АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

И

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА

Задания и методические указания
для студентов 1 курса математического факультета

Омск
1992

Аналитическая геометрия и геометрическая алгебра: Задания и методические указания для студентов 1 курса математического факультета / Сост. А.К.Гуц. Омск: Омск. ун-т, 1992. 36 с.

Подписано в печать 9.12.92. Формат бумаги 60x84 1/16. Оперативный способ печати. Печ.л. 2,25. Уч.-изд. л. 2,0 Тираж 200 экз. Бесплатно. Заказ 108.

Читая курс лекций по аналической геометрии, преподаватель обычно поясняет, что элементарная геометрия и планиметрия в частности, в основе своей исходят из идеи Рене Декарта о введении координат, то есть пары вещественных чисел x, y, однозначно характеризующей точку на евклидовой плоскости.

Согласно Декарту, любой плоской фигуре F ставится в соответствие алгебраическое уравнение

$$f(x,y) = 0 \qquad (1)$$

относительно предварительно введенных на плоскости координат. После этого геометрическая задача,касающаяся фигуры F, решается путем аналитических преобразований уравнения (1) с последующей геометрической "расшифровкой" полученного результата.

Успех аналитико-алгебраического метода Декарта в решении ряда задач евклидовой геометрии вызвал естественное стремление применить его к изучению проблем других геометрий, задаваемых аксиоматически и исследуемых синтетическими методами.

В данных методических указаниях показано, как вводятся координаты в дезарговых плоскостях. При этом координаты x, y и коэффициенты уравнения (1) являются в общем случае не вещественными числами, а элементами некоторого тела.

При подготовке указаний использовалась замечательная книга Гольдблатта [1], а также монографии [2,3].

Тема 1

Аффинная плоскость.
Плоскости Дезарга, Паппа и Фано

В этом разделе показано, как аксиоматически задается аффинная плоскость. Ее исходными, не подлежащими определению понятиями являются точки и прямые. Аксиомы описывают отношения между точками и прямыми.

Среди всех аффинных плоскостей выделяются плоскости, удовлетворяющие дополнительным условиям. Это либо свойство Дезарга, либо свойство Паппа. Именно плоскости Дезарга позволяют использовать для их изучения координаты, принадлежащие некоторому телу. Для плоскостей Паппа возможно введение координат, являющихся элементами поля.

Определение I.I. Структура инцидентности - это тройка $\alpha = \langle \mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{I} \rangle$, где

I) $\mathfrak{P}$ - множество, его элементы называются *точками*;

2) $\mathfrak{L}$ - множество, отличное от $\mathfrak{P}$ (не пересекающееся с $\mathfrak{P}$), его элементы называются *прямыми*;

3) $\mathfrak{I}$ - бинарное отношение, $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{P} \times \mathfrak{L}$.

Если $a\mathfrak{I}L$, где $a \in \mathfrak{P}$, $L \in \mathfrak{L}$, то говорят, что a инцидентна L, или, что a лежит на L, или, что L проходит через a.

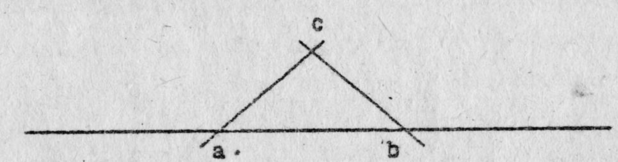
Прямые L,M *параллельны*, что обозначается как $L \parallel M$, если либо $L = M$, либо нет такой точки, которая лежит на L и на M.

Множество прямых, для которых существует единственная, лежащая на них точка, называется *пучком* прямых. Множество точек A называется *коллинеарным* , если существует единственная прямая, проходящая через каждую точку $a \in A$.

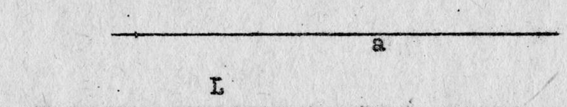
Определение I.2. Аффинная плоскость - это структура инцидентности α, удовлетворяющая аксиомам:

AI. Через любые две различные точки проходит одна и только одна прямая;

A2. Существуют, по крайней мере, три точки, не лежащие на одной прямой;



A3. Для данных точки a и прямой L существует одна и только одна прямая M, проходящая через a и параллельная L.

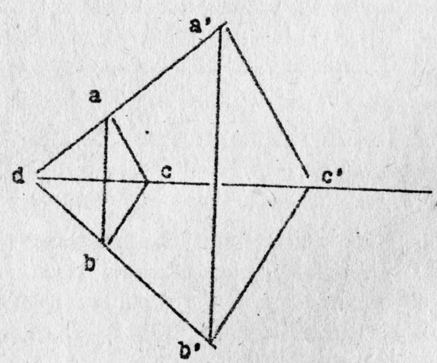


Определение I.3. Две структуры инцидентности $\alpha = \langle \mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{I} \rangle$ и $\alpha' = \langle \mathfrak{P}', \mathfrak{L}', \mathfrak{I}' \rangle$ называются изоморфными, если существует биекция $f: \mathfrak{P} \longrightarrow \mathfrak{P}'$ такая, что f и f^{-1} коллинеарные множества точек отображают на коллинеарные. Используем обозначение для изоморфизма $f: \alpha \cong \alpha'$.

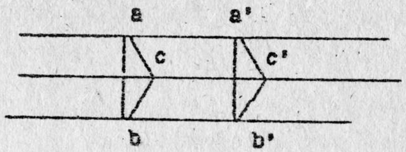
Комментарий I.I. Для структуры инцидентности $\alpha = \langle \mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{T} \rangle$ можно построить структуру инцидентности $\hat{\alpha} = \langle \mathfrak{P}, \hat{\mathfrak{L}}, \in \rangle$, где $\hat{\mathfrak{L}} = \{\hat{L} : L \in \mathfrak{L}\}$, $\hat{L} = \{a \in \mathfrak{P} : a \,\mathfrak{T}\, L\}$, а $\in$ – отношение принадлежности. Тогда тождественное отображение $id : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}$, $id(a) = a$ для любой $a \in \mathfrak{P}$, определяют изоморфизм α и $\hat{\alpha}$. Сказанное позволяет в дальнейшем отождествлять α и $\hat{\alpha}$.

Имея в виду это отождествление, можно сказать, что две плоскости α, α' изоморфны, если биекция $f : \mathfrak{P} \to \mathfrak{P}'$ отображает прямые на прямые и обратно.

