



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Гуц, Замечание к проблеме Гельмгольца–Ли,
Докл. АН СССР, 1979, том 249, номер 4, 780–783

<https://www.mathnet.ru/dan43179>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 80.249.207.97

15 апреля 2025 г., 20:05:22



вающая функция $\omega: (0, \beta) \rightarrow R^1$, $\lim_{\tau \rightarrow 0} \omega(\tau) = 0$, что для каждого $\tau \in (0, \beta)$ можно указать отображение w_τ из $W(\varphi) \cap C^1(\bar{U})$ со следующими свойствами:

$$I(w_\tau) \leq I(u) + \omega(\tau), \quad \|w_\tau\|_{C^1(\bar{U})} \leq N\tau^{-\gamma},$$

где постоянная N от $\tau \in (0, \beta)$ не зависит.

Функционал I достигает на $W(\varphi)$ наименьшего значения $\lambda(\varphi)$ ⁽⁴⁾. Пусть $u \in W(\varphi)$ и $I(u) = \lambda(\varphi)$. Рассмотрим отображение w_τ , построенное в лемме 2 с $\tau = t^{1/6}$. Положим $v_t = w_{t^{1/6}}$. Отображение $h_t(x) = x + tv_t(x)$ отображает U на область,

близкую к U_t . Подправим отображение h_t так, чтобы получившееся отображение было из $K(U, U_t)$. Сначала мы подправим отображение h_t на границе области; затем, продолжив поправку на всю область, получим отображение из $K(U, U_t)$. Коэффициент q для этого отображения будет мажорировать $q(t)$ сверху, что и позволит получить (5).

Укажем кратко, как можно реализовать намеченную программу. Существует ⁽⁵⁾ окрестность Ω поверхности ∂U в R^n и C^2 -гладкое отображение π окрестности Ω на ∂U такое, что $|\pi(x) - x| \leq 2\rho(x, \partial U)$, $x \in \Omega$. Положим $z(s) = \pi(s + tv_t(s) - t(v_t(s), v(s))v(s))$. Тогда $h_t(s) + tl_t(s)$, где $l_t(s) = t^{-1}(\Phi_t(z(s)) - h_t(s))$, будет отображать ∂U на ∂U_t , причем (это следует из леммы 2) норма l_t в $C^1(\partial U)$ стремится к 0 при $t \rightarrow 0$. Если $L_t(x)$ — продолжение $l_t(s)$ на всю область $\bar{U}$ такое, что норма L_t в $C^1(\bar{U})$ мажорируется нормой l_t в $C^1(\partial U)$ равномерно относительно t , то отображение $g_t = h_t + tL_t$ — это то, которое нужно. Используя (3), (4); лемму 2 и свойства L_t , мы получаем неравенство

$$(6) \quad (q(g_t) - 1)/t^2 \leq I(u) + r(t),$$

где для функции $r(t)$ выполняется $\lim_{t \rightarrow 0} r(t) = 0$. Учитывая минимальность $q(t)$, из

(6) получаем (5). Неравенства (5) и (2) вместе дают (1).

Автор благодарит Ю.Г. Решетняка за внимание и помощь в работе.

Новосибирский электротехнический институт

Поступило
30 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ I. Väisälä, Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings, Berlin. ² Ю.Г. Решетняк, Сиб. матем. журн., т. 17, № 6 (1976). ³ Ю.Г. Решетняк, Сиб. матем. журн., т. 8, № 5 (1967). ⁴ М.Ю. Васильчик, Сиб. матем. журн., т. 19, № 3 (1978). ⁵ Х. Уитни, Геометрическая теория интегрирования, М., 1960.

