А. К. Гуц, Инвариантные порядки на трехмерных группах Ли,
Сиб. матем. журн., 1976, том 17, номер 5, 986–992

https://www.mathnet.ru/smj4045

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XVII, № 5 Сентябрь — Октябрь 1976

УДК 519.46

А. К. ГУЦ

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОРЯДКИ НА ТРЕХМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

В статье А. Д. Александрова ([1]) показано, что изотонный (т. е. сохраняющий порядок) гомеоморфизм коммутативной группы Ли на себя будет автоморфизмом, если порядок не является квазицилиндрическим. В ([2]) дан пример некоммутативной группы Ли, где имеет место аналогичный результат.

В связи с этим нас интересовали следующие вопросы:

1) на любой ли некоммутативной группе Ли существует инвариантный порядок;

2) являются ли соответствующие изотонные гомеоморфизмы автоморфизмами;

3) насколько понятие квазицилиндрического порядка отвечает тому исключительному случаю, для которого теорема типа Александрова не имеет места.

В данной работе мы приводим частные результаты, касающиеся лишь связных односвязных трехмерных групп Ли, т. е. универсальных накрывающих трехмерных групп.

Оказывается, инвариантный глобальный порядок для этих групп не столь уж и редкое явление, а значит, результат А. Д. Александрова может быть распространен и на некоммутативные группы. Однако квазицилиндрические порядки при этом теряют свой исключительный характер. Две группы остались неисследованными.

§ 1. Определения

1.1. Пусть G_n — n-мерная группа Ли. Предположим, что каждой точке $x \in G_n$ сопоставлено множество P_x, причем выполнены условия:

1) $x \in P_x$;

2) если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$;

3) если $x \neq y$, то $P_x \neq P_y$.

Тогда на G_n легко ввести частичный порядок, полагая $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $y \in P_x$. Если условие 3) не выполняется, то говорим о предпорядке.

1.2. Порядок называется *инвариантным*, если для любых элементов x и y имеет место равенство

$$x \cdot P_y = P_{x \cdot y}.$$

1.3. Отображение $f: G_n \to G_n$ называется *изотонным*, если оно единицу переводит в единицу, т. е. $f(e) = e$, и для любого $x \in G_n$ имеем

$$f(P_x) = P_{f(x)},$$

т. е. $x \leqslant y$ влечет $f(x) \leqslant f(y)$.

1.4. Пусть L и H ($L \cap H = \{e\}$) — соответственно однопараметрическая полугруппа и $(n-1)$-мерная подгруппа n-мерной группы G_n. Обозначим через $L(g)$ ($e \neq g$) подмножество полугруппы L, гомеоморфное отрезку $[0, 1]$ вещественных чисел, причем e и g при этом гомеоморфизме отвечают концам 0 и 1 из $[0, 1]$. Далее под $[a, b]$ подразумеваем такое подмножество группы G_n, для которого существует $h \in G_n$ такой, что $h \cdot [a, b] = L(g)$ и $h \cdot a = e$, $h \cdot b = g$.

Определим отображение $d_{L(g)H}$ следующим образом:

(1) $d_{L(g)H}$ есть гомеоморфизм G_n на себя;

(2) $d_{L(g)H}$ отображает всякий смежный класс hH на класс $h'H$, причем оно действует на hH как левый сдвиг, т. е.

$$d_{L(g)H}(hH) = h'' \cdot hH;$$

(3) $d_{L(g)H}$ всякий «отрезок» $[a, b]$ отображает на точно такой же «отрезок».

1.5. *Квазицилиндром* $Q[L(g), H]$ называется такое множество, образ которого при отображении $d_{L(g)H}$ получается из него самого левым сдвигом, т. е. найдется $t \in G_n$, что

$$d_{L(g)H}(Q[L(g), H]) = t \cdot Q[L(g), H].$$

Случай, когда $L(g)$ совпадает с L, не исключаем, и такой квазицилиндр обозначим через $Q[L, H]$.

Если $L_1, \ldots, L_n$ — n различных однопараметрических полугрупп группы G_n, то их декартово произведение будет квазицилиндром $Q[L_i, H_i]$, где H_i — $(n-1)$-подгруппа, порожденная однопараметрическими подгруппами $L_1', \ldots, L_{i-1}', L_{i+1}', \ldots, L_n'$, где $L_j \subset L_j'$.