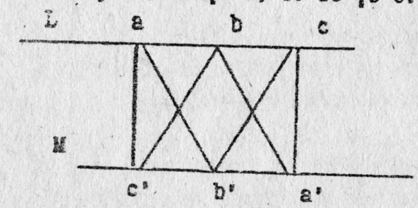
Определение I.4. Аффинная плоскость α называется *дезарговой*, если выполняется свойство Дезарга: для любых двух треугольников (т.е. неколлинеарных троек точек) abc и $a'b'c'$ таких, что прямые aa', bb' и cc' образуют пучок и $ab \parallel a'b'$, $ac \parallel a'c'$ справедливо соотношение $bc \parallel b'c'$.



Из свойства Дезарга вытекает малое свойство Дезарга: если abc, $a'b'c'$ два треугольника такие, что $aa' \parallel bb' \parallel cc'$ и $ab \parallel a'b'$, $ac \parallel a'c'$, то $bc \parallel b'c'$.



Говорят, что для прямых L,M выполняется свойство Паппа, если для любых точек $a, b, c \in L$ и $a', b', c' \in M$ справедливы соотношения $ab' \parallel a'b$, $ac' \parallel a'c$, то $bc' \parallel b'c$.



Определение I.5. Аффинная плоскость α называется *папповой*, если свойство Паппа выполняется для каждой пары прямых.

Аффинная плоскость над телом D – это структура инцидентности $\alpha_D = \langle \mathfrak{P}_D, \mathfrak{L}_D, \mathfrak{T}_D \rangle$, где

I) $\mathfrak{P}_D = D \times D$;

2) $\mathfrak{L}_D$ – множество прямых, причем прямая – это тройка $(l, m, n) \in D \times D \times D$ такая, что либо $l \neq 0$, либо $m \neq 0$;

3) $(x, y) \mathfrak{T} (l, m, n)$, то есть точка (x, y) инцидентна прямой (l, m, n) только в том случае, когда

$$l\,x + m\,y + n = 0. \tag{1}$$

Если D есть поле F, то пишем α_F.

Точки плоскости α_D обозначаем как $\bar{a}$ или $\bar{a} = (x, y)$.

Нетрудно понять, используя уравнения (I), что прямая задается либо уравнением вида $x = c$, либо $y = s\,x + c$. Число s называют *угловым коэффициентом прямой*.

Так как $\mathfrak{P}_F = F \times F$, то $\mathfrak{P}_F$ является векторным пространством над F. Неслучайно для точек α используем векторное обозначение $\bar{a}$ или $\bar{a} = (x,y)$. С помощью операций сложения и умножения на числа из F векторов пространства $\mathfrak{P}_F$ прямую $L \in \mathfrak{L}_F$ можно представить как множество точек

$$L = \{\bar{a} + \lambda \bar{b} : \lambda \in F\}$$

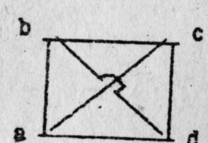
(см.комментарий I.I.). В этом случае вектор $\bar{b}$ называют *направляющим вектором прямой* L.

Теорема I.I. (теорема о координации).
Дезаргова плоскость изоморфна плоскости α_D, где D - тело, а Паппова плоскость изоморфна плоскости α_F, где F - поле.

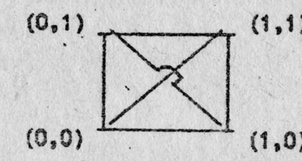
Комментарий I.2. Таким образом, прямые на дезарговых и папповых плоскостях в координатах задаются с помощью уравнений вида (I). Геометрия сведена к алгебре!

Путь геометрической алгебре открыт!

Определение I.6. Аффинная плоскость называется *плоскостью Фано*, если в каждом параллелограмме abcd (-четыре различные точки такие, что ab‖cd, ad‖bc) диагонали параллельны.



Пример I.I. Плоскость α_{Z_2}, где Z_2 - поле вычетов порядка 2, является плоскостью Фано. Она конечна, у нее всего четыре точки (0,0), (0,I), (I,0), (I,I), образующие параллелограмм с параллельными диагоналями (0,0)(I,I) и (0,I)(I,0).



З А Д А Ч И

(I.I) Если прямые L, M различны и не параллельны, то L и M проходят только через одну общую точку, обозначенную как $L \cap M$. Такие прямые называются *пересекающимися*.

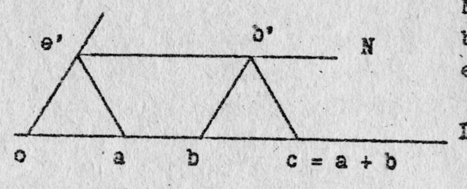
(I.2) Аффинная плоскость α_D над телом D является дезарговой, которая будет папповой в том и только в том случае, когда D есть поле F.

(I.3) (*Теорема Гессенберга*). Паппова плоскость α является всегда дезарговой.

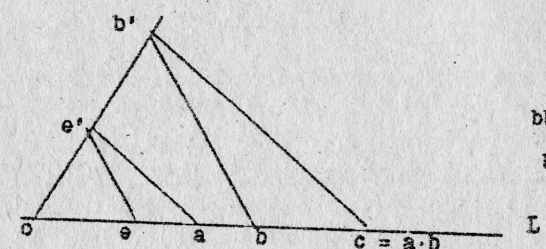
(I.4) Дезаргова плоскость, состоящая из конечного числа точек, является папповой.

(I.5) Пусть на дезарговой плоскости α даны две пересекающиеся в точке O прямые L, M и фиксированы точки $e \in L$, $e' \in M$,

$e \neq 0$, $e' \neq 0$. На прямой L можно ввести операции сложения (+) и умножения ($\cdot$) ее точек (см. рисунки):



$N \parallel L$
$bb' \parallel oe'$
$e'a \parallel b'c$



$bb' \parallel ee'$
$b'c \parallel ae'$

Доказать, что L с операциями (+), ($\cdot$), "нулем" - точкой o и "единицей" - точкой e превращается в тело D.

(1.6) (*Теорема о координации*). Доказать, что дезаргова плоскость $\alpha = \langle \mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{T} \rangle$ изоморфна аффинной плоскости α_D над телом D. Тем самым в α вводятся координаты

$$f: \alpha \cong \alpha_D,$$

$$\mathfrak{P} \ni a \xrightarrow{f} \bar{a} = (x,y) \in \mathfrak{P}_D,$$

в которых каждая прямая $L \in \mathfrak{L}$ задается уравнением

$$l \cdot x + m \cdot y + n = 0,$$

где либо $l \neq 0$, либо $m \neq 0$.

