МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО»

УДК 81:372.881

Регистрационный номер НИОКТР АААА-А16- 116040810141-5

Регистрационный номер ИКРБС АААА-Б17- 217012740247-1

Дата регистрации в ЦИТиС 27/01/2017

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по НР ФГБОУ ВО
«ОмГУ им. Ф.М. Достоевского»
д.ф-м.н., профессор
______________ С.В. Белим

«____»_____________ 2016 г.

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

«ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ КИБЕРНЕТИКИ В СОЦИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ»

(заключительный)

Руководитель темы ___________________ А.К. Гуц

подпись, дата

Нормоконтролер ___________________ Н.П. Руренко

подпись, дата

Омск 2016

РЕФЕРАТ

На примере динамики народонаселения показано, что использование интуиционистских дифференциальных уравнений позволяет более полно описывать социальную действительность.

Показано, что динамика уровня здоровья человека в экологии или уровень доверия людей к власти можно описывать как дифференциальную игру и, следовательно, находить оптимальные равновесные ситуации (оптимальные стратегии).

Предложен квантовый подход, реализующий идеи Огюста Конта о социальной статике и социальной динамике. Использован аппарат квантовой космологии, позволяющий описывать социальную физику.

ВВЕДЕНИЕ

Социология, которая многими воспринимается как гуманитарная социальная наука, в действительности постоянно основывает свои исследования на использовании математических методов. Однако, как правило, это методы математической статистики. Использование других дисциплин математики и кибернетики в социологии наталкивается на то, что хотя при обучении социологов им преподаются высшая математика и информационные технологии, само это преподавание не способствует тому, что социологи могут создавать математические модели социальных явлений.

Отчасти это связано с тем, что математическая социология не может похвастаться богатым разнообразием множества ярких и успешных математических моделей социальных систем и процессов, а отчасти с тем, что вообще математическая социология не выработала привлекательного и естественного для социологов ***языка***, на котором социология могла бы излагать как свои достижения, так и свои мысли. Для математики таким языком в XX веке стала теория множеств. Язык математики явно воспринимается социологами как посторонний, и успех языка математики в физике здесь не повторяется.

Возможно, это связано с тем, современный язык математики слишком сложный, а точнее его сложность не соответствует сложности понятий, в которых существует и выражается социальная реальность.

Так или иначе, но следует искать в современной кибернетике, как математической науки об управлении посредством владения (квантовой) информацией, подходящего языка для описания социальных явлений. Данное исследование представляет три возможных подхода к решению указанной проблемы.

1. ДИНАМИКА СОЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ И ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ЛОГИКА

Динамику социальной системы можно представлять с помошью дифференциальных уравнений [1]. Однако описание социальных объектов, как правило, не укладывается в рамки однозначных ответов «да-нет» на возникающие вопросы. Поэтому более естественным является анализ решений дифференциального уравнения, т.е. предсказание будущего социальной системы, в рамках паранепротиворечивой или интуиционистской логики. Как показывается в данной заметке, для этого можно воспользоваться инфинитозимальным анализом Кока-Ловера, в основе которого лежит интуиционистская логика.

1.1. Инфинитозимальный анализ Кока-Ловера

В книгах [2, 3] излагается дифференциальное исчисления, построенное на основе интуиционистской логики. Поле действительных числел R расширяется до кольца R за счет добавления инфинитозималов, т.е. бесконечномалых величин, среди которых есть подмножество чисел

$$D = \{d \in R : d^2 = 0\}.$$

.Принимается следующая

Аксиома Ловера. *Если* $d : R \to R$ *– произвольная функция, то для всякого* $d \in D$ *имеет место формула*

$$f(x+d) = d(x) + a_x d,$$

где $a_x \in R$, и используется обозначение $a_x = f'(x)$.

В этом инфинитозимальном исчислении все функции $f : R^n \to R$ дифференцируемы и для них справедивы все известные правила дифференцирования. Поэтому можно писать дифференциальные уравнения и искать их решения.

Инфинитозимальный анализ Кока-Ловера не может быть проинтерпретирован в теории множеств Кантора, но имеет интерпретации в так называемых гладких топосах. Одним из них является топос $Sets^{L^{op}}$ (см. [3, 4]).

Числа x из R, функции $f: R \to R$ интерпретируются в $Sets^{L^{op}}$ в так называемой стадии $\ell C^{\infty}(\mathrm{R}^m)/I$ (I конечнопорожденный идеал в $C^{\infty}(\mathrm{R}^m)$) соответственно как функции $x: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ или, точнее, $x(a) \bmod I$ и m-параметрическое семейство функций $f: \mathrm{R} \times \mathrm{R}^m \to \mathrm{R}$ или $f(t,a) \bmod \pi^*(I)$, $a \in \mathrm{R}^m$ (см. [4, p.76-78]).

1.2. Закон Мальтуса

Закон Мальтуса, которому было уделено большое внимание в научных кругах XIX века, утверждает, что численность населения $N(t)$ растет со временем экспоненциально и описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dN}{dt} = kN(t). \tag{1}$$

Рассматривая это уравнение в рамках синтетического анализа Кока-Ловера, и проинтерпретировав его в топосе $Sets^{L^{op}}$, имеем в стадии $\ell C^{\infty}(\mathrm{R})/\{a\}$ (см. [3, 4])