УДК 513.011

МАТЕМАТИКА

А.К. ГУЦ

ЗАМЕЧАНИЕ К ПРОБЛЕМЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА — ЛИ

(Представлена академиком А.Д. Александровым 25 IV 1979)

В этой заметке приводится ответ на следующий вопрос: в каком случае будет изометрично евклидовой плоскости, плоскости Лобачевского или сфере универсальное накрывающее пространство для метрического пространства M с метрикой ρ , допускающего в некоторой открытой шаровой окрестности $B(x, \delta_x)$, $\delta_x > 0$, каждой своей точки вращение в смысле Буземана, т.е. для любых точек a , b

a', b, b' из $B(x, \delta_x)$ таких, что $\rho(xa) = \rho(xa')$, $\rho(xb) = \rho(xb')$ и $\rho(ab) = \rho(a'b')$, существует изометрическое отображение шара $B(x, \delta_x)$ на себя, оставляющее точку x неподвижной и переводящее a в a' и b в b' ?

Эту задачу можно рассматривать как локальный вариант знаменитой проблемы Гельмгольца — Ли. Наиболее удовлетворительное решение данной проблемы дано в статье Г. Фрёйденталя ⁽²⁾. Им получен следующий результат. Пусть M — связное локально-компактное метрическое пространство и F дважды транзитивная (т.е. переводящую одну заданную пару точек в другую) группа гомеоморфизмов M на себя, удовлетворяющие аксиомам:

(S) для любых замкнутых подмножеств A и B , $A \cap B = \emptyset$ существует открытое непустое подмножество U такое, что для любого $\lambda \in F$ либо $\lambda(U) \cap A = \emptyset$, либо $\lambda(U) \cap B = \emptyset$.

(V) F — полная группа.

(Z) пусть J_{x_0} — стационарная подгруппа группы F относительно точки $x_0 \in M$. Существует орбита $J_{x_0}(y)$, разделяющая пространство M .

Тогда M является дважды транзитивным однородным пространством в смысле Брихгофа — Вана, в частности, евклидовым пространством, гиперболическим или сферой, а F — замкнутой подгруппой соответствующих этим пространствам групп изометрий.

Аналогичные результаты получены и другими исследователями ⁽³⁻⁶⁾. Для этих работ характерны методы, оперирующие в целом и опирающиеся главным образом на достижения теории групп Ли. Однако известен следующий локальный вариант решения проблемы Гельмгольца — Ли, принадлежащий Г. Буземану.

Теорема Б. Если каждая точка x G -пространства $\langle M, \rho \rangle$ имеет шаровую окрестность $B(x, \delta_x)$, $\delta_x > 0$, допускающую вращение в смысле Буземана, то универсальное накрывающее пространство для M является элементарным, т.е. евклидовым, гиперболическим или сферическим ⁽¹⁾, стр. 411).

Напомним, что под G -пространством Буземан понимает пространство, удовлетворяющее аксиомам:

I. $\langle M, \rho \rangle$ — метрическое пространство.

II. $\langle M, \rho \rangle$ ограничено компактно, т.е. любое ограниченное бесконечное подмножество имеет, по крайней мере, одну предельную точку.

III. Если заданы две различные точки x, z , то существует такая точка y , что (xy, z) , т.е. y отлична от x и z и $\rho(xy) + \rho(yz) = \rho(xz)$.

IV. Каждой точке x соответствует такое положительное число ρ_x , что для любых двух различных точек y и z из открытого шара $B(x, \rho_x)$ существует точка u , для которой (yz, u) .

V. Если (xyz_1) , и (xyz_2) , и $\rho(yz_1) = \rho(yz_2)$, то $z_1 = z_2$.

Хотя результат Буземана — единственная известная нам попытка решать проблему Гельмгольца — Ли с локальной точки зрения, он не может служить окончательным ответом на поставленный в начале статьи вопрос. Дело в том, что непосредственным следствием аксиом IV и V является локальная единственность кратчайшей, соединяющей точки $x, y \in B(p, \rho_p)$, а это очень сильное предположение, от которого следует отказаться. Заметим, что при введении понятия G -пространства ставились более общие задачи, нежели непосредственное решение проблемы Гельмгольца — Ли. Ниже мы излагаем систему аксиом, цель которых — дать ответ на сформулированный в начале статьи вопрос.