(1.7) Доказать, что паппова плоскость α изоморфна аффинной плоскости α_F над полем F (Д. Гильберт).

(1.8) Для плоскости α_F следующие два утверждения эквивалентны:

1) каждый параллелограмм имеет параллельные диагонали;
2) существует параллелограмм с параллельными диагоналями.

(1.9) Плоскость α_F фанова тогда и только тогда, когда характеристика поля F равна 2.

(1.10) Существует плоскость Фано с 2^{n+1} точками, где $n>0$.

(1.11) Показать, что биекция двух аффинных плоскостей α_F и α'_F вида $f: (x,y) \longrightarrow (x',y')$,

$$x' = f(x,y) = \alpha x + \beta y + \mu,$$
$$y' = f(x,y) = \gamma x + \delta y + \nu,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu, \nu \in F$, $\alpha\delta \neq \gamma\delta$, есть изоморфизм аффинных плоскостей α_F и α'_F. Справедливо и обратное (- теорема Дарбу, см. [3, с.116]).

Тема 2

Метрические плоскости. Плоскости Робба, Артина и Лоренца

Целью этой темы является введение в аффинные плоскости понятия перпендикулярных прямых. При этом нет никаких углов: перпендикулрность вводится аксиоматически. В аксиомы закладываются известные свойства перпендикуляров еклидовой планиметрии.

Слово "перпендикулярный" заменяется на слово "ортогональный". В результате появляется новый объект - метрическая плоскость!

Пусть α - аффинная плоскость, и   - бинарное отношение на множестве прямых. Прямая L называется *несингулярной*, если отношение $L \perp M$ не выполняется для любой прямой M.

Определение 2.1. Метрическая плоскость - это аффинная плоскость $\alpha = \langle \mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{I} \rangle$, для которой на множестве прямых $\mathfrak{L}$ задано бинарное отношение $\perp$, удовлетворяющее аксиомам:

O1. $L \perp M$ влечет $M \perp L$.

O2. Если L - несингулярная прямая, тогда через каждую точку a проходит единственная прямая M такая, что $M \perp L$.

O3. Если a,b,c,d - четыре различные точки, и $ab \perp cd$, $ac \perp bd$, то $ad \perp bc$.

Прямая M, о которой говорится в O2, называется *перпендикуляром к L через точку* a.

Метрическую плоскость обозначаем часто через $\langle \alpha, \perp \rangle$.

Отношение $L \perp M$ читается как "L ортогональна M".

Прямая L- *сингулярная*, если $L \perp M$ справедливо для любой прямой $M \in \mathfrak{L}$. Прямая L - *изотропная*, если верно, что $L \perp L$, в противном L неизотропная .

Метрическая плоскость называется *нулевой*, если каждая ее прямая является сингулярной. *Сингулярная плоскость* - это не нулевая плоскость, обладающая хотя бы одной сингулярной прямой; в противном плоскость называется *несингулярной*. Если $\langle \alpha, \perp \rangle$ - несингулярная плоскость, но имеет хотя бы одну изотропную прямую, то это *изотропная плоскость*. Не изотропная плоскость называется *анизотропной*.

Определение 2.2. Две метрические плоскости $\langle \alpha, \perp \rangle$ и $\langle \alpha', \perp' \rangle$ называются изоморфными, если существует изоморфизм $f\colon \alpha \cong \alpha'$ аффинных плоскостей α и α' такой, что для любых прямых L,M $L \perp M$ тогда и только тогда, когда $f(L) \perp f(M)$, где f(L) - обозначают (единственную) прямую, которая инцидентна каждой точке множества точек $\{f(a)\colon a \mathfrak{I} L\}$.

Пусть дана плоскость $\alpha_F = \langle \mathfrak{P}_F, \mathfrak{L}_F, \in \rangle$. Ее превращают в метрическую следующим образом. Внутреннее произведение на α_F - это отображение вида:

$$\bullet : \mathfrak{P}_F \times \mathfrak{P}_F \longrightarrow F,$$

удовлетворяющее условиям:

1) билинейности, то есть

$$\bar{a}\cdot(\lambda\bar{b} + \mu\bar{c}) = \lambda(\bar{a}\cdot\bar{b}) + \mu(\bar{a}\cdot\bar{c});$$

2) симметрии, то есть

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \bar{b}\cdot\bar{a}.$$

Пусть L - прямая на α_F. Она задается уравнением

$$l\cdot x + m\cdot y + n = 0,$$

где либо $l \neq 0$, либо $m \neq 0$.

Пусть L,M две прямые из α_F. Пишем $L \perp_{\bullet} M$ тогда и только тогда, когда для направляющих векторов $\bar{l}$ и $\bar{m}$ этих прямых соответственно справедливо равенство $\bar{l}\cdot\bar{m} = 0$. Нетрудно проверить, что $\langle \alpha_F, \perp_{\bullet} \rangle$ - метрическая плоскость.

Теорема 2.1. (Координация сингулярной плоскости). Пусть $\langle \alpha, \perp \rangle$ - паппова сингулярная плоскость. Тогда $\langle \alpha, \perp \rangle$ изоморфна сингулярной плоскости над полем F, то есть плоскости α_F, метризованной с помощью внутреннего произведения вида

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = (x_1, y_1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

где $\bar{a} = (x_1, y_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2)$.

Сингулярная плоскость над полем вещественных чисел R называется *плоскостью Робба.*

Теорема 2.2. (Координизация изотропной плоскости). Пусть $\langle \alpha, \iota \rangle$ – паппова изотропная нефанова плоскость. Тогда $\langle \alpha, \iota \rangle$ изоморфна *плоскости Артина над полем* F, то есть плоскости α_F, метризованной с помощью внутреннего произведения вида

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (x_1, y_1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

Плоскость Артина над R называется *плоскостью Лоренца* или *лоренцевой плоскостью.*

Теорема 2.3. Пусть char(F)= 2 и $\langle \alpha_F, \iota \rangle$ -изотропна. Тогда либо

I) существует в α_F пара пересекающихся ортогональных прямых и ι характеризуется внутренним произведением

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (x_1, y_1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то есть $\langle \alpha_F, \iota \rangle$-*фанова плоскость Артина*, либо

2) в α_F $L \perp M \Leftrightarrow L \parallel M$ и ι характеризуется внутренним произведением

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (x_1, y_1) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

то есть $\langle \alpha_F, \iota \rangle$ – *вырожденная плоскость Фано.*

Определение 2.3. Поле F называется *квадратичным*, если для любого $f \in F$ существует либо $\sqrt{f}$, либо $\sqrt{-f}$.