$$N(t,a) = C(a)e^{k(a)t} \bmod \pi^*(\{a\}).$$

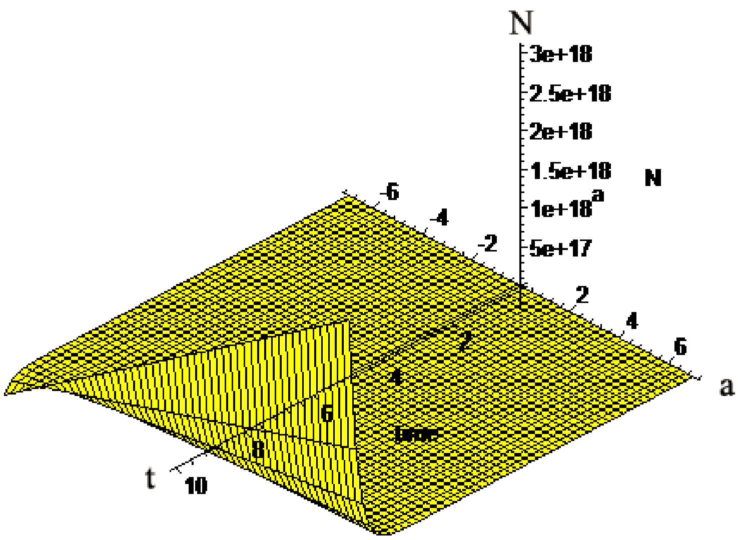


Рисунок 1.1. Функция $N(t;\ a)$

Полагаем, что $C(a) = N_0 + a, k(a) = k_0 + a$, $a \in \mathrm{R}$, где $N_0, k_0 \in \mathrm{R}$ – исходная численность населения и принятая скорость роста населения соответсивенно. Фактически этим мы предположили, что величины $N_0, k_0 \in \mathrm{R}$ заданы, измерены с ошибкой a. Измерение любых числовых величин, как показывает человеческий опыт, никогда не может быть сделано абсолютно точно. В силу этого естественно принять, что все константы, характеризующие реальные объекты и социальные объекты, в частности, описыватся посредством числа, к которому добавлена бесконечномалая величина (инфинитозимал).

Следовательно,

$$N(t,a) = (N_0 + a)e^{k_0 t} \tag{2}$$

Поведениие этой функции дано на рис.1. Тем самым мы имеем более полную картину, характеризующую динамику роста населения и учитывающая ошибки измерения исходных констант.

1.3. Население. Логистическое уравнение

Примем, что динамика населения описывается логистическим уравнением [1, с.44]

$$\frac{dN}{dt} = -k(N - N_0)^2 + \mu(N - N_0), \tag{3}$$

$$N(0) = N_0,$$

где $k = const > 0$ – определяет лимитирующее ограничение внешней среды, $\mu \in \mathrm{R}$ и μ – изменяющийся параметр, хапактеризующий скорость роста населенич без учета лимитирующего влияния внешней среды.

Классическое условие стационарных равновесий

$$\frac{dN}{dt} = 0 \tag{4}$$

дает два равновесия

$$N(t) = N_0 \quad u \quad N(t) = N_0 + \mu/k.$$

В интуиционистском синтетическом анализе Кока-Ловера можно вместо (4) написать следующее условие:

$$\frac{dN}{dt} = d, \quad d^2 = 0. \tag{5}$$

Иначе говоря, мы предполагаем, что процесс отыскания равновесных состояний априори содержит скрытую плохо контролируемую ошибку, связанную с тем, что реальные вычисления всегда производятся с ошибкой, т.е. являются всего лишь приближениями. На практике мы никогда не имеем дела с чистым нулем 0, а лишь с близкой к нему в каком-то смысле величиной $0+d$.

В таком случае получаем следующее уравнение для стационарных равновесий:

$$k(N-N_0)^2 - \mu(N-N_0) + d = 0. \tag{6}$$

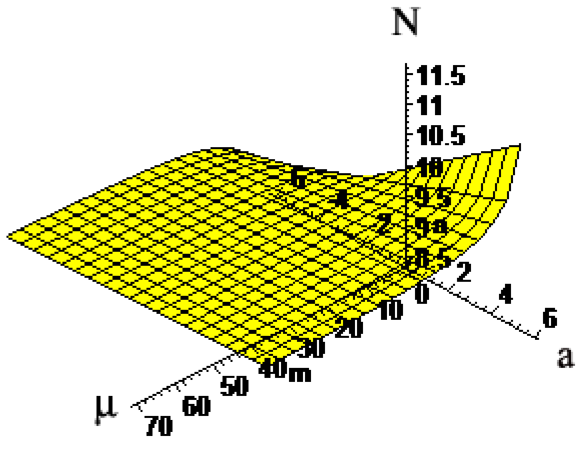
Его решениями при $\mu \neq 0$ являются два равновесия

$$N(t) = N_0 + d/\mu \quad и \quad N(t) = N_0 + \mu/k - d/\mu. \tag{7}$$

Интерпретации этих двух равновесных поверхностей в топосе $Sets^{L^{op}}$ в стадии $\ell C^\infty(\mathrm{R})/\{a\}$:

$$N(t) = N_0 + a/\mu \quad и \quad N(t) = N_0 + \mu/k - a/\mu$$

представленны соответственно на рис.2 и рис.3.



Рисцнок 1.2. $N(t) = N_0 + a/\mu$

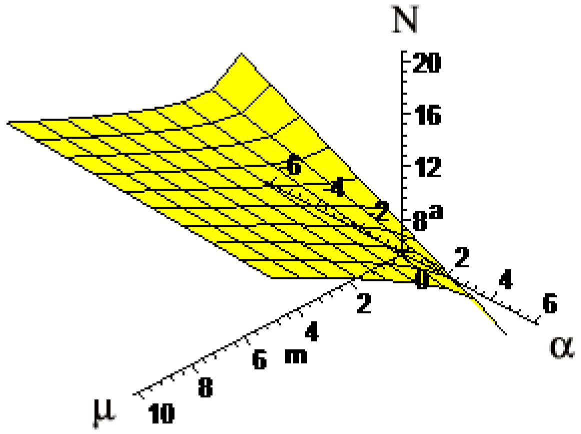


Рисунок 1.3. $N(t) = N_0 + \mu/k - a/\mu$

Мы видим, как ошибка a социологического измерения влияет на поведение равновесия. В классическом случае это не столь наглядно, как в интуиционистском.

Отметим для полноты, что при $\mu = 0$ имеем уравнение равновесий

$$(N - N_0)^2 = -d/k,$$

решением которого является равновесие

$$N = N_0, \ d = 0.$$

Литература по разделу 1

[1] Гуц А.К., Паутова Л.А., Фролова Ю.В. Математические методы в социологии. М.: Издательство ЛКИ, 2014. 214 с.

[2] Kock A. Synthetic Differential Geometry. – Cambridge University Press, 1981.

[3] Гуц А.К. Физика реальности. Омск: Изд-во КАН, 2012. 424 с.

[4] Moerdijk I., Reyes G.E. Models for Smooth Infinitesimal Analysis. – Springer-Verlag, 1991.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ В ЭКОЛОГИИ ЧЕЛОВЕКА И В СОЦИОЛОГИИ

В экологии и в социологии мы легко находим примеры ситуаций, в которых наблюдаются две противоборствующие, конфликтующие стороны. Чаще всего ни одна из сторон не способна обеспечить себе «полную победу». В жизни всегда приходится искать компромисные решения, результатом которых являются в общем-то удовлетворительные, или оптимальные для обеих сторон ситуации. Для поиска таких оптимальных ситуаций создана математическая теория игр, в которой противоборствующие стороны называются игроками, а под оптимальной ситуацией понимается надлежащий выбор оптимальных или равновесных стратегий, которых придерживаются игроки, управляя тем самым ходом игры.