§ 2. Трехмерные алгебры Ли и группы Ли

Поскольку мы не располагаем общим методом для решения интересующих нас вопросов, трехмерные группы Ли для нас интересны тем, что для них имеется всего девять вещественных неизоморфных видов алгебр Ли, т. е. представляется возможным изучить каждую группу Ли G_3 в зависимости от структуры ее алгебры Ли.

2.1. Выпишем трехмерные алгебры Ли g_3 (см. ([3]), с. 72).

Разрешимые

g_3I) $[X_iX_j] = 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$;

g_3II) $[X_1X_2] = 0$, $[X_2X_3] = X_1$, $[X_3X_1] = 0$;

g_3III) $[X_1X_2] = 0$, $[X_2X_3] = 0$, $[X_1X_3] = X_1$;

g_3IV) $[X_1X_2] = 0$, $[X_2X_3] = X_1 + X_2$, $[X_1X_3] = X_1$;

g_3V) $[X_1X_2] = 0$, $[X_2X_3] = X_2$, $[X_1X_3] = X_1$;

g_3VI) $[X_1X_2] = 0$, $[X_2X_3] = qX_2$, $[X_1X_3] = X_1$ $(q \neq 0, 1)$;

g_3VII) $[X_1X_2] = 0$, $[X_2X_3] = -X_1 + qX_2$, $[X_1X_3] = X_2$ $(q^2 < 4)$.

Неразрешимые

g_3VIII) $[X_1X_2] = X_1$, $[X_2X_3] = X_3$, $[X_1X_3] = 2X_2$;

g_3IX) $[X_1X_2] = X_3$, $[X_2X_3] = X_1$, $[X_3X_1] = X_2$.

2.2. Нас будут интересовать только связные односвязные группы Ли. Для алгебры Ли g_3 существует полная связная односвязная группа Ли G_3

с алгеброй Ли, изоморфной данной ([5], с. 256). Причем эта группа Ли в случае разрешимой алгебры Ли гомеоморфна евклидову пространству E_3 и, значит, некомпактна ([4], с. 432).

Поскольку все группы Ли с алгеброй Ли, изоморфной данной, локально-изоморфны ([5], с. 253), то связная односвязная группа Ли среди них является единственной с точностью до изоморфизма ([4], с. 374). По сути дела, эта группа Ли является универсальной накрывающей.

Связную односвязную группу Ли с алгебрами Ли g_3I—g_3IX будем соответственно обозначать через G_3I—G_3IX.

2.3. Очевидно утверждение: *если группа G имеет инвариантный порядок, а группа G' изоморфна G, т. е. $G \cong G'$, то группа G' также обладает инвариантным порядком.*

§ 3. Порядки на группах Ли G_3I — G_3VI и G_3IX

3.1. Порядок P_e назовем *хорошим*, если

1) P_e содержит внутренние точки;

2) $(\exp)_e^{-1}(P_e)$ содержит луч, исходящий из нуля.

Нас интересуют лишь хорошие порядки.

3.2. Мы говорим, что группа G обладает $\mathscr{A}$-свойством, если на ней существует инвариантный хороший порядок, всякий изотонный гомеоморфизм которого группы G на себя является автоморфизмом.

3.3. Теорема. *Группы Ли G_3I—G_3V и G_3VI $(0<q<1)$ обладают $\mathscr{A}$-свойством. Группа G_3IX не имеет хорошего порядка.*

Доказательство. Группу G_3 представим как группу преобразований, действующую просто транзитивно на некотором достаточно хорошем пространстве M. Это пространство M будет у нас либо евклидовым E_3, либо гиперболическим $Л_3$, либо сферой S^3.

Фиксируем точку $x_0 \in M$. Тогда легко устанавливается гомеоморфизм φ между M и G_3

$$G_3 \ni g \xrightarrow{\varphi} g(x_0) \in M. \tag{1}$$

Если теперь P-инвариантный порядок на G_3, то семейство $\{P'_x : x \in M\}$, где $P'_x = \varphi\left(P_{\varphi^{-1}(x)}\right)$, задает инвариантный относительно G_3 порядок на M, т. е. для любых $x \in M$ и $g \in G_3$ имеем $g\left(P'_x\right) = P'_{g(x)}$. Обратно, если $\{P'_x\}$ — инвариантный относительно G_3 порядок на M, то $\{P_g : g \in G_3\}$, где

$$P_g = \varphi^{-1}\left(P'_{\varphi(g)}\right)$$

— инвариантный порядок на G_3.