Теорема 2.4. Пусть F квадратичное поле. Анизотропная (она будет единственной) плоскость $\langle \alpha_F, \iota \rangle$ существует тогда и только тогда, когда $\sqrt{-1}$ не существует в F. Обратно, если $\sqrt{-1}$ в поле F не существует, и имеется самое большое одна анизотропная плоскость $\langle \alpha_F, \iota \rangle$, то F квадратично.

Теорема 2.5. Пусть поле F конечно. Тогда

I) если char(F)= 2, то не существует анизотропной плоскости $\langle \alpha_F, \iota \rangle$;

2) если $1 + 1 \neq 0$ в F, то существует в точности одна анизотропная плоскость $\langle \alpha_F, \iota \rangle$.

Анизотропная плоскость над R, то есть анизотропная плоскость $\langle \alpha_R, \iota \rangle$ – это плоскость Евклида, характеризуемая внутренним произведением

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (x_1, y_1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

ЗАДАЧИ

(2.I) Пусть L несингулярная прямая и $M \perp L$. Любая прямая $N \perp L$ тогда и только тогда, когда $N \parallel M$.

(2.2) Вывести из задачи (2.1) следующие три следствия:

1) пусть $M \parallel N$. Тогда M несингулярна тогда и только тогда, когда несингулярна N;
2) пусть L несингулярна и $M \perp L$. Тогда $M \parallel L$ тогда и только тогда, когда L изотропна;
3) пусть L несингулярная изотропная прямая и $M \parallel L$. Тогда $M \perp L$ и M изстропна.

(2.3) *Высота* в треугольнике abc - это перпендикуляр к стороне bc через вершину a. Если все три высоты в треугольнике пересекаются в одной общей точке, то говорим, что выполнено *свойство высот*.
Доказать, что если для структуры $\langle \alpha, \perp \rangle$ справедливы аксиомы О1, О2 и не существует сингулярных прямых, то аксиома О3 эквивалентна свойству высот.

(2.4) (*Теорема Шура*). Две ортогональные прямые на несингулярной плоскости обладают свойством Паппа.

(2.5) Несингулярная дезаргова плоскость, обладающая парой пересекающихся ортогональных прямых, является папповой.

(2.6) На сингулярной плоскости существует только одна сингулярная прямая, проходящая через произвольную точку. Все сингулярные прямые параллельны, прочие же прямые ортогональны этим и только этим сингулярным прямым.

(2.7) (Критерий нулевой плоскости). Метрическая аффинная плоскость является нулевой, если выполняется любое из указанных ниже условий:

1) существуют две пересекающиеся сингулярные прямые;
2) существует сингулярная прямая, пересекаемая изотропной;
3) существуют две пересекающиеся ортогональные изотропные прямые.

(2.8) Доказать, используя задачу (2.6), теорему 2.1.

(2.9) На несингулярной плоскости диагонали в изотропном параллелограмме ортогональны (параллелограмм $abcd$ называется *изотропным*, если его стороны являются изотропными прямыми).

(2.10) На сингулярной плоскости нет изотропных параллелограммов.

(2.11) Через любую точку на папповой нефановой изотропной плоскости проходит две и только две изотропные прямые.

(2.12) Доказать, используя задачи (2.2.), (2.9.), теорему 2.2.

(2.13) Проверить, что для α_F с char (F) = 2 внутренние произведения

$$\bar a \cdot \bar b = (x_1, y_1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix} = (x_1, y_1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}$$

и

$$\bar a * \bar b = (x_1, y_1)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}$$

не приводятся одно к другому никаким аффинным преобразованием вида

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta y \\ y' = \gamma x + \delta y \end{cases},$$

Отсюда вытекает, что такие преобразования не осуществляют изоморфизма метрических плоскостей $\langle \alpha_F, \perp\cdot \rangle$, $\langle \alpha_F, \perp^* \rangle$.

Тема 3

Характеризация трех вещественных метрических плоскостей среди упорядоченных плоскостей

Как среди различных метрических геометрий выделить планиметрию Евклида? Это делается с помощью введения дополнительных аксиом, описывающих отношение трех точек, которое означает, что из трех точек, лежащих на прямой, одна находится между двумя другими.

При таком подходе вместе с плоскостью Евклида выделяются еще две плоские геометрии: плоскость Лоренца и плоскость Робба, связанные со специальной теорией относительностью.

Тело D называется *упорядоченным*, если задано подмножество $P \subset D$, называемое порядком и удовлетворяющее условиям:

1) $P + P \subset P$;
2) $P \cdot P \subset P$;
3) для любого $x \in D$ справедливо одно и только одно из отношений: $x \in P$, $-x \in P$, $x = 0$.

Можно ввести обозначения: $x < y$ для отношения $y - x \in P$. В таком случае $P = \{x \in D : 0 < x\}$, и $0 < 1$.

Упорядоченное тело D называется *непрерывно упорядоченным*, если выполнена

АКСИОМА НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЕДЕКИНДА. Пусть существуют $A, B \subset D$ такие, что $A \cup B = D$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ и для любых $a \in A$ и $b \in B$ справедливо: $a < b$. Тогда найдется $x \in D$, для которого $a \leqslant x \leqslant b$ какие бы $a \in A$ и $b \in B$ не были взяты.

Здесь $y \leqslant z$ означает, что либо $y < z$, либо $y = z$.

Теорема 3.1. Непрерывно упорядоченное тело D изоморфно полю R, то есть существует биекция $f: D \longrightarrow R$ такая, что

$$x < y \iff f(x) < f(y).$$

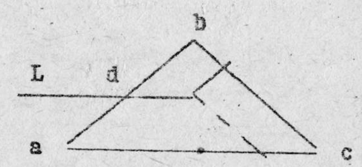
Пусть $\alpha = \langle \mathfrak{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{T} \rangle$ аффинная плоскость и B – тернарное отношение на α, точнее, $B \subset \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$. Отношение $B(x,y,z)$ будем читать как "y лежит между x и z". Введем в рассмотрение следующие аксиомы "между", обязанные своим происхождением Гильберту [4].

B1. Если $B(a,b,c)$, то a, b, c три различные коллинеарные точки с $B(c,b,a)$.