В данной статье показана, как можно применить теорию диффереციальных игр к нахождению и удержанию оптимальных ситуаций, называемых в теории диффереციальных игр оптимальными управлениями или равновесиями.

2.1. Описание модели здоровья человека

В рамках медицинской модели здоровья степень здоровья человека может быть охарактеризована достаточно большим числом количественных показателей, которые получают при проведении различных анализов (кровяное давление, температура тела, количество эритроцитов, сахар в крови и т. д.). К этим показателям следует добавить различные показатели, используемые другими моделями здоровья человека.

Пусть величины x_j, $j = 1,2,...,N$ – совокупность всевозможных показателей здоровья человека.

Введем *интегральный показатель здоровья человека*, имеющий вид

$$x = \sum_{j=1}^{N} w_j x_j,$$

где w_j – вес показателя x_j, т. е. его вклад (доля) в интегральный показатель. Значения показателя x в момент времени t обозначаем как $x(t)$. Это число принимается нами как степень здоровья человека.

Показатель имеет нижнию границу – число Z_0. Человек считается здоровым в момент времени t, если сумма его показателей $x(t) \geq Z_0$, и болеющим, если $x(t) < Z_0$.

Очевидно, что такой подход является крайне упрощенным, но любая модель здорового человека есть определенное упрощение, которое может быть со временем усложнено.

Зжоровье людей в конкретном регионе во многом определяется *действием долговременного вредоносного фактора риска* – $k_{\text{ÂÔÐ}}$, который является неустранимым фактором. Это радиоактивный фон местности, некачественная вода в колодцах, реке, озере и др.). Данный фактор мы не рассматриваем как фактор управления.

Внешние управляющие факторы в нашей задаче, оказывающие влияние на здоровье человека, это:

1) v – *неблагополучная медико-санитарная ситуация*, (временный, переменный фактор, который может быть устранен: задымленность при лесных пожарах, ядовитые сбросы в реки и др.);

2) u – *принятие мер по преодолению неблагополучной медико-санитарной ситуации* (лечение, профилактика) u.

В [1, 2] было выведено дифференциальное уравнение, описывающее динамику интегрального показателя здоровья человека $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} V(x, u, v, k_{\text{ÂÔÐ}}), \tag{1}$$

где

$$V(x, u, v, k_{\text{ÂÔÐ}}) = \frac{k_0}{5} x^5 + ux^3 + vx^2 + k_{\text{ÂÔÐ}}\, x, \tag{2}$$

Отметим, что хорошее здоровье людей характеризуется неравенством $x > Z_0$, ухудшение – неравенством $x < Z_0$; действие долговременного вредоносного фактора риска – неравенством $k_{\text{ÂÔÐ}} < 0$, наличие неблагоприятной медико-санитарной ситуации в регионе – неравенством $v < 0$, принятие мер по преодолению неблагополучной медико-санитарной ситуации (лечение) – неравенством $u > 0$.

Функция V, заданная выражением (2), описывает катастрофу «ласточкин хвост» [1, 2].

Равновесные состояния

$$\frac{\partial}{\partial x} V(x, u, v, k_{\text{ÂÔÐ}}) = 0 \tag{3}$$

данной динамической системы были изучены в [1, 2]

2.2. Экология человека как диффереціальная игра

Поскольку фактор $k_{\text{ÂÔÐ}}$ мы не рассматриваем как управляющий, то перепишем уравнение (1) в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = -\dfrac{\partial}{\partial x} W(x(t), u(t), v(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$W(x, u, v) = V(x, u, v, k_{\text{ÂÔÐ}}), \quad {}_{\text{ÂÔÐ}} < 0.$$

Нас интересует, какая пара управлений $u(t), v(t)$ является в некотором смысле оптимальной? Фактически это означает ситуацию соответствующую реальности: трудно предоотвратить вредоносное дейстие фактора $v(t) < 0$, как и трудно добиться желательного уровня мер, предотвращающих неблагополучные медико-санитарные ситуации и обеспечить необходимое лечение пострадавших $u(t) > 0$.

Реальная жизнь демонстрирует, что даже если руководитель предприятия, производящего периодические вредные выбросы в атмосферу и в водоемы, вполне понимает, как это плохо отражается на здоровье населения, тем не менее отсутствие средств на очистительные сооружения, на модернизацию оборудования вынуждает его санкционировать вредоносные выбросы. Подобным же образом экологическим учреждениям и экологическим организациям часто трудно преодолеть бюрократические препятствия на пути внедрения нужных природозащитных мероприятий, которые связаны как с отсутствием нужных средств, так с подкупом тех, от кого зависит обеспечение таких мероприятий.

На языке математической теории игр это означает, что у нас есть два игрока 1 и 2, первый из которых борется за здоровье людей, а второй создает вредоносную окружающую среду.

Для каждого игрока надо выбрать подходящую к региональной ситуации платежные функции, имеющие вид

$$J_i(x,u,v) = \int_{t_0}^{T} F_i(t, x(t), u(t), v(t))dt + h_i(x(T)), \ \ (i = 1,2)$$

и *критерий оптимальности*, определяющего выбор управлений $\vec{u}(t) \in U_1, \vec{v}(t) \in U_2$, адекватных сложившейся ситуации.

2.2.1. Примеры критериев оптимальности управления

Например, таковым является следующая форма *принципа минимакса* : $J_1 = J_2$ и ищем управления $\tilde{u}(t, \tilde{v}(t)) \in U_1, \tilde{v}(t) \in U_2$ такие, что

$$J(t_0, x_0, \tilde{u}(t, \tilde{v}(t)), \tilde{v}(t)) = \inf_{v(t)} \sup_{u(t)} J(t_0, x_0, u(t), v(t)) \tag{5}$$

в предположении, что игрок 1 знает, какое управление $\tilde{v}(t)$ выбрал игрок 2 [3, с.46]. Пара $\tilde{u}(t, \tilde{v}(t)), \tilde{v}(t)$ называется *оптимальной парой стратегий*.

