

Вестн. Ом. ун-та. 2010. № 2. С. 26–28.

УДК 517.925.15+004.92

А.К. Гуц, Е.О. Хлызов

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

КОМПЬЮТЕРНАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ СЕЧЕНИЙ БИФУРКАЦИОННЫХ МНОЖЕСТВ В ТЕОРИИ КАТАСТРОФ ТОМА

Решается задача компьютерной визуализации элементарной катастрофы с большим числом контрольных параметров. Предложен алгоритм, позволяющий получить отображение сечения бифуркационной поверхности при заданных ограничениях управляющих параметров.

Ключевые слова: компьютерная визуализация, катастрофа, бифуркационное множество, алгоритм.

Математическая теория катастроф находит применение в самых различных областях знаний и в самых различных исследованиях [1, 2].

Самым популярным является использование катастрофы «сборка». Это связано с тем, что бифуркационное множество для катастрофы «сборка» представляет собой одномерную кривую, и вся картина катастрофы укладывается в трехмерном пространстве.

Однако у катастроф «ласточкин хвост» «бабочка» бифуркационные поверхности являются соответственно трехмерной и четырехмерной, и в силу этого теряется наглядность и простота применения этих катастроф на практике.

Поэтому желательно иметь компьютерную реализацию получения сечений этих бифуркационных поверхностей с одновременным выводом на экран графика потенциальной функции $V(x, a)$ для того, чтобы обнаружить наличие и количество стационарных равновесий изучаемой динамической системы вида

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} V(x, \xi), \xi \in \Sigma \subseteq R^n,$$

при изменении параметра a в управляющем пространстве параметров Σ . Одной из трудностей, возникающих при попытке изобразить проекцию катастрофы, является чрезмерная громоздкость записи уравнения бифуркационной поверхности и ее проекций через управляющие параметры. В данной статье приводится алгоритм, позволяющий обойти указанную сложность и получить уравнения сечений бифуркационной поверхности двумерными плоскостями.

Одной из решаемых задач было обеспечение возможности интерактивного отображения текущего состояния динамической системы при изменении пользователем системы управляющих параметров.

Аналогичные компьютерные программы создавались и за рубежом [3, 4].

Описание алгоритма

Алгоритм состоит из следующих шагов:

1. Строим уравнение бифуркационной поверхности в параметрической форме. Один из способов параметризации приведен у Постопа [2]. На выходе имеем уравнение в следующей форме (параметрическое управляющее пространство Σ):

$$V_{bif} = (\xi_1, \dots, \xi_n), \quad (1)$$

где $\phi_i = \phi_i(u_1 \dots u_n)$ и $\phi_i \in R[u_1 \dots u_n]$.

2. Выбираем два параметра $\xi_l, \xi_m \in \Sigma$, далее будем называть их «опорными» и задаем им граничные значения: $a_{\min} < \xi_l < a_{\max}, b_{\min} < \xi_m < b_{\max}$. Затем фиксируем точку $c \in \Sigma$ и строим уравнение пересечения бифуркационной поверхности с плоскостью

$$P_c = (\xi'_1, \dots, \xi'_n), \quad (2)$$

где $\xi'_i = c_i \forall i \neq l, m$.

Решаем уравнения относительно u_i . На выходе получаем следующую функциональную зависимость опорных параметров:

$$\xi_l(\omega) = v(c_1, \dots, c_k, \dots, c_n, \omega),$$

$$\xi_m(\omega) = v(c_1, \dots, c_k, \dots, c_n, \omega), k \neq l, m.$$

Теперь решим систему неравенств $a_{\min} < \xi_l(\omega) < a_{\max}$ и $b_{\min} < \xi_m(\omega) < b_{\max}$. Для этого для каждого неравенства решаем пару граничных уравнений. Для локализации корней, область определения каждого уравнения на интервалы, где исследуемая функция монотонна, и проверим, содержит ли каждый полученный вариант граничное значение. После этого любым подходящим численным методом получаем приближения корней граничных уравнений. Таким образом, для каждого неравенства получаем систему интервалов для параметра $\xi_m(\omega)$.

В качестве наглядного примера, рассмотрим катастрофу типа «ласточкин хвост». Ее потенциальная функция имеет следующий вид:

$$V = x^5 + ax^3 + bx^2 + cx, \quad (3)$$

или в параметризированной форме [2]:

$$P(u, v, t) = (3u - 6v^2, -6uv + 8v^3, 3uv^2 - 15v^4). \quad (4)$$

В рассматриваемом случае, управляющее пространство трехмерно и можно построить три проекции: P_{AB} , P_{AC} и P_{BC} . Для определенности зафиксируем $c_0 = 1$, тогда

$$u_c = \frac{1}{3v^2}(c_0 + 15v^4), \quad (5)$$

подставляя полученное значение в уравнение (4), получаем:

$$P_a(a, b, c) = \left(\frac{c_0}{v^2} + 9v^2, -\frac{2c_0}{v} - 22v^3, c_0 \right). \quad (6)$$

Далее выберем диапазон изменения контрольных параметров a (рис. 1) и b (рис. 2): $-20 < a < 20, -20 < b < 20$. Указанным выше способом найдем интервалы:

$$\tau_a = \{ [-1.50703 \dots -0.221185], [0.221185 \dots 1.50703] \};$$

$$\tau_b = \{ [-1.02788 \dots -0.198299], [0.198299 \dots 1.02788] \};$$

их пересечение (рис. 3):

$$\tau_a \cap \tau_b = \{ [-1.02788 \dots -0.221185], [0.221185 \dots 1.02788] \}.$$