В силу этого достаточно исследовать вопрос об инвариантных относительно G_3 (G_3-инвариантных) порядках на M.

a) G_3I. Здесь $M = E_3$ и G_3I — группа сдвигов. Наличие $\mathscr{A}$-свойства на G_3I следует из результатов А. Д. Александрова [1].

b) G_3II. Здесь $M = Л_3$. Удобно перейти к модели Пуанкаре $\hat{Л}_3$ пространства $Л_3$: $\hat{Л}_3 = \{(x, y, z) \in E_3 : z > 0\}$, где x, y, z — прямоугольные декартовы координаты. Группа G_3II состоит из преобразований вида

$$g : (x, y, z) \to (x+\alpha, \lambda x + y + \beta, (1+\lambda) z),$$

где $\lambda > -1$, α, β — вещественные числа. Инфинитазимальные операторы таковы:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}.$$

$G_3\mathrm{II}$-инвариантный порядок задается квазицилиндром

$$P_{(0,0,\alpha)}=\{(x, y, z)\in\hat{Л}_3 : x\geqslant 0,\ y\geqslant(\alpha-1)x,\ z\geqslant\alpha\},\ x_0=(0, 0, 1),$$

и P_x, P_y в случае равенства их z-координат получаются друг из друга параллельным переносом. Покажем, что изотонный гомеоморфизм f $(f(x_0)=x_0)$ в случае данного порядка будет иметь вид

$$f(x, y, z)=(\mu x, \mu y, z). \tag{2}$$

Обозначим через $\Gamma^1_{x_0}$, $\Gamma^2_{x_0}$, $\Gamma^3_{x_0}$ соответственно грани трехгранного угла ∂P_{x_0}, лежащие в плоскостях, задаваемых уравнениями $z=1$, $x=0$, $y=0$. Положим $\Gamma^i_x=g\left(\Gamma^i_{x_0}\right)$, где $g\in G_3$ таков, что $g(x_0)=x$.

Пусть

$$\Pi^1_\lambda=\bigcup_{(x,y)}\Gamma^1_{(x,y,\lambda)},\ \Pi^2_\alpha=\bigcup_{(y,z)}\Gamma^2_{(\alpha,y,z)},\quad \Pi^3_{\beta\gamma}=\bigcup_{y=(\beta-1)x}\Gamma^3_{(x,y,\beta)}+\overrightarrow{(0,\gamma,0)},\ \beta>0.$$

Ясно, что Π^1_λ — плоскость $\{z=\lambda\}$, Π^2_α — полуплоскость $\{x=\alpha,\ z>0\}$, а $\Pi^3_{\beta\gamma}$ — полуплоскость $\{y=(\beta-1)x,\ z\geqslant\beta\}$. Так как f — гомеоморфизм, а $\Pi^3_{\beta\gamma}$ имеет край, то образом $\Pi^3_{\beta\gamma}$ будет только $\Pi^3_{\beta'\gamma'}$. Поскольку для любой Π^1_λ существует $\Pi^3_{\beta\gamma}$ такая, что $\Pi^1_\lambda\cap\Pi^3_{\beta\gamma}=\varnothing$, образом Π^1_λ будет только $\Pi^1_{\lambda'}$, ибо любая Π^2_α пересекается с любой $\Pi^3_{\beta\gamma}$. Отсюда следует, что f сохраняет семейство z-координатных линий и координатную плоскость $\{z=1\}$. Но тогда f имеет вид

$$f(x, y, z)=(f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(z)).$$

Заметим, что если β_1, β_2, β_3 различны и β_1, β_2, $\beta_3<1$, то пересечения $\Pi^1_1\cap\Pi^3_{\beta_1\gamma}$, $\Pi^1_1\cap\Pi^3_{\beta_2\gamma}$, $\Pi^1_1\cap\Pi^3_{\beta_3\gamma}$ задают на $\Pi^1_1=\{z=1\}$ три семейства параллельных прямых, которые f отображают на три семейства параллельных прямых. Но тогда f аффинно на Π^1_1, т. е.

$$f_1(x, y)=a\cdot x+b\cdot y,\ f_2(x, y)=cx+dy$$

(см. [1], с. 12).

Поскольку прямые $\{x=0,\ z=1\}$ и $\{y=0,\ z=1\}$ переходят сами в себя, то $b=c=0$, т. е. $f_1(x, y)=ax$, $f_2(x, y)=dy$.

Числа a, d положительны, ибо $f(P_{x_0})=P_{x_0}$.