Фактически это означает, что экологи хорошо озакомлены с действиями чиновником и руководителей загрязняющих среду предприятий, и пытаются всячески добиться высокого значения интегрального показателя здоровья человека. Но действия чиновников, директоров предприятий, их владельцев, преступников и прочее объективно ведут к снижению усилий экологов. Особенно это видно, если взять такую платежную функцию

$$J(t_0, u, v) = x(T).$$

Перед игрой берется некоторая точка $x_1 > Z_0$, называемая терминальной частью границы пространства $[x_0, x_1]$. Когда $x(t)$ достигает ее, т.е. $x(T) = x_1$, игра оканчивается [4, с.49].

В случае, когда оба игра не имеют информации об используемых стратегиях противником, то в качестве критерия оптимальности можно взять принцип *седловой точки* [3, с.49]: ищутся управления $\tilde{u}(t)), \tilde{v}(t)$ такие, что

$$J(t_0, x_0, \tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) = \inf_{v(t)} \sup_{u(t)} J(t_0, x_0, u(t), v(t)) = \sup_{u(t)} \inf_{v(t)} J(t_0, x_0, u(t), v(t)). \quad (6)$$

Пара управлений $(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t))$ – это *оптимальные управления*.

В книге [3] излагаются алгоритмы отыскания оптимальных управления для задач (5) и (6). При реализации этих алгоритмом приходится решать очень сложные задачи, которые далеко не всегда приводят к успеху.

Пара управлений $(\bar{u}_1(-), \bar{u}_2(-)) \in U_1 \times U_2$ представлет *равновесие Нэша*, если

$$\forall u_1 \in U_1 [J_1((t, x, \bar{u}_1(-), \bar{u}_2(-)) \le J_1((t, x, u_1(-), \bar{u}_2(-))],$$

$$\forall u_2 \in U_2 [J_2((t, x, \bar{u}_1(-), \bar{u}_2(-)) \le J_2((t, x, \bar{u}_1(-), u_2(-))].$$

Равновесие Нэша – это стратегии игроков, которые стараются учитывать интересы противника и стремятся к компромиссу.

В [5, p.109] дается необходимое условие существования равновесия Нэша, сводящееся к аналогу принципа максимума Понтрягина.

Различные достаточные условия существования оптимальных стратегий и равновесий для дифференциальных игр даны в книге [6].

2.2.2. Существование равновесий Нэша

Если игрок формирует «свое» управляющее воздействие в виде только функции времени $u(t)$ на всю продолжительность игры, то $u(t)$ – это *программное управление* игрока. Ранее мы называли его, используя термин «управление». Однако игрок может выбирать свое управление в зависимости от того, в каком положении x в момент времени t находится система. В таком случае игрок конструирует управляющее воздействие в виде функции $u(t, x)$, зависящей уже от позиции $\{t, x\}$, и для $u(t, x)$ используется термин *позиционное управление* игрока [9]. Часто пишут просто $u(x)$.

Приведем два примера, когда ищутся равновестия Нэша, являющиеся позиционными управлениям.

1. **Игра с ненулевой суммой.** Для дифференциальной игры N -игроков

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \sum_{j=1}^{N} g_j(x) u_j, \quad f(0) = 0,$$

$$x \in \mathrm{R},\ u_j \in \mathrm{R},$$

$$J_i(x, u_1, ..., u_N) = \int_0^{+\infty} [Q_i(x) + \sum_{j=1}^{N} R_{ij} (u_j)^2] dt, \quad (i = 1, ..., N),$$

$$Q_i > 0,\ R_{ii} > 0,\ R_{ij} \ge 0,$$

существование равновесий Нэша

$$J_i(u_1^*, u_2^*, u_i^*, ..., u_N^*) \le J_i(u_1^*, u_2^*, ..., u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^* ..., u_N^*),\ \forall u_i,\ i \in N, \tag{7}$$

сводится к крайне сложной задаче отыскания положительно определенного решения $V_i(x) > 0$ нелинейного уравнения Гамильтона-Якоби

$$(V_i)'_x(x) f(x) + Q_i(x) - \frac{1}{2} (V_i)'_x \sum_{j=1}^{N} [g_j(x)]^2 (R_{jj})^{-1} (V_j)'_x + \quad 2cm$$

$$5cm + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{N} R_{ij} [g_j(x)]^2 [(R_{jj})^{-1}]^2 [(V_j)'_x]^2 = 0, \tag{8}$$

по которому строится равновесие Нэша [8, Theorem 10.4-2]:

$$u_i^*(x) = u_i(V_i(x)) = -\frac{1}{2} R_{ii} g_i(x) (V_i)'_x,\ i \in N. \tag{9}$$

Равновесие Нэша в данном случае означает, что если каждый игрок пытается в одностороннем порядке изменить свою стратегию управления, в то время как политика остальных игроков остается неизменной, то он имеет худший результат (больший проигрыш).

В нашем случае $N = 2,$ и

$$f(x) = k_0 x^4 + k_{\text{ÂÔÐ}}, \quad g_1(x) = 3x^2,\ g_2(x) = 2x,$$

и при $R_{11} = R_{22} = 1, R_{12} = R_{21} = 0$ уравнения Гамильтона-Якоби имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&Q_1 + (V_1)'_x\, f(x) - \frac{1}{4}[g_1(x)]^2[(V_1)'_x]^2 - \frac{1}{2}[g_2(x)]^2(V_1)'_x(V_2)'_x = 0,\\
&Q_2 + (V_2)'_x\, f(x) - \frac{1}{4}[g_2(x)]^2[(V_2)'_x]^2 - \frac{1}{2}[g_1(x)]^2(V_1)'_x(V_2)'_x = 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Примем, что $k_{\text{ÂÔÐ}} = 0$, т.е. в регионе отсутствует долговременный вредоносный фактор риска. Тогда имеем уравнения Гамильтона-Якоби в виде:

$$
\begin{aligned}
&Q_1 + (V_1)'_x k_0 x^4 - \frac{9}{4}x^4[(V_1)'_x]^2 - 2x^2(V_1)'_x(V_2)'_x = 0,\\
&Q_2 + (V_2)'_x k_0 x^4 - x^2[(V_2)'_x]^2 - \frac{9}{2}x^4(V_1)'_x(V_2)'_x = 0.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Проигрышные функции имеют вид:

$$
\begin{aligned}
J_1(x,u,v) &= \int_0^{+\infty}[Q_1(x) + u^2]dt,\\
J_2(x,u,v) &= \int_0^{+\infty}[Q_2(x) + v^2]dt.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Нетрудно проверить, что уравнения (11) выполнены, если

$$
V_1(x) = V_2(x) = \frac{1}{2}x^2,
$$

$$
\begin{aligned}
Q_1(x) &= \frac{9}{4}x^6 + 2x^4 - k_0x^5 = x^4\left(\frac{9}{4}x^2 - k_0x + 2\right),\\
Q_2(x) &= \frac{9}{4}x^6 + x^4 - k_0x^5 = x^4\left(\frac{9}{4}x^2 - k_0x + 1\right).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Все эти функции положительно определенные, если $0 < k_0 < 3$. Поэтому по теореме 10.4-2 из [8] имеем равновесие Нэша

$$
u^* = -\frac{3}{2}x^3, \quad v_2^* = -x^2,
\tag{14}
$$

найденное по формулам (9).