B2. Если $a \neq b$, то существует c с $B(a,b,c)$.

B3. Если a, b, c – три различные коллинеарные точки, то самое большое одна из них лежит между двумя другими.

B4. (*Закон Паша*). Если прямая L проходит между вершинами a и b треугольника Δabc, то есть существует такая d на ab с $B(a,d,b)$ и L не проходит через вершину c, то L проходит либо между a и c, либо между b и c.



Определение 3.1. Аффинная плоскость α, удовлетворяющая аксиомам B1 – B4, называется *упорядоченной*.

Пример 3.1. Если D-упорядоченное тело, то плоскость α_D можно превратить в упорядоченную, вводя следующим образом отношение "между" B в α_D. Для различных точек a, b, c справедливо $B(a,b,c)$ тогда и только тогда, когда

$$b = (1 - \lambda)a + \lambda c,$$

где $\lambda \in D$ и $0 < \lambda < 1$.

Ясно, что плоскость α_R является упорядоченной.

Определение 3.2. Две упорядоченные аффинные плоскости $\langle \alpha, B \rangle$ и $\langle \alpha', B' \rangle$ *изоморфны*, если существует изоморфизм аффинных плоскостей $f: \alpha \cong \alpha'$ такой, что

$$B(a,b,c) \iff B'(f(a),\ f(b),\ f(c)\ ).$$

Если α упорядоченная аффинная паппова плоскость, то $\alpha \cong \alpha_D$, где D – это точки некоторой прямой L (см.задачу (I.5), (I.6)). Отношение "между" B на α индуцирует порядок P в теле D следующим образом:

$$x \in P \overset{df}{\iff} B(0,x,e), \text{ или } B(0,e,x), \text{ или } x = e$$

(в обозначениях задачи (I.5)). Определенное таким образом подмножество $P \subset D$ задает порядок в D.

Теорема 3.2. Пусть α упорядоченная паппова плоскость. Тогда α изоморфна упорядоченной плоскости α_D, где D упорядоченное поле. При этом порядок в α_D задается с помощью порядка в D (см.пример 3.I).

Определение 3.3. Упорядоченная аффинная плоскость называется *непрерывно упорядоченной*, если выполняется следующая аксиома Дедекинда о непрерывности:

B5. Если точки прямой L разбиты на два подмножества A и B такие, что $L = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, и ни одна точка одного множества не лежит между точками другого множества, то существует точка c на L, для которой имеем $B(a,c,b)$ какие бы $a \in A$, $b \in B$, отличные от c, не брали.

Теорема 3.3. Пусть $\langle \alpha, \mathrm{I}, B \rangle$ – непрерывно упорядоченная дезаргова метрическая плоскость.

I) Если α анизотропная плоскость, то она изоморфна плоскости Евклида $\langle \alpha_R, \mathrm{I}\bullet \rangle$ с внутренним произведением, задаваемым матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

2) Если α-сингулярная плоскость, то она изоморфна плоскости Робба $\langle \alpha_R, \mathrm{I}\bullet \rangle$ с внутренним произведением

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

3) Если α изотропная, то она изоморфна плоскости Лоренца $\langle \alpha_R, \mathrm{I}\bullet \rangle$ с внутренним произведением

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

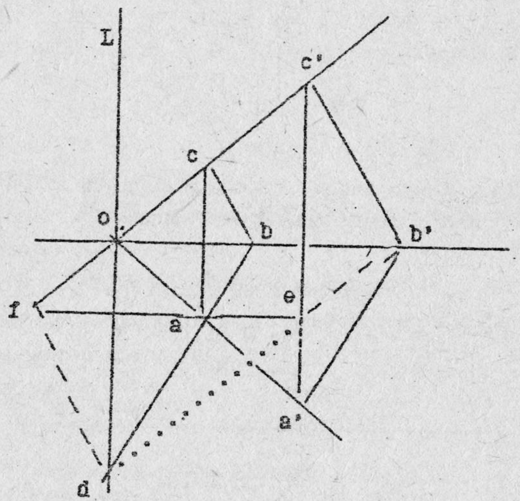
З А Д А Ч И

(3.I) Используя теорему 3.I и задачи (I.5),(I.6) доказать теорему 3.2.

(3.2) Используя теоремы I.I, 2.I, 3.I,2.2 и 2.4 доказать теорему 3.3.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

(I.3) Надо проверить выполнение свойства Дезарга (см. определение I.4). Рисуется чертеж ([3],с.200-20I)



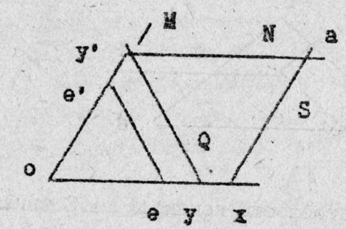
где прямые aa', bb', cc' - образуют пучок, проходящий через точку O, $ab \parallel a'b'$, $ac \parallel a'c'$. Далее на чертеже: $L \parallel ac$, L - строится, $d = L \cap ab$ (доказывается, что L и ab пересекаются), $e = a'c' \cap db'$ (доказывается, что $a'c'$ и db' пересекаются).

Применяя свойство Паппа к тройкам $d, e, b' \in db'$ и a', $o, a \in oa'$ (очевидно, $do \parallel ea'$, $da \parallel b'a'$), получают $ea \parallel b'o$. Отсюда следует, что ea пересекает oc в некоторой точке f и $fa \parallel ob$.
Применяя свойство Паппа к $o, c, f \in fc'$ и $a, d, b \in db$ (очевидно, $od \parallel ca$, $ob \parallel fa$), получают $cb \parallel fd$.
Применяя свойство Паппа к $o, c', f \in fc'$ и $e, d, b' \in db'$ (ясно, $od \parallel c'e$, $ob' \parallel ef$), получают $c'b' \parallel fd$.
Итак, $cb \parallel fd$ и $c'b' \parallel fd$. Значит, $cb \parallel c'b'$. Свойство Дезарга для треугольников abc и $a'b'c'$ доказано.

(I.4) см. ([2],с.I05,теорема 2.I9).

(I.5) Для введенных операций на L проверяются аксиомы тела. При этом делаются геометрические построения и используются свойства Дезарга.

(I.6) Используется задача (I.5). В ней прямые L,M - это оси координат, причем L - ось x, а M - ось y. Каждая точка $a \in \mathfrak{P}$ получает координаты (x,y) (см.рис.)

