, x^n) &= \big((\varepsilon \circ \varphi_i) \circ L_h\big)\big(\varphi_i^{-1} \circ \varepsilon^{-1}\big)(x^1, \dots, x^n) \\ &= (\varepsilon \circ \varphi_i)(L_h(g)) = \varepsilon(\alpha_i(h)(\alpha_i(g)(e))) = \varepsilon(\alpha_i(h)(\varepsilon^{-1}(\varepsilon(x(i))))) \\ &= (\varepsilon \circ \alpha_i(h) \circ \varepsilon^{-1})(x^1, \dots, x^n) \in \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^n),\end{aligned}$$

что и означает левоинвариантность задаваемой аффинной структуры на G.

Две аффинные структуры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ на G называются *эквивалентными*, если существует аффинная биекция $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такая, что для систем координат

$$G \xrightarrow{\mu_1} \mathbb{R}^n, \quad G \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{R}^n,$$

принадлежащих структурам $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ соответственно, имеет место равенство $\mu_2 \circ \mu_1^{-1} = A$.

Предложение. *Две левоинвариантные аффинные структуры на группе Ли G, задаваемые аффинными действиями α_1 и α_2, эквивалентны тогда и только тогда, когда эти действия аффинно сопряжены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть аффинные левоинвариантные структуры $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ на группе Ли G задаются аффинными действиями α_1, α_2 соответственно. Предположим, что $\mathcal{A}_1$ эквивалентна $\mathcal{A}_2$, т. е. если μ_1, μ_2 — соответствующие системы координат, то $\mu_2 \circ \mu_1^{-1} = A$, где $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — аффинная биекция. Имеем соотношения (2) и

$$\varepsilon(x(2)) = (\mu_2 \circ \mu_1^{-1})(\varepsilon(x(1))) = A(\varepsilon(x(1))). \tag{3}$$

При g, равном единице группы G, равенство (3) принимает вид

$$\varepsilon(e) = A(\varepsilon(e)). \tag{4}$$

Из (3) следует

$$\varepsilon(\alpha_2(g)(e)) = (A \circ \varepsilon)(\alpha_1(g)(e))$$

или с учетом (4)

$$(\alpha_2(g) \circ (\varepsilon^{-1} \circ A \circ \varepsilon))(e) = ((\varepsilon^{-1} \circ A \circ \varepsilon) \circ \alpha_1(g))(e). \tag{5}$$

Подставляя в (5) вместо g произведение hg, выводим

$$\alpha_2(h)(\alpha_2(g)(e)) = ((\varepsilon^{-1} \circ A \circ \varepsilon) \circ \alpha_1(h))(x(1)),$$

а с учетом (3) —

$$\alpha_2(h)((\varepsilon^{-1} \circ A \circ \varepsilon)(x(1))) = ((\varepsilon^{-1} \circ A \circ \varepsilon) \circ \alpha_1(h))(x(1))$$

или

$$\alpha_2(h) \circ (\varepsilon^{-1} \circ A \circ \varepsilon) = (\varepsilon^{-1} \circ A \circ \varepsilon) \circ \alpha_1(h).$$

Следовательно,

$$\alpha_1(g) = (\varepsilon^{-1} \circ A \circ \varepsilon)^{-1} \circ \alpha_2(g) \circ (\varepsilon^{-1} \circ A \circ \varepsilon).$$

Полагая $\widehat{A} = \varepsilon^{-1} \circ A \circ \varepsilon$, получаем

$$\alpha_1(g) = \widehat{A}^{-1} \circ \alpha_2(g) \circ \widehat{A}, \tag{6}$$

т. е. α_1 и α_2 аффинно сопряжены.

Обратно, если α_1 и α_2 аффинно сопряжены, т. е. имеет место равенство (6), то

$$x(2) = \alpha_2(g)(e) = \big[\widehat{A} \circ \alpha_1(g) \circ \widehat{A}^{-1}\big](e)$$
$$= \big[\widehat{A} \circ \alpha_1(g) \circ \widehat{A}^{-1}\big](\widehat{A}(e)) = \widehat{A}(\alpha_1(g)(e)) = \widehat{A}(x(1))$$

и, следовательно,

$$\mu_2(g) = A(\mu_1(g)),$$

т. е. $\mu_2 \circ \mu_1^{-1} = A$, что означает эквивалентность аффинных структур $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Предложение доказано.

Рассмотрим на группе Ли G левоинвариантный частичный порядок, задаваемый семейством подмножеств $\mathfrak{P} = \{P_x : x \in G\}$ (см. [1]). Имеем частичный порядок на $\mathbb{R}^n$:

$$\mathfrak{P}_i = \varphi_i(\mathfrak{P}) = \{\varphi_i(P_g) : P_g \in \mathfrak{P}\},$$

являющийся $\alpha_i(G)$-инвариантным, т. е. если положить $P_{ix(i)} = \varphi_i(P_g)$, где $x(i) = \varphi_i(g)$, то

$$\alpha_i(h)(P_{ix(i)}) = P_{i\alpha_i(h)(x(i))}$$

для любого $h \in G$.

Рассмотрим диффеоморфизм

$$f = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Ясно, что

$$f(P_{1x(1)}) = P_{2f(x(1))} \tag{8}$$

для любой точки $x(1) \in \mathbb{R}^n$.

Теорема. *Пусть действие α_1 — это группа параллельных переносов в $\mathbb{R}^n$, а $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ состоят из строго выпуклых конусов. Тогда действия α_1 и α_2 аффинно сопряжены, а соответствующие левоинвариантные аффинные структуры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ аффинно эквивалентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (7), (8), а также из [3] следует, что f является аффинной биекцией, и, следовательно, в координатах (2) имеем

$$\mu_2 \circ \mu_1^{-1} = (\varepsilon \circ \varphi_2) \circ (\varepsilon \circ \varphi_1)^{-1}$$
$$= \varepsilon \circ (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \circ \varepsilon^{-1} = \varepsilon \circ f \circ \varepsilon^{-1} \in \mathrm{Aff}\,(\mathbb{R}^n).$$

Но это означает, что аффинные структуры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ аффинно эквивалентны. Сопряженность действий α_1 и α_2 вытекает из предложения. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуц А. К.* Аксиоматическая теория относительности // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 2. С. 39–79.
2. *Auslender L.* Simply transitive groups of affine motions // Amer. J. Math. 1977. V. 99, N 4. P. 809–826.
3. *Шайденко А. В.* К вопросу об отображениях семейств конусов // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 20, № 1. С. 164–174.

г. Омск *Статья поступила 16 апреля 1992*