2. **Игра с нулевой суммой.** Равновесия Нэша

$$
J(x(0),u^*,v) \le J(x(0),u^*,v^*) \le J(x(0),u,v^*),\ \forall u,v,
$$

для игры с нулевой суммой для уравнения

$$
\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)u + k(x)v, \quad f(0) = 0,
$$

с функцией выигрыша/проигрыша

$$J(x(0),u,v) = \int_0^{+\infty} [h^2(x) + Ru^2 - \gamma v^2]dt,$$

$$h^2(x) \geq 0,\ \ R, \gamma > 0,$$

исследуются в [7, 8]. Решение игры будет найдено, если будет найдено положительно определенное решение $V(x) > 0$ нелинейного уравнения Гамильтона-Якоби-Айзекса

$$h^2 + V'_x \cdot f(x) - \frac{1}{4R}(V'_x)^2[g(x)]^2 + \frac{1}{4\gamma^2}(V'_x)^2[k(x)]^2 = 0,$$

$$V(0) = 0,$$

при двух еще дополнительных условиях [8, Theorem 10.2-2]. Однако сделать это крайне сложно.

Равновесия, являющиеся позиционными управлениями, в таком случае задаются формулами:

$$u^* = u(V(x)) = -\frac{1}{2R}g(x)V'_x,$$

$$v^* = v(V(x)) = \frac{1}{2\gamma^2}k(x)V'_x.$$

В нашем случае при $k_{\text{ÂÔÐ}} = 0$

$$h^2 + V'_x \cdot k_0 x^4 - \frac{9}{4R}(V'_x)^2 x^4 + \frac{1}{\gamma^2}(V'_x)^2 x^2 = 0. \tag{15}$$

К сожалению, нам не удалось найти положительно определенного решения $V(x) > 0$ уравнения (15) (для $h(x) \geq 0, h(0) = 0$)). Похоже, решения игры с нулевой суммой в форме равновесия не существует. Впрочем, в какой-то мере, так и должно быть, поскольку нулевая сумма говорит нам, что выигрыш экологов в точность есть проигрыш чиновников. Вряд ли так должно быть в правовом обществе. Более естественной в данном случае является игра с ненулевой суммой, а для нее равновесие было найдено.

2.3. Модель уровня доверия населения к власти

Уравнение (4) можно использовать для описания такого чисто социального являния, как доверие населения к власти[1].

При этом долговременно действующий вредоносный фактор $k_{\text{ÂÔÐ}}$ – это экономическая ситуация в регионе (уровень зарплаты, безработица, дороговизна питания и т.д.). Сам фактор, конечно следует переименовать: неблагопоучная экономическая ситуация – $k_{\text{ÍÝÑ}}$.

Вместо управляемого фактора «наличие неблагоприятной медико-санитарной ситуации в регионе» $v < 0$ следует рассматривать *ошибки правящей в регионе элиты*, такие, как произвол полиции, коррупция чиновника, полохие дороги и пр. Обозначение v для данного управления сохраняем.

Наконец, вместо управляемого фактора u – «принятие мер по преодолению неблагополучной медико-санитарной ситуации (лечение)» -- вводим другой управляемый фактор, означающий *действия оппозиции как политической и различных общественных организаций*. Обозначение u для данного управления сохраняем.

Для описания динамики *уровня доверия населения к власти* $x(t)$ естественно рассмотреть аналог уравнения (4):

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} W(x,u,v), \tag{16}$$

где

$$W(x,u,v) = V(x,u,v,k_{\text{ÍÝÑ}}), \quad {}_{\text{ÍÝÑ}} < 0.$$

Мы можем теперь, опираясь на данное уравнение, пытаться отыскать оптимальные стратегии для следующей задачи минимакса

$$\min_{v(t)} \max_{u(t)} x(T)$$

или максимина

$$\max_{u(t)} \min_{v(t)} x(T).$$

---

[1]Нетрудно убедиться, что вывод этого уравнения в данном случае повторяет вывод уравнения в случае экологии человека (см. [1, 2]).

Однако для социологии особое значение имеет выявление копромисных ситуаций, когда противоборствующие строны начинают учитывать интересы друг друга. В теории игр компромисы – это равновесия Нэша.

Результат, полученный в § 2.2.2, позволяет заявить, задача определения уровня доверия населения к власти в случае отсутствия неблагопоучной экономической ситуации – $k_{\text{ÍÝÑ}} = 0$ и рассматриваемая как дифференциальная игра с ненулевой суммой, допускает равновесия Нэша (7) в форме позиционного управления (14) с пригрышными/выигрышными функциями (12),(13) .

Литература по разделу 2

[1] Гуц А.К., Володченкова Л.А. Катастрофы типа «ласточкин хвост» в экологии человека // Математические структуры и моделирование. 2009. Вып.19. С.68-77.

[2] Гуц А.К., Володченкова Л.А. Кибернетика катастроф лесных экосистем. Омск: Изд-во КАН, 2012. 220с.

[3] Пацюков В.П. Дифференциальные игры при различном информировании игроков. М.: Советское радио, 1976. 200 с.

[4] Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 489 с.

[5] Yong J. Differential games: a concise introduction. University of Central Florida, 2015.

[6] Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. Дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. М.: Советское радио, 1980. 304 с.

[7] Vamvoudakis K.G., Lewis F.L. Online solution of nonlinear two-player zero-sum games using synchronous policy iteration // Int. J. Robust and Nonlinear Control. 2012. V. 22. P. 1460–1483.