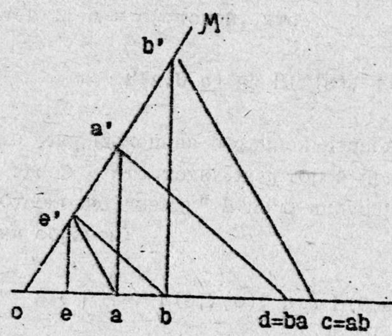


$S \parallel M$, $a\ N \parallel L$, $a \in N, S$,
$y' = N \cap L$,
$y' \in Q$, $Q \parallel ee'$,
$x = S \cap L$, $y = Q \cap L$

$$f\colon a \longrightarrow (x,y),$$

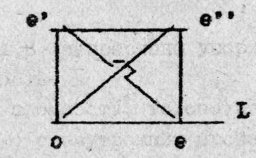
тогда $\quad f\colon \mathfrak{a} \cong \mathfrak{a}_b$.

(I.7) Используются задачи (I.5) и (I.6). Доказывается (Д.Гильберт), что операция умножения $\cdot$ на L коммутативна, если выполнено свойство Паппа. Для этого делается чертеж



на котором $bb' \parallel ee'$, $aa' \parallel ee'$, $cb' \parallel e'a$, $da' \parallel e'b$. Надо показать, что $d = c$. Для этого рассматривают тройки $e', a', b' \in M$ и $d, b, a \in L$. Так как ab построению $e'b \parallel da'$ и $a'a \parallel b'b$, то свойство Паппа для L, M дает $e'a \parallel b'd$. Но $e'a \parallel b'c$, поэтому $b'd \parallel b'c$, и значит, имея точку b' общей $b'd = b'c$. Следовательно, d лежит на L, то есть $d = c$.

(I.9) Используем определение операции сложения из задачи (I.5). Если на оси x (прямой L) имеется структура поля F с $char(F)=2$, то тогда $e + e = 0$. Отсюда следует в соответствии с рисунком, представляющим операцию + на L,



что прямая $e''(e + e) = e''0$ проводится параллельно $e'e$. Но это означает, что в параллелограмме $oee''e'$ диагонали ee' и $e''o$ параллельны. Обратно, если в параллелограмме $oee''e'$ диагонали ee' и oe'' параллельны, то $0 = e + e$ в соответствии с определением операции +. Значит $char(F)=2$.

(1.10) Известно, что для каждого положительного целого $n>0$ существует поле F с 2^n элементами и $char(F)=2$.

(2.1) Пусть $N \perp L$ и $N \neq M$. Если N не параллельна M, то $M \cap N = a$. Значит M и N два перпендикуляра к L через a. Противоречие с O2. Обратно, если $N \parallel M$, но N не перпендикулярна L, то берем $a \in N$ и перпендикуляр K к L через a. По доказанному $K \perp L \Longrightarrow K \parallel M$. Но $N \parallel M$ и $a = K \cap N$. Значит, $K = N$ по A3. Значит, $N \perp L$.

(2.3) O3 $\Longrightarrow$ свойство высот. Берут Δabd (точки все неколлинеарны). Пусть L – перпендикуляр к bd через a, а M – перпендикуляр к ab через d. Доказывается, что L, M пересекаются в точке c. Если не пересекаются, то $L \parallel M$. Но $L \perp bd$. Значит по (2.I) $bd \perp M$. Однако $M \perp ab$. Значит ab и bd – два разных перпендикуляра к M через b. Противоречие с O2.

Если $c \neq a, b, d$, то O3 примененная к рис.I дает $ad \perp bc$, то есть bc третий перпендикуляр. Свойство высот доказано. Если $a = c$, то анализируют ситуацию на рис.2, а при $c = d$ – ситуацию на рис.3, $c = b$ – рис.4.

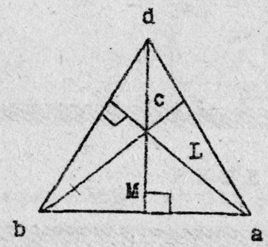


Рис.1

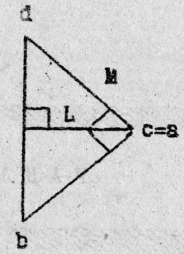


Рис.2

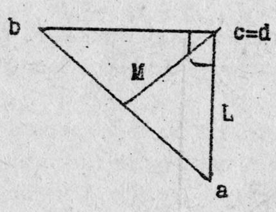


Рис.3

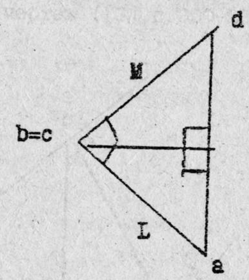


Рис.4

Свойство высот $\Longrightarrow$ О3. Берут Δabd на рис.I и применяют свойство высот. Получают О3.

(2.4) Нетривиальная задача. Требуется сложный рисунок 5. По условию:

$L \perp L'$,
$a, b, c \in L$,
$a', b', c' \in L'$
$ab' \parallel a'b$, $ac' \parallel a'c$

Надо доказать: $bc' \parallel b'c$.

Решение задачи состоит в выполнении пунктов А) – Г).

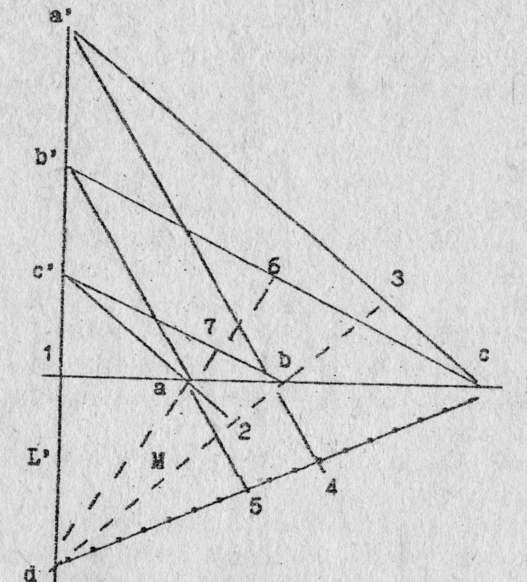


Рис.5

А) Если одна из точек тройки a,b,c коллинеарна с точками другой тройки a', b', c', то $L = L'$, что противоречит условию. Значит, данная ситуация невозможна.