Мы рассматриваем далее только сепарабельное локально-компактное метрическое пространство M с внутренней метрикой ρ .

Обозначим через $r(x)$ точную верхнюю границу всех чисел $r > 0$ таких, что сфера $S(x, r) \equiv \{y \in M: \rho(xy) = r\}$ является компактным подмножеством. Пусть, далее, $p(x)$ есть точная верхняя граница всех чисел p_x , отвечающих точке $x \in M$, таких, что если $y, z \in B(x, p_x)$, то y соединяется с z кратчайшей. Как известно,

функция $p(x)$ либо для всех x принимает значение $+\infty$, либо она всюду конечна и непрерывна.

Сформулируем следующие две аксиомы:

(A_1) Каждой точке $x \in M$ отвечает число $d(x) > 0$, обладающее свойством: если $I(x)$ обозначает группу всех изометрий шара $B(x, d(x))$ на себя, то $I(x)$ действует эффективно и транзитивно на каждой сфере $S(x, r)$, где $0 < r < d(x)$ и $\lambda(x) = x$ для $\lambda \in I(x)$.

(A_2) Для каждой точки $x \in M$ существует число $\delta_x > 0$ такое, что $\delta_x < \min(d(x), r(x), p(x))$ и выполняются условия:

а) сфера $S(x, r)$ связна для любого $r, 0 < r \leq \delta_x$;

б) существуют две различные точки a_r, b_r на каждой сфере $S(x, r), 0 < r \leq \delta_x$, разделяющие $S(x, r)$, т.е. $S(x, r) \setminus \{a_r, b_r\} = A_1 \cup A_2$, где $A_1 \cap A_2 = \emptyset, A_1, A_2$ — непустые открытые в $S(x, r) \setminus \{a_r, b_r\}$ подмножества;

в) для каждого $r, 0 < r \leq \delta_x$, существует изометрия $\lambda \in I(x)$ такая, что $\lambda(a_r) \in A_1$ и $\lambda(b_r) \in A_2$ (либо $\lambda(a_r) \in A_2, \lambda(b_r) \in A_1$).

Заметим, что аксиома (A_2) является локальным вариантом аксиом Г. Фрёйдентала (S) и (Z). При этом условие б) имеет целью фиксировать размерность сфер, имея в виду одномерные сферы и, следовательно, двумерное пространство.

Теорема 1. Пусть пространство M удовлетворяет аксиомам (A_1) и (A_2). Тогда:

(1) $S(x, r), 0 < r \leq \delta_x$, гомеоморфна одномерной евклидовой сфере S^1 ;

(2) группа $I(x)$ является компактной группой Ли размерности, равной единице, любая стационарная подгруппа которой компактна и нульмерна;

(3) связная компонента единицы группы $I(x)$ действует эффективно и транзитивно на $S(x, r), 0 < r \leq \delta_x$, и изоморфна группе Ли $SO(2)$.

Доказательство теоремы 1 опирается на теорию порядков топологических пространств в точке (⁸). При этом устанавливается, что $\text{ord}_p S(x, r) = 2$, и тогда на основании теоремы 8" из ((⁸), стр. 302) делается заключение о гомеоморфности $S(x, r)$ евклидовой сфере S^1 . Остальное следует из теории групп Ли.

Теорема 2. Если пространство M удовлетворяет аксиомам (A_1) и (A_2), то M является двумерным топологическим многообразием.

Для решения поставленной нами задачи потребуется еще три аксиомы.

(A_3) Для каждой точки $x \in M$ шар $B(x, d(x))$ допускает вращение в смысле Буземана.

(A_4) Для каждой точки $x \in M$ найдется точка $y \in M$ такая, что $\rho(xy) < \min(d(x), d(y), \delta_y)$.

(A_5) Между любыми двумя кратчайшими, исходящими из произвольной точки $x \in M$, существует угол в смысле А.Д. Александрова, причем существуют по крайней мере две кратчайшие, исходящие из точки x , с ненулевым углом между ними.