[8] Lewis F.L., Vrabie D.L., Syrmos V.L. Optimal Control. John Wiley & Sons, Inc., 2012. URL:http://www.uta.edu/utari/acs/FL%20talks/CDC%20Orlando%202011-%20online%20synch%20PI.pdf

[9] Тынянский Н.Т., Жуковский В.И. Дифференциальные игры с ненулевой суммой (кооперативный вариант) // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. 1979. Т. 17. С. 3–112.

3. КВАНТОВЫЙ ПОДХОД К ОПИСАНИЮ СОЦИАЛЬНОЙ СТАТИКИ И СОЦИАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ ОГЮСТА КОНТА

Социология как наука появилась первоначально под названием «социальная физика». И дело здесь в том, что Огюст Конт хотел строить общую теорию общества, т. е. исследование тех законов, которыми управляются явления общественной жизни [1, с.4], подобно тому, как это делалось в естествознании и физике, в частности. Успехи естествознания были связаны с тем, что оно ограничило себя одним миром явлений, не задаваясь разрешением вопроса о лежащей в их основе свехчувственной сущности. Мир же явлений оно изучает путем опыта и наблюдений [1, с.5].

Конт свою социологию, свою социальную физику разделил на статику и динамику. Образцом статики были такие дисциплины как политика, юриспруденция, политическая экономика – они имели своим предметом общество, как нечто раз и навсегда данное, а не постоянно развивающееся. Тогда же его современники использовали уже «понятие процесс общественного развития», и это привело Конта к констатации наличия социальной динамики [1, с.7].

Однако, если социальная статика – это выявления закономерностей в обществе как всегда самому себе равного предмета, и это породило представление об общественном порядке, лежащем в основе общественного бытия [1, с.7], т. е. идея социальной статики шла от дисциплин практичных, прагматичных, устоявшихся, прослеживаемых во всех исторических эпохах, и определяющих стабильный общественный быт, то представление о социальной динамике было навеяно Конту философией истории, которуя следует отнести к дисциплинам спекулятивным, метафизичным, так или иначе предполагающих существование свехчувственной сущности, именуемой часто *течением объективного времени*.

Социальная статика – это теория социальной анатомии, теория социального равновесия. Социальная динамика выясняет вопросы общественного развития. Статические законы выявляют взаимодействия между одновременными явлениями; динамические – между последовательными, не принимая во внимания для последних, наличие или отсутствие причинно-следственных связей [1, с.17--18].

В данной статье мы попытались найти математический аппарат, который равным образом объединял в себя как социальную статику, так и социальную динамику, но при этом основывался на вероятностных, недерминистких характеристиках социальных явлений.

3.1. Социальная статика. Исторические эпохи

3.1.1. Уравнения социальной статики

Общественная жизнь наблюдается нами *в изменениях* и в окружении Внешего мира, называемого Природой, или Вселенной. Мы не можем отрывать людей от этого окружения и поэтому должны сказать, что общество существует в *пространстве-времени*.

Следовательно, для единого описания общества и Природы надо воспользоваться в духе Конта естественнонаучным подходом. Нам надо породить и пространство-время M^4 и общественное бытие в нем. Точнее, бытие в 3-мерном пространстве, в котором «течет время», идут изменения, текут общественные процессы. Воспользуемся квантовой теорией.

Пространство-время Вселенной M^4 в квантовой космологии Уилера-ДеВитта появляется как интерференция когерентной квантовой суперпозиции, или волнового пакета:

$$\Psi[{}^{(4)}G, \mu, B, e, \sigma, \nu] = \int_K c_k \Psi_k[{}^{(3)}G, \mu, B, e, \sigma, \nu] dk, \quad c_i \in C, \tag{1}$$

где $\Psi_k[{}^{(3)}G]$ – частная волновая функция, являющаяся функционалом от 3-мерной римановой геометрии ${}^{(3)}G = (M^3, h_{\alpha\beta})$ и удовлетворяющая функциональному уравнению ДеВитта-Уилера [2].

$$\left[G_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\delta}{\delta h_{\alpha\beta}} \frac{\delta}{\delta h_{\gamma\delta}} + \sqrt{h}^{(3)}R + E(h_{\alpha\beta}, \mu, B, e, \sigma, \nu)\right]\Psi[{}^{(3)}G, \mu, B, e, \sigma, \nu] = 0, \tag{2}$$

где $E(h_{\alpha\beta}, \mu, B, e, \sigma, \nu)$ – член, учитывающий вклад материальных источников μ, окружающей среды (природы) B и социальных полей e, σ и ν.

К этому уравнению нужно добавить уравнения для материальных источников μ, окружающей среды (природы) B и полей e (этносфера), σ (социосфера) и ν (ноосфера) [3].

Мы видим, что то, что считается Реальностью, существующей в *форме* четырехмерного непрерывного континуума M^4 и называемого пространством-временем, в действительности является существенно квантовой сущностью, т.е. цепью интерференционных <<горных пиков>> по выражению Halliwell'a [4] в суперпространстве Уилера. В двумерной модели, к примеру, волновая функция $\Psi[^{(4)}G,\mu,B,e,\sigma,\nu]$ будет состоять из резко взметнувшихся горных пиков в минисуперпространстве вдоль единственной классической траектории (пространства-времени).

Как правило, не обсуждается смысл системы Ω, описываемой посредством волнового пакета (1), и ее состояний $\Omega_k,\ k\in K,$ для которых находятся соответствуюшие волновые функции $\Psi_k[^{(3)}G,\mu,B,e,\sigma,\nu]$.

Очевидно, что Ω – это Внешний мир, Квантовая реальность, а ее состояния Ω_k – это формы ее существования, которые в соответсвии с принципами квантовой механики в процессе, именуемом в квантовой механике *наблюдением* (измерением), локализуются. Квантовая механика, а значит описываемая ею Квантовая реальность, не могут обойтись без сознающих личностей, называемых физиками *наблюдателями*. *Наблюдение* системы Ω приводит к *коллапсу* волнового пакета (1):

$$\int_K c_k\Psi_k[^{(3)}G,\mu,B,e,\sigma,\nu]d\mu(k)\to\Psi_{k'}[^{(3)}G,\mu,B,e,\sigma,\nu] \qquad (3)$$

с вероятностью $|c_{k'}|^2$.

Наблюдения Вселенной людьми, живущими в конкретное время, в своей эпохе, переводят Вселенную в наблюдаемое состояние Ω_k. Какой смысл несут состояния Ω_k? Вполне предсказуемый – они задают социальную статику. Иначе говоря, определяют статичное неизменяемое общественное бытие.