Б) Строим M перпендикуляр к ac' через b. Тогда M пересекает L' в точке d. Если нет, то $M \parallel L'$. Но $ac' \perp M$. По (2.I) $ac' \perp L'$ и так как $L \perp L'$, то L и ac' два разных перпендикуляра к L' через a. (по А) $c' \notin L$). Противоречие с О2.

В) Последовательно доказывается, что в "точках" I-7.

имеет место ортогональность. Тогда выполнение этого свойства для 6,7 дает $ad \perp bc'$, $ad \perp b'c$. Значит, по (2.I) $bc' \parallel b'c$.

Г) I: $L \perp L'$ по условию

2: $bd \perp ac'$ – это $M \perp ac'$ – по построению

3: $bd \perp a'c$. По 2: $bd \perp ac'$ и по условию $ac' \parallel a'c$. Отсюда $bd \perp a'c$.

4: $dc \perp a'b$. Если $d = a'$, то $bd \perp a'c$ (3) перепишется в требуемое $ba' \perp dc$. Пусть $d \neq a'$. В $\Delta cda'$ перпендикуляры bc (1) и bd (3) пересекаются в b. По свойству высот ba' – третий перпендикуляр, дающий $b'a \perp dc$.

5: $ab' \perp dc$. По 4: $a'b \perp cd$ и $ab' \parallel a'b$ по условию, что влечет $ab' \perp dc$.

6: $b'c \perp ad$. Анализируются случаи $d = b'$ и $d \neq b'$ аналогично случаю 4. В первом случае используется 5, а во втором случае рассматривается $\Delta cdb'$.

7: $da \perp c'b$. Анализируются случаи $d = c'$ и $d \neq c'$ аналогично случаю 4. В первом случае используется 2, а во втором рассматривается $\Delta bdc'$.

(2.5) Следует из теоремы Шура (2.4) и того, что для координации плоскости достаточно двух прямых (см.задачу (I.5), (I.6)).

(2.6) Пусть L сингулярная прямая, а M-несингулярная прямая (она существует, ибо плоскость ненулевая. L и M пересекаются (задача (2.I)) в точке a. Далее доказывается:

I) по O2 L единственная прямая, ортогональная к M и проходящая через a;

2) если $N \ni a$ и N не ортогональна M, то N несингулярна и L-единственный перпендикуляр к N через a.

3) множество прямых, проходящих через a, содержит сингулярную L, и все прочие ей ортогональны.

4) свойство 3) справедливо для любой точки b, причем соответствующая сингулярная прямая параллельна L.

5) все прямые, не параллельные L, несингулярны, а все сингулярные параллельны L.

(2.8) Так как $\langle \alpha, \perp \rangle$ паппова, то $\alpha \cong \alpha_F$, F – поле. Ситуация, описанная в (2.6), и ее решения дает представление о том, как устроено отношение $\perp$. Но легко видеть, что оно полностью характеризуется внутренним произведением, определяющим сингулярную плоскость над F (см. теорему 2.I).

(2.9) К изотропному параллелограмму abdc (см.рис.6) применяют задачу (2.2), пункт 3). Тогда $ab \perp cd$ и $ac \perp bd$. Из O3 следует $ad \perp bc$.

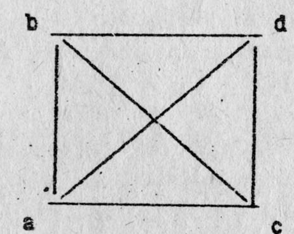


Рис.6

(2.II) Решение задачи требует выполнения пунктов А), Б), В).

А) Вначале доказывается, что через любую точку проходит не более двух изотропных прямых (см.рис.7). На рис.7 L,M,N – считаются изотропными, прямые $db \parallel N$, $dc \parallel L$ – строятся, причем доказывается, что точки пересечений b и c существуют.

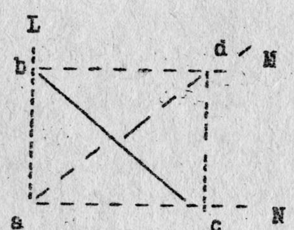


Рис.7

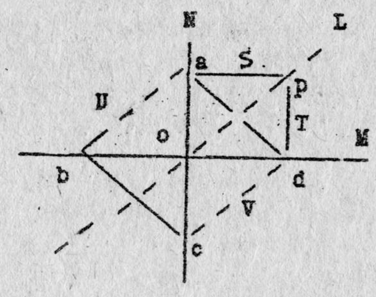


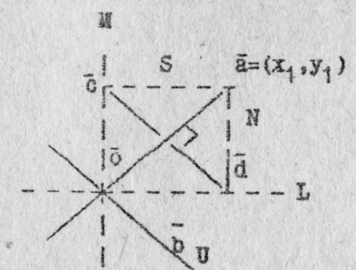
Рис.8

По (2.2) пункт 3), abdc – изотропный параллелограмм и по (2.9) ad $\perp$ bc. Но ad изотропна, значит, по (2.2), пункт 2), ad $\parallel$ bc, что противоречит нефановости плоскости.

Б) Далее доказывается, что существуют две пересекающиеся изотропные прямые. Одна L существует по условию задачи. Найдем вторую. Делается рис.8. На нем:
M – прямая, пересекающая L, N – перпендикуляр к M через O, S $\parallel$ M, T $\parallel$ N.
Доказываем, что $S \cap N = a$, $T \cap M = d$. Цель – показать, что ad – искомая изотропная прямая, пересекающая L.
Строим U $\parallel$ L, V $\parallel$ L. Т.к. L – изотропная, то по (2.2) U,V изотропны; причем $b = U \cap M$, $c = V \cap N$. Так как ab $\parallel$ cd и обе изотропны, то ab $\perp$ cd. По O3, примененной к a,b,c,d, имеем ad $\perp$ bc. Малое дезаргово свойство для Δapd и Δboc дает ad $\parallel$ bc (ибо ab $\parallel$ po $\parallel$ dc и ap $\parallel$ bo, pd $\parallel$ oc). Итак, ad $\perp$ bc и ad $\perp$ bc. Значит, ad изотропна. Прямые ad и L пересекаются, ибо плоскость нефанова.

В) Наконец, требуемое утверждение следует из А), Б) и А3.

(2.12) Пусть L,M – две пересекающиеся в точке O прямые, L – ось x, M – ось y.