Так как $f(P_{(0,0,\lambda)})=P_{\left(0,0,\frac{d}{a}\lambda\right)}=P_{(0,0,f_3(\lambda))}$, то $f_3(\lambda)=d\lambda/a$.

Но $f_3(1)=1$. Откуда $d=a=\mu$ и $f_3(z)=z$. Тем самым формула (2) доказана. Изотонный гомеоморфизм $f: Л_3\to Л_3$ индуцирует изотонный гомеоморфизм $\tilde{f}: G_3\mathrm{II}\to G_3\mathrm{II}$, определяемый посредством (1), т. е.

$$\tilde{f}(g)\overset{\varphi}{\to}f(g(x_0)). \tag{3}$$

И обратное тоже верно. Покажем, что $\tilde{f}$ — автоморфизм.

Пусть g_1, $g_2\in G_3\mathrm{II}$ и

$$g_1(x, y, z)=(x+\alpha_1,\ \lambda_1x+y+\beta_1,\ (1+\lambda_1)z),\ g_1\overset{\varphi}{\to}(\alpha_1, \beta_1, (1+\lambda_1)),$$

$$g_2(x, y, z)=(x+\alpha_2,\ \lambda_2x+y+\beta_2,\ (1+\lambda_2)z),\ g_2\overset{\varphi}{\to}(\alpha_2, \beta_2, (1+\lambda_2)).$$

Тогда

$$g_2g_1\overset{\varphi}{\to}g_2(g_1(x_0))=(\alpha_1+\alpha_2,\ \lambda_2\alpha_1+\beta_1+\beta_2,\ (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)) \tag{4}$$

определяет закон перемножения в группе $G_3\mathrm{II}$.

Далее,

$$\tilde f(g_2g_1)\xrightarrow{\varphi} f(g_2g_1(x_0))=(\mu\alpha_1+\mu\alpha_2,\ \mu\lambda_2\alpha_1+\mu\beta_1+\mu\beta_2,\ (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)),\quad (5)$$

$$\tilde f(g_1)\xrightarrow{\varphi} f(g_1(x_0))=(\mu\alpha_1,\ \mu\beta_1,\ (1+\lambda_1)),$$

$$\tilde f(g_2)\xrightarrow{\varphi} f(g_2(x_0))=(\mu\alpha_2,\ \mu\beta_2,\ (1+\lambda_2)).$$

Перемножая элементы $\tilde f(g_1)$ и $\tilde f(g_2)$ по закону (4) получаем

$$\tilde f(g_2)\tilde f(g_1)\xrightarrow{\varphi}(\mu\alpha_1+\mu\alpha_2,\ \mu\lambda_2\alpha_1+\mu\beta_1+\mu\beta_2,\ (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)).\quad (6)$$

Сравнивая (5) и (6), заключаем, что

$$\tilde f(g_2)\tilde f(g_1)=\tilde f(g_2g_1),$$

т. е. $\tilde f$ — автоморфизм.

Значит, $G_3\mathrm{II}$ обладает $\mathscr{A}$-свойством.

c) $G_3\mathrm{III}$. Берем $M=Л_3$ и в $Л_3$ группа $G_3\mathrm{III}$ задается преобразованиями вида

$$g\colon(x,\ y,\ z)\to(x+\alpha,\ \lambda y+\beta,\ \lambda z),\ x_0=(0,\ 0,\ 1),$$

где λ, $z>0$.

Порядок здесь следующий:

$$P_{(0,\,0,\,\lambda)}=\{(x,\ y,\ z)\in\hat{Л}_3\colon x\geqslant 0,\ y\geqslant\lambda x,\ z\geqslant\lambda\},\ \lambda>0,\quad (7)$$

и P_x, P_y равны и параллельны для x и y с одинаковой z-координатой, т. е. при $z(x)=z(y)$.

Обозначим через $\Gamma^1_{x_0}$, $\Gamma^2_{x_0}$, $\Gamma^3_{x_0}$ соответственно грани трехгранного угла ∂P_{x_0}, лежащие в плоскостях, задаваемых уравнениями $z=1$, $x=0$ и $y=x$. Положим $\Gamma^i_x=g\left(\Gamma^i_{x_0}\right)$, где $g\in G_3$ таков, что $g(x_0)=x$.