3.1.2. Исторические эпохи

Примем, что каждое состояние Ω_k квантовой реальности Ω – это 3-мерный мир, в котором практически ничего не меняется; он вневременен. В этом мире находится *наблюдатель*, способный осуществлять измерения реальности, точнее, ее пространственной геометрии. Иначе говоря, Ω_k – это стационарное пространство-время M_k^4, в котором осуществляется «замороженное» историческое общественное бытие. Историки такое существования называют историческими эпохами. Гёте и Шпенглер использовали термин «гештальт» [5, 6].

Каждая историческая эпоха, такая как Античность, Средневековье, Ворождение и пр., видится историками как *ограниченная* во времени форма существования человечества.

Историческая эпоха – наиболее крупная единица исторического времени, обозначающая длительный период человеческой истории, отличающийся определенной внутренней связностью и только ему присущим уровнем развития материальной и духовной культуры ... Переход от одной эпохи к другой представляет собой переворот во всех сферах социальной жизни [Философский словарь].

Конечность исторической эпохи автоматически означает ее сменяемость, а значит дает возможность все исторические эпохи разместить одну за другой, **последовательно** в одном пространственно-временном лоренцевом многообразии. В этом отражена западная культурная традиция видить Мир изменяющейся сущностью, эволюционирующей в физическом времени t.

Ну..., а вдруг исторические эрохи не конечны во времени? И если не пытаться их втолкнуть в одно пространство-время, полагая, что ее бесконечность во времени проявляется всего лишь в форме редких, но устойчивых «пережитков» прошлого? В таком случае, очевидным становится, что сильно доминирующие нередкие «пережитки» прошлого будут заполнять все будущее, разрущая идею сменяемости исторических эпох, идею эволюционирующей реальности.

Как спасти идею последовательной сменяемости исторических эпох, идею эволюционирующей реальности, не пренебрегая при этом условием бесконечности статичного существования во времени каждой исторической эпохи?

Очевидно, для этого надо использовать не классическую теорию, а квантовую, и тогда эволюционирующий Мир появляется как интерференция исторических эпох, как последовательность «горных пиков», в высоту каждого их которых вносит вкдад каждая историческая эпоха, как квантовый волновой пакет исторических эпох в форме (1). Удивительно, но при этом все исторические эпохи *существуют одновременно*.

3.2. Социальная динамика. Историческая последовательность

Как в предложенном фомализме реализуется идея социальной динамики?

Время, текущее в пространстве-времени M^4, появляется извне, искусственно. Его нет в квантовой космологии ДеВитта-Уилера [8].

Просто вдоль цепи «горных пиков», обозначающих классическую траекторию и являющуюся тем, что мы называем пространством-временем M^4, вводится искусственно расстояние между ними – воспринимаемое людьми как *физическое время* t. Поэтому имеем семейство 3-геометрий ${}^{(3)}G(t)$, или 3-метрик $h_{\alpha\beta}(x,t)$, удовлетворяющих уравнениям Эйнштейна [6]. Интересно, что 3-геометрия каждой исторической эпохи, формирующей «цепь горных пиков», совершенно однозначно находит свое место в качестве пространственного сечения пространства-времени и время t указывает место локализации этой 3-геометрии в 4-геометрии. В этом смысле, как пишет Уилер, «3-геометрия выступает как «носитель временной информации» [2, с.37].

3.2.1. Уравнение, описывающее социальную динамику

Таким образом, наблюдается динамика, как 3-геометрии, так и общественной жизни. Найдем уравнение, описывающее социальную динамику.

Рассматривая волновую функцию

$$\Psi[h_{\alpha\beta}(x,t),\mu,B,e,\sigma,\nu] = \Psi[{}^{(3)}G(t),\mu,B,e,\sigma,\nu]$$

и полагая

$$\Psi[h_{\alpha\beta}(x,t),\mu,B,e,\sigma,\nu] = \psi[h_{\alpha\beta}(x,t)]e^{im_P S[h_{\alpha\beta}(x,t),\mu,B,e,\sigma,\nu]}, \qquad (4)$$

$$\psi(t) = \psi[h_{\alpha\beta}(x,t),\mu,B,e,\sigma,\nu],$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = \int \dot{h}_{\alpha\beta}(x,t)\frac{\delta}{\delta h_{\alpha\beta}(x,t)}\psi[h_{\alpha\beta}(x,t),\mu,B,e,\sigma,\nu]d^3x,$$

где $S[h_{\alpha\beta},\mu,B,e,\sigma,\nu]$ – решения уравнения Гамильтона-Якоби, m_P – масса Планка, и

$$\dot{h}_{\alpha\beta} = NG_{\alpha\beta\gamma\delta}S[h_{\gamma\delta}, \mu, B, e, \sigma, \nu] + 2D_{(\alpha}N_{\beta)}$$

находим, что вдоль пространства-времени, т. е. вдоль цепи «горных пиков» справедливо уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = H_{mat}\psi(t), (5)$$

где H_{mat} – гамильтониан материальных полей (подробности см. [7, p.172]).

Заметим, что социальная динамика, поскольку она описывается уравнением Шредингера, является *вероятностной*. Мы естественным образом отошли от классического детерминизма, и это позволяет учитывать человеческую непредсказуемость.

В формула (4) – это формализм так называемого полуклассического приближения, позволяющего получить ураавнение Гамильтона-Якоби и реализовать идею получения классического пространства-времени как «цепи горных пиков», т. е. как результат интерференции. В случае космологии обычно считается, что все эти расчеты относятся к раннему этапу развития Вселенной, когда она имела крайне малые размеры (отсюда число m_P в формуле (4)). Для социологии появление в теоретических рассуждениях таких выражений как «планковские константы», «ранние этапы существования Вселенной» не только недопустимо, но граничит с безответственными спекуляциями. Но в действительности эти расчеты относятся к этапам созидания пространства и времени как наличного бытия из чистого бытия, которое есть чистое ничто (см. подробности в [9, с.13]), происходящего *в малом повсеместно и всевременно*. А из множества малого складывается пространство исторической эпохи целиком вместе с его геометрией ${}^{(3)}G_k$. Сама же эта геометрия несет память о физическом времени исторической эпохи [2, с.37]. Просто, думая о людях, т. е. находясь в рамках социологии, надо забыть о теории Большого взрыва, и поставить во главу размышлений *потребность человека* в жизненном пространстве, а не заталкивать его, наравне с курами и коровами, в какой-то момент в возникшие независимо от него большие пространственные объемы. Другими словами, социология нуждается совсем в иной, новой космогонии [9], которая идет от человека, от сознания, а не от сингулярности и элементарных частиц, не нуждающихся в человеке (в сознании) миллиарды лет.