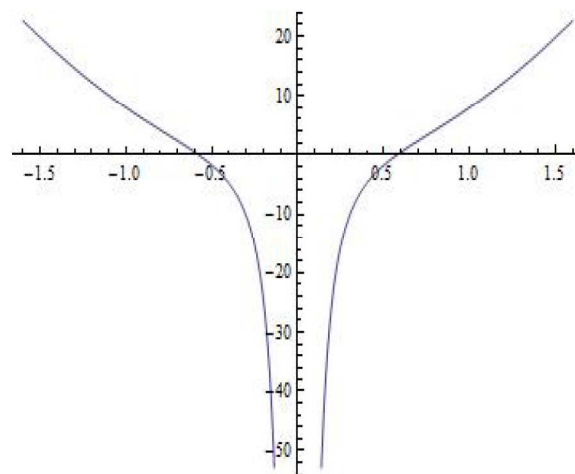


Рис. 1. График функции $a = a(v)$

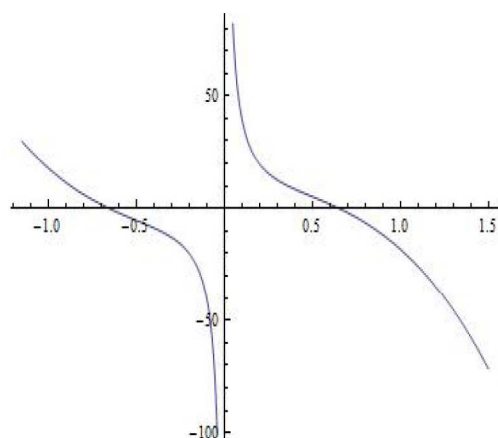


Рис. 2. График функции $b = b(v)$

Теперь подставляя полученные интервалы в (6) рисуем фрагмент сечения (рис. 3), ограниченный заданными нами значениями.

Таким образом, применение описанного алгоритма позволило получить график бифуркационной поверхности при заданном наперед ограничении управляющих параметров.

Для работы алгоритма необходимо знать потенциальную функцию катастрофы вместе с ее первой производной, остальные параметры могут быть вычислены исходя из имеющихся данных. Обладая полученной информацией, легко получить график потенциальной функции при $V_R = \langle V(x, \omega), a(\omega), b(\omega) \rangle$ для критических значений, управляющих параметров (рис. 4). Последнее может быть использовано при исследовании поведения сложных динамических систем находящихся «на грани срыва».

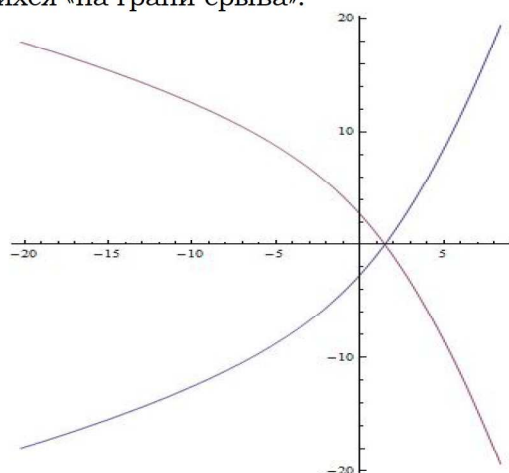


Рис. 3. Сегмент сечения бифуркационной поверхности при $a \in [-20, 20]$ и $b \in [-20, 20]$

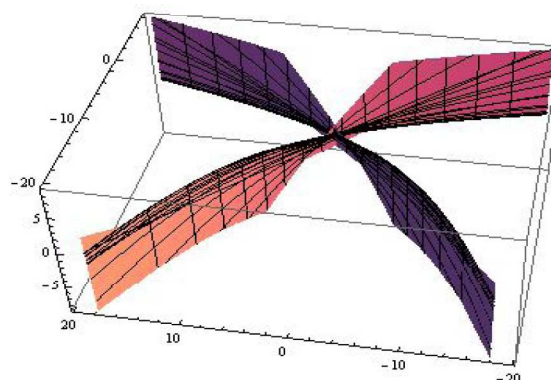


Рис. 4. График зависимости потенциала катастрофы «ласточкин хвост» от параметров a и b при заданном параметре c

Заключение

На основе описанного выше алгоритма, на языке Java¹ с использованием графического расширения Processing², был разработан программный продукт, работающий в качестве веб-апплета. Программа позволяет пользователю в интерактивном режиме наблюдать изменение потенциала катастрофы при перемещении точки в пространстве управляющих параметров. Благодаря реализации вышеописанных идей исследователь имеет возможность произвольно изменять управляющие параметры. Изменение хотя бы одного управляющего параметра автоматически влечет за собой перерисовку изменившихся проекций и потенциальной функции. Таким образом, наглядность модели сохраняется даже для катастроф с многомерным пространством управляющих параметров. Количественная часть при этом не страдает, так как возможность отслеживания значений управляющих параметров при передвижении точки в какой-либо проекции обеспечивается представленным алгоритмом.

ПРИМЕЧАНИЯ

¹ См.: <http://www.java.com>

² См.: <http://www.processing.org>

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Арнольд В. Н. Теория катастроф. М. : Наука, 1990. 128 с.
- [2] Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения. М. : Мир, 1980. 607 с.
- [3] Woodcock A. E. R., Poston T. A geometrical Study of the Elementary Catastrophes, Springer Lecture Notes in Math. 1974. № 373.
- [4] Dujardin L. Catastrophe teacher: an introduction for experimentalists. URL: http://pagesperso-orange.fr/l.d.v.dujardin/ct/eng_index.html