Берем $a \notin L,M$; S $\parallel$ L, N $\parallel$ M, $a \in S,M$, $\bar{c}\bar{a}\bar{d}\bar{o}$ изотропный параллелограмм (см.задачу (2.2); $\overline{cd} \perp \overline{oa}$ (задача (2.9)); угловой коэффициент $\overline{ao}$ равен $\frac{y_1}{x_1}$, угловой коэффициент $\overline{cd}$ равен $\frac{y_1 - 0}{0 - x_1} = -\frac{y_1}{x_1}$

Пусть $\bar{a} = (x_1, y_1)$, $\bar{b} = (x_2, y_2)$ не лежат на L,M. Тогда $x_1 x_2 \neq 0$. Уравнение $\overline{oa} \longrightarrow y = mx$, уравнение $\bar{o}\bar{b} \longrightarrow y = nx$
Т.к. $\overline{oa} \perp \bar{o}\bar{b}$, то $m = -n$ (см.выше). Тогда

$$\overline{oa} \perp \bar{o}\bar{b} \Leftrightarrow m + n = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 (m+n) = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 \left(\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2}\right) = 0 \Leftrightarrow x_2 y_1 + x_1 y_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x_1, y_1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

Значит $\langle \alpha, \perp \rangle$ характеризуется внутренним произведением

$$\bar{a} * \bar{b} = (x_1, y_1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

или $\langle \alpha, \perp \rangle \cong \langle \alpha_p, \perp * \rangle$ – вида (*).

Пусть $U \ni \bar{o}$, $U \parallel \overline{cd}$. Берем $\overline{oa}$ за ось x', а U за ось y'. Если уравнение $\overline{oa} \dashrightarrow y = x$ или $y' = 0$, то уравнение $U \dashrightarrow y = -x$ или $x' = 0$. Значит, при $\mathrm{char}(F) \neq 2$ имеем замену координат.

$$\begin{matrix} x' = (x + y) \\ y' = (x - y) \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} x = 2^{-1}(x' + y') \\ y = 2^{-1}(x' - y') \end{matrix}$$

Тогда

$$x_2 y_1 + x_1 y_2 = 0 \iff (x_2' + y_2')(x_1' - y_1') + (x_1' + y_1')(x_2' - y_2') = 0$$

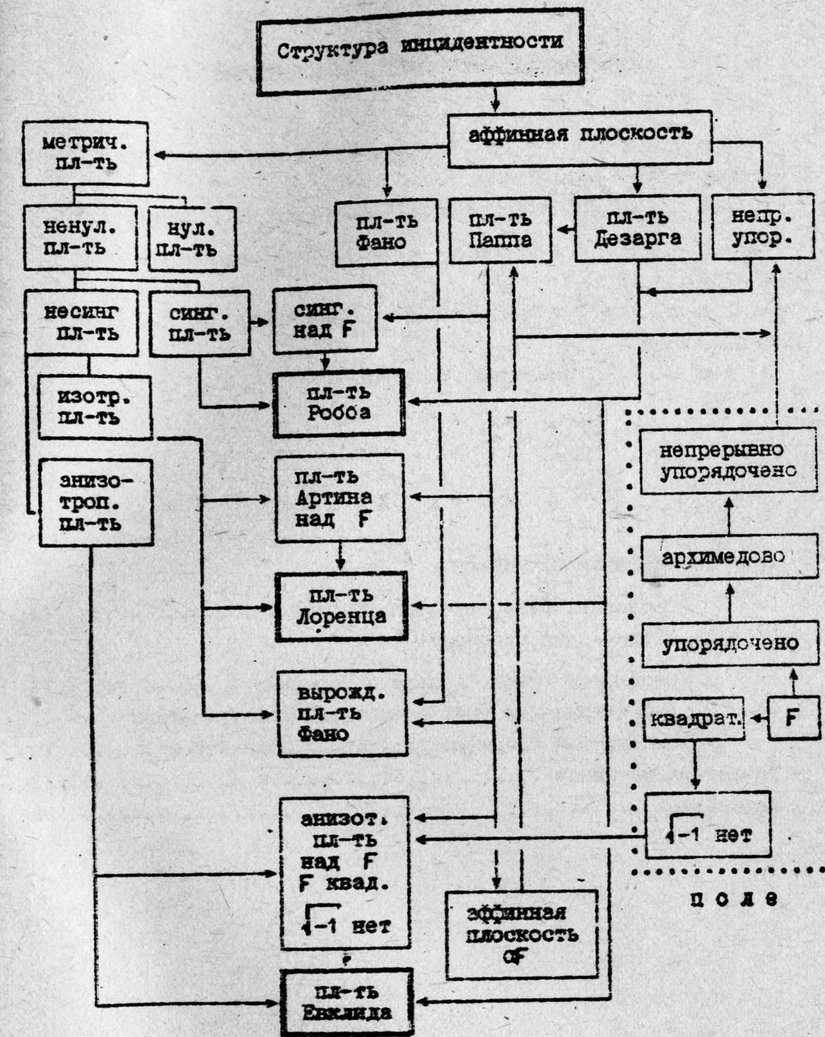
$$\iff 2\,(x_1' x_2' - y_1' y_2') = 0 \iff x_1' x_2' - y_1' y_2' = 0$$

Значит, $\langle \alpha, \perp \rangle$ характеризуется внутренним произведением

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (x_1', y_1') \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2' \\ y_2' \end{bmatrix} \qquad (**)$$

и $\langle \alpha, \perp \rangle \cong \langle \alpha_F, \perp\cdot \rangle$ – вида (**).

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ



Структура инцидентности
аффинная плоскость
метрич. пл-ть
пл-ть Фано
пл-ть Паппа
пл-ть Дезарга
непр. упор.
ненул. пл-ть
нул. пл-ть
несинг пл-ть
синг. пл-ть
синг. над F
изотр. пл-ть
пл-ть Робба
анизо-троп. пл-ть
пл-ть Артина над F
пл-ть Лоренца
вырожд. пл-ть Фано
анизот. пл-ть над F F квад. $\sqrt{-1}$ нет
аффинная плоскость GF
пл-ть Евклида
непрерывно упорядочено
архимедово
упорядочено
квадрат.
F
$\sqrt{-1}$ нет
поле

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Goldblatt R. Orthogonality and Spacetime Geometry. Springer-Verlag. New York Ins., 1987.

2. Артин Э. Геометрическая алгебра. М.: Наука, 1969.

3. Лелон-Ферран Ж. Основания геометрии. М.: Мир, 1989.

4. Гильберт Д. Основания геометрии. М; Л.: Гостехиздат, 1948.

5. Шоке Г. Геометрия. М.: Мир, 1970.

СОДЕРЖАНИЕ