Пусть

$$\Pi^1_\lambda=\bigcup_{(x,y)}\Gamma^1_{(x,y,\lambda)},\quad \Pi^2_\alpha=\bigcup_{(y,z)}\Gamma^2_{(\alpha,y,z)},$$

$$\Pi^3_{\beta\gamma}=\bigcup_{y=\beta x}\Gamma^3_{(x,y,\beta)}+\overrightarrow{(0,\gamma,0)},\quad \beta>0.$$

Очевидно, что $\Pi^1_\lambda=\{z=\lambda\}$, $\Pi^2_\alpha=\{x=\alpha,\ z>0\}$, а $\Pi^3_{\beta 0}=\{y=\beta x,\ z\geqslant\beta\}$. Тогда так же, как и в пункте b), убеждаемся, что f имеет вид

$$f(x,\ y,\ z)=(ax+by,\ cx+dy,\ f_3(z)).$$

Так как прямые $\{x=0,\ z=1\}$, $\{y=x,\ z=1\}$ переходят сами в себя, то $b=0$ и $d+c=a$. Так же, как в конце пункта b), убеждаемся, что

$$f_3(z)=(zd+c)/a.$$

Далее, луч $L=\{y=0,\ z=1,\ x\geqslant 0\}$ отображается на луч L', лежащий в $\{z=1\}$ и исходящий из точки x_0.

Но L является пределом лучей

$$L_n=\Pi^3_{1/n,0}\cap\{z=1\}\cap\{x\geqslant 0\}\ \text{ при }\ n\to\infty.$$

Так как f — гомеоморфизм и $(\{x\geqslant 0\}\cap\{y>0\})\cup\{x=0,\ y=0\}=\bigcup\limits_{\lambda>0}P_{(0,0,\lambda)}$, то L' является пределом лучей

$$\Pi^3_{f_3(1/n),0} \cap \{z=1\} \cap \{x \geqslant 0\} \quad \text{и} \quad f_3(1/n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Отсюда следует, что $L'=L$. Но тогда $c=0$, $a=d=\mu$, т. е f имеет вид (2). Тривиальная проверка показывает, что $\tilde{f}$ — автоморфизм.

Рассмотренный нами порядок — квазицилиндрический. Таким является, например, и следующий порядок:

$$P_{(0,0,\lambda)} = \{(x, y, z) \in \hat{Л}_3 : z \geqslant \lambda,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}, \tag{8}$$

и P_x, P_y равны и параллельны при $z(x)=z(y)$. Этот порядок сохраняется при отображениях вида $f(x, y, z) = (f_1(x), f_2(y), f_3(z))$, где f_i — в общем-то произвольные функции. Причем эти функции можно взять так, чтобы $\tilde{f}$ не было автоморфизмом (например, если $f_3(\alpha\beta) \neq f_3(\alpha) f_3(\beta)$).

На G_3III существует инвариантный порядок, не являющийся квазицилиндрическим

$$P_{(\alpha,\beta,\lambda)} = \{(x, y, z) \in \hat{Л}^3 : \lambda^2 x^2 + y^2 - (z-\lambda)^2 \leqslant 0,\ z \geqslant \lambda\} + \overrightarrow{(\alpha, \beta, 0)}.$$

Думается, и по отношению к нему $\tilde{f}$ является автоморфизмом, хотя для наших целей это уже неважно.

d) G_3IV. Полагаем $M=Л_3$, и на $\hat{Л}_3$ группа задается преобразованиями

$$g: (x, y, z) \to ((1+\lambda)x + \lambda y + \alpha,\ (1+\lambda)y + \beta,\ (1+\lambda)z),\ \lambda > -1,\ z > 0.$$

Инвариантный порядок здесь такой, как и в пункте b)[1]. Доказательство дальнейшего аналогично b).

e) G_3V. $M=Л_3$, а группа G_3V имеет вид

$$g: (x, y, z) \to (\lambda x + \alpha,\ \lambda y + \beta,\ \lambda z).$$

Наличие $\mathscr{A}$-свойства показано в ([2]). Эта группа, как G_3I, изучена более глубоко, чем все прочие.

f) G_3VI $(0<q<1)$. $M=Л_3$, и для G_3VI имеем в $\hat{Л}_3$

$$g: (x, y, z) \to ((1+\lambda)x + \alpha,\ (1+\lambda q)y + \beta,\ (1+\lambda)z),$$

где $\lambda > -1$, $z > 0$.

