МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ ЦЕНТР МАТЕМАТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
СЕВЕРО-ОСЕТИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. Л. ХЕТАГУРОВА
НАУЧНО–ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК ИМ. И. И. ВОРОВИЧА

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОБРАЗОВАНИЮ:

Тезисы докладов
Международной научной конференции
«Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVIII: Теория операторов и дифференциальные уравнения»
(РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня–5 июля 2025 г.)

Владикавказ
2025

Исследования по теории операторов, дифференциальным уравнениям и математическому образованию: тезисы докладов Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования, XVIII: Теория операторов и дифференциальные уравнения» (РСО-Алания, турбаза «Дзинага», 29 июня – 5 июля 2025 г.)

СТРАТЕГИЯ ШТАКЕЛЬБЕРГА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ОПОЛЗНЕЙ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

А. К. Гуц

(Россия, Сочи, СГУ)

В статье [1] было предложено использовать теорию дифференциальных игр для моделирования оползней. Были найдены две равновесные стратегии Нэша. которые показывали, что при определенных действиях городских служб можно поддерживать оползневые процессы в контролируемом состоянии. Равновесия Нэша — это достаточно идеализированные стратегии, которые неявно полагают наличие «осмысленных» действий у игрока, именуемого «Природой».

В данной работе мы исследуем возможности (программного) управления оползневыми процессами в случае более реалистических стратегий Штакельберга, когда городским службам приходится действовать в условиях лидирования игрока «Природа», которое проявляется в форме проливных дождей, являющихся основной причиной, например в Сочи, катастрофической активизации оползней.

В игре, основанной на стратегии Штакельберга, один игрок является лидером, он диктует свои условия другим игрокам. Поищем оптимальную стратегию Штакельберга для нашей дифференциальной игры

$$\frac{dx}{dt} = f(x, H, r) = -x^3 - Hx - r, \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

с выигрышной функцией игрока «Городские службы» [2. с. 115]:

$$J_H[x_0, H, r] = \int\limits_0^T v_H(x, H, r)\,dt, \quad v_H(x, H, r) = -H - \frac{H^2}{2} - \frac{x^2}{2}, \tag{2}$$

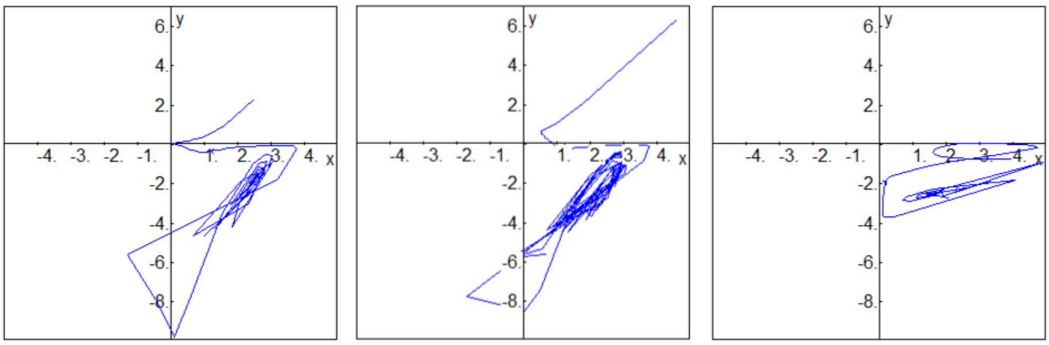
где x — смещение оползня, $H = H(t)$ — игрок «Городские службы», $r = r(t)$ — игрок «Природа», соответствующий проливным дождям. Предполагаем, что нам известна стратегия игрока «Природа», т. е. нам известен прогноз осадков, в том числе и прогноз ливневых дождей $r = r^*(t)$. Отметим, что сочинский Гидромет имеет такие прогнозы, поступающие из Москвы, как минимум за сутки, а уточненные — за шесть часов. Игрок «Городские службы», зная эту стратегию $r^*(t)$, выбирает свою стратегию, свое программное управление $H^*(t)$ так, чтобы максимизировать свою выигрышную функцию, т. е. ищем функцию $H^*(t)$ так, что

$$H^*(t) = \arg\max_{H(t)} J_H\big[x_0, H(t), r^*(t)\big].$$

Оптимальная стратегия Штакельберга игрока «Городские службы» равна [2, С. 114–115] $H^*(t) = -1 - x(t)y(t)$, где $y(t)$ есть решение краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x^3 + x(1+yx) - r^*(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y\left[3x^2 - 1 - yx\right], \\ x(0) = x_0, \quad y(T) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Были рассмотрены стратегии $r^*(t) = -t$ (дождь усиливается) и при $r^*(t) = t$ (дождь прекращается). Частичные результаты даны на рис. 1. Хаотичное поведение кривых связано с тем, что после некоторого момента времени величины x и y становятся очень большими (см. рис. 2) и используемый пакет Dynasys плохо отражают эту ситуацию. Мы видим, сравнивая с игрой с принятием стратегии Нэша [1], что выбор «более реалистической» стратегии Штакельберга в случае модели оползневого процесса (1)–(2) демонстрирует достаточно неприятную катастрофическую обстановку для игрока «Городские службы», а значит и для населения.



r(t)=-t, x(0)=0, y(0)=0 r(t)=-t, x(0)=1, y(0)=1 r(t)=t, x(0)=3, y(0)=0

Рис. 1. Поведение смещения оползня $x(t)$ при $r^*(t) = -t$ (дождь усиливается) и при $r^*(t) = t$ (дождь прекращается).

```
> head(nonstiff, n = 20)
          time           y1           y2
[1,] 0.0000000 1.000000e+00 4.000000e+00
[2,] 0.1000000 1.515870e+00 3.731237e+00
[3,] 0.2000000 2.602253e+00 5.058824e+00
[4,] 0.2722841 2.403528e+71 4.807056e+71
>
```

Рис. 2. Пример расчета кривых $x(t) = y_1$ и $y(t) = y_2$ при $r^*(t) = -t$ в пакете R.

Таким образом, теоретически задача поиска оптимальной стратегии борьбы с оползнями сводится к решению системы (3). Очевидно, это предполагает подбор функций $r^*(t)$, адекватно отражающих ситуацию с ливневыми дождями. Численное моделирование позволяет находить оптимальную стратегию для

«Городских службы» (проведение противооползневых мероприятий, установка заграждений, ликвидация последствий и пр.) при различных ливневых дождях, а также позволяет предсказывать опасные ситуации.

Литература

1. *Гуц А. К.* Управление оползневыми процессами в рамках теории дифференциальных игр // Математические структуры и моделирование.—2024.—№ 3 (71).—С. 74–83.
2. *Dockner E. J., Jergensen S., Ngo Van Long, Sorger G.* Differential Games in Economics and Management Science.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.