МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Сборник материалов
XI Международной научной конференции,
посвященной памяти В.А. Романькова

(Омск, 15 марта 2024 г.)

ISBN 978-5-7779-2680-7

Омск
2024

5. *Панкратов И.А.* Расчёт наискорейших перелётов космического аппарата между круговыми орбитами // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17, вып. 3. С. 344– 352.
6. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
7. *Зубов В.И.* Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судостроение, 1970.
8. *Молоденков А.В.* К решению задачи Дарбу // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 2. С. 3–13.
9. *Панкратов И.А., Челноков Ю.Н.* Аналитическое решение дифференциальных уравнений ориентации круговой орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 84–89.
10. *Панкратов И.А.* Аналитическое решение уравнений ориентации околокруговой орбиты космического аппарата // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 97–105.
11. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
12. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
13. *Führer C., Solem J.E., Verdier O.* Scientific computing with Python 3. Birmingham - Mumbai: Packt Publishing, 2016. 332 p.
14. *Meurer A. et al.* SymPy: symbolic computing in Python // PeerJ Computer Science. URL: https://peerj.com/articles/cs-103.pdf (дата обращения: 07.01.2023).

УДК 502.313: 502.53

А.К. Гуц

Международный инновационный университет, г. Сочи, Россия
SPIN-код: 3792-6510

ЦИКЛИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В МОДЕЛЕ ПРИРОДНЫХ ЯВЛЕНИЙ «ОПОЛЗНИ-ЗАТОПЛЕНИЯ-ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЯ»

Рассмотрим стихийное природное бедствие, которое включает оползни, ливневые дожди, сопровождаемые затоплениями местности, и землетрясения. Причинами оползня выступают дожди, или наводнение, землетрясения, или всё вместе. Описанное бедствие моделируем посредством следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x,w,z) = -[H + x^2]x - rwz,$$
$$\frac{dw}{dt} = f_2(x,w,z) = \rho w\left(1 - \frac{w^2}{R}\right) - \alpha rx$$
$$\frac{dz}{dt} = f_3(x,w,z) = -z^3 - pz - q, \qquad (1)$$

где x – смещение оползня [1], характеризующие состояние оползня, w – средняя величина глубины воды при затоплении, смещение в разломе [2].

Второе уравнение в (1) получено следующим образом. Мы рассматривали случай многосуточного ливневого дождя, когда вода поступает на изучаемую местность в форме осадков (дождь) и посредством затопления местности, вышедшей из берегов реки.

Пусть w – средняя величина глубины воды. Примем, что существует величина $R > 0$ такая, что если $w^2 < R$, то скорость изменения величины w положительна, т. е. вода прибывает, но когда w превысит R, то вода, уровень затопления начинает спадать. Другими словами, уровень воды не может бесконечно расти до «небес». И отчасти этому, предполагаем, способствуют дождевые осадки. Сказанное можно описать посредством уравнения

$$\frac{dw}{dt} = \rho w(1 - \frac{w^2}{R}) - \alpha r,$$

где α, ρ=const

В первом уравнении системы (1) мы учли (нелинейное) влияние затоплений и землетрясений на сход оползней, а во втором уравнении возможное влияние оползня на затопления (например, оползень может перегородить русло реки и вызвать затопление; существуют также оползни-потоки, порождающие затопления). Третье уравнение независимо от первых двух, поскольку трудно говорить о том, что оползни, дожди и наводнения могут влиять на землетрясения.

Нас интересует возможность перехода стационарных равновесий в циклическое равновесие, известного под названием «бифуркация Андронова-Хопфа». Иными словами, хотелось бы получить ответ на вопрос о том, могут ли оползневые смещения и уровни затопления, а в случае системы (1) еще и подземные толчки «ходить по кругу», т.е. изменяться с течением времени по замкнутой кривой в соответствующем им пространстве состояний.

Для того чтобы убедиться в наличии циклов в системе (1) воспользуемся вариантом теоремы о бифуркации АндроноваХопфа из [3].

Очевидно, $x_0 = w_0 = 0$ и $z_0 -$ вещественный корень уравнения $3z^3 + pz + q = 0$ являются стационарными равновесиями системы (1), т.е.

$$\frac{dx}{dt}(x_0, w_0, z_0) = \frac{dw}{dt}(x_0, w_0, z_0) = \frac{dz}{dt}(x_0, w_0, z_0) = 0.$$

Нам необходимо найти собственные числа $\lambda_{1,2,3}$ матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial w} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial w} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}(x_0, w_0, z_0).$$

Вычисляя, находим $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\{-(H-\rho) \pm \{-4\alpha r^2 z_0 - (H+\rho)^2\}^{\frac{1}{2}} i$, $\lambda_3 = -3z_0^2 - p < 0$, где мы приняли, что $(H+\rho)^2 < -4\alpha r^2 z_0$. Считая $\rho = \mu$, полагаем, что

$$Re\ \lambda_1(\mu_0) = \frac{1}{2}(\mu_0 - H) = 0.$$

Тогда поскольку $Im\lambda_1(\mu_0) = \{-4\alpha r^2 z_0 - (H+\rho)^2\}^{\frac{1}{2}} > 0$ и $\frac{\partial\ Re\ \lambda_1(\mu_0)}{\partial\ \mu} = \frac{1}{2} \neq 0$, то выполнены условия теоремы Бо Санга из [3]. Следовательно, у системы (1) существует семейство предельных циклов. Обнаружение таких циклов, например, на Северном Кавказе, – это серьезное научное исследование.

Литература

1. *Qin S.Q., Jiao J.J., Wang S.J.* A cusp catastrophe model of instability of slip buckling slope // Rock Mechanics and Rock Engineering. 2001. Vol. 34. P. 119–134.
2. *Zaitie Chen, Wei Wang, Dayang Li*. Instability Analysis of Strike-Slip Fault Based on Cusp Catastrophe Model // SDHM. 2018. Vol.12. P.19–33.
3. *Bo Sang*. Hopf bifurcation formulae and applications to the Genesio-Tesi system // J. Nonlinear Funct. Anal. 2019. Article ID 34. URL: http://jnfa.mathres.org/issues/JNFA201934.pdf (30.08.2021).