Инвариантный порядок, указывающий на наличие $\mathscr{A}$-свойства, здесь таков:

$$P_{(0,0,\lambda)} = \{(x, y, z) \in \hat{Л}_3 : y \geqslant 0,\ x \geqslant [\lambda/(1+(\lambda-1)q]y,\ z \geqslant \lambda\},\ \lambda > 0,$$

и P_x, P_y равны и параллельны при $z(x)=z(y)$.

Так же, как в пункте c), устанавливается, что изотонный гомеоморфизм имеет вид (2). Проверка того, что $\tilde{f}: G_3 \to G_3$ будет автоморфизмом, тривиальна.

g) G_3IX. Алгебра Ли g_3IX — полупростая и компактная. Поэтому G_3IX компактна (([4]), с. 446, 483). Но тогда $G_3\mathrm{IX} \cong \mathrm{SU}(2)$ (([4]), с. 498, E). Так как $(\exp)_e^{-1}(P)$ содержит луч, то P содержит однопараметрическую полугруппу $\gamma(t)$, $t \in [0, +\infty)$. Пусть $\Gamma(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, — однопараметрическая подгруппа, содержащая $\gamma(t)$. Замыкание $\overline{\Gamma(t)}$ подгруппы $\Gamma(t)$ является абелевой подгруппой Ли группы G_3IX, причем связной и компактной. Значит, $\overline{\Gamma(t)}$ — тор (([6]), с. 260). Так как максимальный тор группы SU(2) является одномерным (([6]), с. 272), то $\Gamma(t)$ — замкнутая кривая. Тогда найдется $a = \Gamma(t_0)$, что $a \neq e$, $e \leqslant a$ и $a \leqslant e$. А это противоречит третьей аксиоме порядка (см. § 1). Теорема доказана.

[1] Точнее, $P_{(0,\,0,\alpha)} = \{y \geqslant 0,\ x \geqslant (\alpha-1)y/\alpha,\ z \geqslant \alpha\}$, $\alpha > 0$.

§ 4. Выводы

В начале статьи мы сформулировали три вопроса по порядкам на группах Ли. Теперь мы можем ответить на них следующим образом.

1) Глобальный инвариантный порядок существует на целом ряде некоммутативных групп Ли.

2) Теорема типа Александрова ([1]) имеет место для группы G_3V (см. ([2])), а для прочих групп ее нельзя сформулировать в том же виде, как это сделано в ([1]). Поэтому мы говорим лишь о наличии $\mathscr{A}$-свойства.

3) Основным затруднением является то обстоятельство, что для групп G_3II—G_3IV и G_3VI понятие квазицилиндрического порядка не приводит к исключительному случаю, как это имеет место для G_3I и G_3V ([1, 2]). Об этом говорит наличие на G_3III таких квазицилиндрических порядков, как (7) и (8).

4) Рассматривая группы G_3I—G_3VI, видим, что если они обладают однопараметрическими полугруппами L_1, L_2, L_3 такими, что: (a) $P = L_1 \times L_2 \times L_3$ — квазицилиндрический порядок; (b) для любого $g \in \dot{L}_3$ имеем $g(L_1' \times L_3') = L_1' \times L_3'$, $g(L_2' \times L_3') = L_2' \times L_3'$, где L_i' — однопараметрическая подгруппа, содержащая L_i ($i=1, 2, 3$); (c) $L_1' \times L_2'$ — абелева подгруппа, то изотонное отображение P не обязано быть автоморфизмом.

Свойства (b)—(c) как раз и отличают порядки (7), (8). Быть может, исключительный случай в теореме типа Александрова и сводится к квазицилиндру со свойствами (a), (b) и (c). И тогда, вполне возможно, в группе G_3II любое изотонное отображение будет автоморфизмом (для хорошего порядка).

В заключение заметим, что методом, изложенным выше, можно изучить наличие $\mathscr{A}$-свойства у четырехмерных групп Ли. Для этого используется классификация вещественных четырехмерных алгебр Ли (см. ([3])).

Поступила в редакцию
21 января 1975 г.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Александров А. Д.* Отображения упорядоченных пространств. Труды Мат. ин-та АН СССР, 128 (1972), 3—21.
2 *Гуц А. К.* Отображения упорядоченного пространства Лобачевского. Докл. АН СССР, 215, № 1 (1974), 35—37.
3 *Петров А. З.* Новые методы общей теории относительности. М., «Наука», 1966.
4 *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М., «Наука», 1973.
5 *Серр Ж. П.* Алгебры Ли и группы Ли. М., «Мир», 1969.
6 *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. М., «Мир», 1970.