3.2.2. Почему наблюдаются изменения?

Благодаря наличию интерференционной картины – цепи «горных пиков», – существует классическое пространство-время, которое видится живущем в нем людям (наблюдателям) как «эволюционирующее», поскольку содержит вклады всех исторических эпох. Это видно в случае полуклассичекого приближении волнового пакета: если взять

$$\Psi_k[{}^{(3)}G,\mu,B,e,\sigma,\nu] = A_k e^{\frac{t}{\hbar}S_k[{}^{(3)}G,\mu,B,e,\sigma,\nu]},$$

то

$$\int\limits_K c_k \Psi_k[{}^{(3)}G,\mu,B,e,\sigma,\nu]d\mu(k) = \left(\int\limits_K c_k A_k d\mu(k)\right)e^{\frac{t}{\hbar}S_0}, (6)$$

где

$$\forall k(S_k({}^{(3)}G,\mu,B,e,\sigma,\nu) = S_0 = const)$$

– условие интерференции. Из (6) видно, как «горные пики» складываются из разных интерферирующих эпох. Благодаря этому, втиснутые в единое пространство-время, люди рассуждают о наблюдаемых сменах исторических эпох, помнят своих предков, раскапывают исторические артефакты и прочее. При этом каждый из этих людей принадлежит конкретной исторической эпохе Ω_k, поскольку состояниями квантовой системы Ω являются эпохи, а не интерференция в форме пространства-времени (цепи «горных приков»).

3.2.3. Динамика в смене статики

Цепь «горных пиков» называем *исторической последовательностью*. В ней течет время t, идут общественные процессы, есть все то, что присуще социальной динамике Огюста Конта, которая получает у него «характер не исследования законов, которыми управляется последовательность общественных явлений везде и всегда, а характер философского изображения действительных судеб человечества, т. е. может быть скорее названа философской историей, а не социологией» [1, с.21].

Статичное существование в рамках конкретной исторической эпохи возможно, но при условии отсутствия других исторических эпох, интерферирующих с данной. Поскольку мы фиксируем изменения, наблюдаем социальную динамику, то это говорит о том, что мы находимся в «цепи горных пиков», и, следовательно, пребываем в квантовой реальности, в квантовой суперпозиции. Во всяком случае, это говорит о том, что другие исторические эпохи существуют, и в принципе в них можно уйти [10], совершив какое-то особое их наблюдение, или как говорят физики, произведя некоторое измерение или даже всего лишь утвердившись в намерении совершить такие измерения.

Литература по разделу 3

[1] Каревъ Н. Введеніе въ изученіе соціологіи. – С.-Петербургъ, 1897.

[2] Уилер Дж. Предвидение Эйнштейна. М.: Мир, 1970.

[3] Гуц А.К., Паутова Л.А. Глобальная этносоциология. Изд.2, доп. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 236 с.

[4] Halliwell J.J. Introductiry lectures on quantum cosmology // In: Quantum cosmology and baby universes / Eds. S. Coleman, J.B. Hartle, T. Piian and S. Weinberg. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1991. P. 159–244.

[5] Гуц А.К. Многовариантная Вселенная и теория исторических последовательностей // Математические структуры и моделирование. 2012. № 25. С. 70–80.

[6] Гуц А.К. Физика реальности. Омск: Изд-во КАН, 2012. 424с.

[7] Kiefer C. Quantum Gravity. Second Edition. - Oxford University Press, 2007. 361p.

[8] Barbour J. The nature of time. URL: http://arxiv.org/pdf/0903.3489v1.pdf (2009).

[9] Гуц А.К. Метафизика теоретической истории // Метафизика (РУДН). 2015. №4 (18). С. 9–-30.

[10] Гуц А.К. Негёделевская машина времени // Математические структуры и моделирование. 2016. №.3 (39). С.47–55.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование продемонстрировало возможность использования в социологии таких разделов кибернетики, как интуиционистская математическая логика, дифференциальные игры и методы квантовой кибернетики.

Изложенные в разделе 1 выкладки, проделанные в дифференциальном исчислении, основанном на интуиционистской логике, более соответсвующей логике описания социальных явлений, а конкретно – к оценкам роста населения, позволяют исследовать как рост населения, так и стационарные равновесия при допущении возможных изменений скорости роста населения посредством введения параметра μ одновременно с учетом ошибок социологических измерений, как исходных констант, характеризующих динамику народонаселения, так и того, что принимается за равновесные состояния при описании численности населения.

В разделе 2 мы продемонстрировали возможности теории дифференциальных игр, основанной на совмещении идей теории дифференциальных уравнений и теории игр. Главным здесь является нахождение социальных равновесий.

В разделе 3 мы показали, как идеи квантовой механики и космологии можно использовать для описания социальной реальности как ее видел создатель социологии Огюст Конт.

Конт спрашивал: «Если статический анализ нашего общественного организма показывает, что в конце концов по всей необходимости он покоится на некоторой системе основных мнений, то каким образом постепенные изменения такой системы могли бы не оказывать преобладающего влияния на последовательные изменения, какие представляет собой непрерывная жизнь человечества?» (цит. по [1, с.22] из раздела 3).

Предложенный в разделее квантовый подход к социологии дает такой ответ на этот вопрос: изменения внутри статичной исторической эпохи не оказывают влияние на динамику непрерывной жизни людей, но последовательные изменения в этой жизни происходят в силу того, что существуют другие отличные исторические эпохи, которые вносят свой вклад в историческую последовательность через квантовую интерференцию.

Результаты, изложенне в отчете, были опубликованы в статья:

Гуц А.К. Динамика социальной системы и интуиционистская логика // Математические структуры и моделирование. 2016. №.2 (38). С.72-77.

Гуц А.К., Володченкова Л.А. Дифференциальные игры в экологии человека и в социологии // Математические структуры и моделирование. 2016. №.3 (39). С.110-118.

Гуц А.К. Квантовый подход к описанию социальной статики и социальной динамики Огюста Конта // Математические структуры и моделирование. 2016. №.4 (40). С.65-71.