Аксиомы (A_3) и (A_4) — это всего лишь усиление аксиомы (A_1), причем (A_4) позволяет исключить из рассмотрения пространства с многогранными метриками, которые не являются элементарными.

Определение. Пространство M , удовлетворяющее аксиомам (A_1)—(A_5), называется g -пространством.

Теорема 3. Пусть M есть g -пространство. Тогда для каждой точки $x \in M$ можно найти положительное число $\eta_x, 0 < \eta_x \leq \delta_x$, такое, что любая точка $y \in B(x, \eta_x)$ соединяется с x единственной кратчайшей.

Эта теорема является ключевой во всем нашем исследовании. Доказательство ее весьма сложно и занимает много места.

Следующая теорема дает ответ на вопрос, решаемый в этой заметке.

Теорема 4. Пусть M — полное r -пространство. Тогда M — двумерное G -пространство Буземана, универсальное накрывающее для которого элементарно, т.е. является евклидовой плоскостью, плоскостью Лобачевского или сферой.

Следствие. Полное r -пространство является одним из следующих пространств: сферой, проективной плоскостью, евклидовой плоскостью, цилиндром, тором, листом Мёбиуса, бутылкой Клейна или, наконец, локально-гиперболическим двумерным пространством, число которых бесконечно, но они описаны известным образом ⁽⁷⁾.

Замечание. Неполное r -пространство не является G -пространством Буземана. Более того, как показывает рассмотрение евклидовой плоскости с выколотой точкой, существует неполное r -пространство, универсальное накрывающее пространство для которого не изометрично элементарному.

В заключение хочу поблагодарить В.А. Залгаллера и В.Н. Берестовского за ценные замечания и помощь в работе.

Омский государственный университет

Поступило
4 VI 1979

ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. Бузман, Геометрия геодезических, М., Физматгиз, 1962. ² H. Freudenthal, Math. Zs., В. 63, 374 (1956). ³ Д. Гильберт, Основания геометрии. Приложение IV, М.—Л., 1948. ⁴ A. Kolmogoroff, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys., K 1, В. 208 (1930). ⁵ Wang Hsien-Chung, Ann. Math., v. 55, 177 (1952). ⁶ J. Tits, Bull. Soc. Math. Belg., v. 5, 44 (1952). ⁷ Ф. Клейн, Неевклидова геометрия, М.—Л., ОНТИ, 1936, стр. 290. ⁸ К. Куратовский, Топология, т. 2, М., "Мир", 1969, стр. 279.

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

ДИНЬ ЗУНГ, Г.Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ

ЗАДАЧИ ТИПА БЕРНШТЕЙНА И ФАВАРА И СРЕДНЯЯ ϵ -РАЗМЕРНОСТЬ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 10 V 1979)

1. Обозначения. Пусть $0 = (0, \dots, 0)$, $1 = (1, \dots, 1)$, $\infty = (\infty, \dots, \infty)$. Если $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, то $a \leq b$ означает, что

$$a_k \leq b_k, \quad k = 1, \dots, n; \quad |a|^b = \prod_1^n |a_k|^{b_k}; \quad \frac{1}{a} = \left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n} \right), \quad a_k \neq 0.$$

Далее $L_p(\mathbf{R}^n)$, где $p = (p_1, \dots, p_n)$ и $1 \leq p \leq \infty$, обозначает совокупность измеримых функций на $\mathbf{R}^n$, для которых конечна норма

$$\|x\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \dots \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^{p_n} dt_n \right)^{p_{n-1}/p_n} \dots \right)^{p_1/p_2} \right)^{1/p_1}.$$

Это банахово пространство, которое вкладывается в пространство обобщенных функций Φ' (см. ⁽¹⁾). Для каждого $x \in \Phi'$ и $\alpha \in \mathbf{R}^n$ определена лиувиллевская производная $\mathcal{D}^\alpha x \in \Phi'$ функции x порядка α . Если $x \in \Phi'$, то Fx обозначает преобразование Фурье функции x , а $\text{supp } Fx$ — носитель Fx .