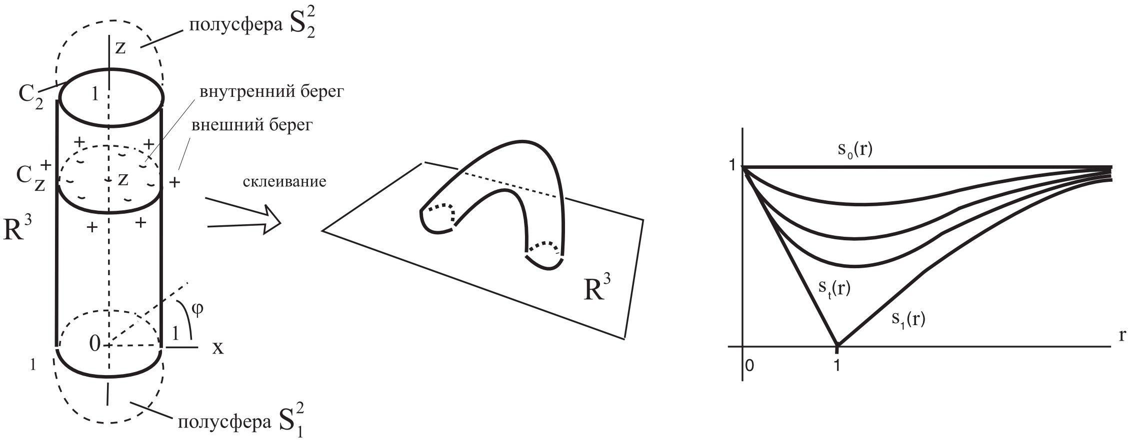
МОДЕЛЬ ОБРАЗОВАНИЯ РУЧКИ В 3-МЕРНОМ РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

АЛЕКСАНДР ГУЦ

Математически образование ручек в 3-мерном многообразии достаточно подробно описано с рамках дифференциальной топологии. Но эти описания плохо удовлетворяют потребностям практической геометрии и особенно потребностям тех, кто работает в области общей теории относительности, являющейся теорией пространства-времени. Необходимо иметь достаточно простую *модель* образования ручки в 3-мерном пространстве как с точки зрения топологии, так и с точки зрения геометрии.

Изменение топологии. Рассмотрим 3-мерное арифметическое пространство $\mathbb{R}^3$. Используем цилиндрическую систему координат в пространстве $\mathbb{R}^3$. Переход к неодносвязному 3-многообразию осуществляется за счет разреза по цилиндру $Z = \{(r, \varphi, z) : r = 1, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le z \le 1\}$ и склеивания точек $(1, \varphi, z)$ отдельно для «внешнего берега» и «внутреннего берега» в точку (для каждого z отдельно) (см. рис.1, a)). Окружности C_1, C_2 и C_z $(0 < z < 1)$, находящиеся на на разных «берегах», стягиваются в точку; при этом полусферы S_1^2 и S_2^2 перестраиваются в сферы, к которым приклеен 3-мерный цилиндр $S^2 \times [0,1]$, получаемый из цилиндра Z при факторизации по отношению эквивалентности $\sim$, описываемому ниже. Как результат, имеем 3-многообразие с приклеенной 3-ручкой. Заметим, что в [1] дана топологически более сложная модель, менее отвечающая поставленной задаче.



a) b)

+

Рис. 1. a) Метаморфоза цилиндра Z; b) Графики функций $s_t(r)$, $t \in [0,1]$.

Для реализации описанной модели образования ручки рассмотрим параметрическое семейство функций $s_t(r)$, $t \in [0,1]$, $r \in [0,+\infty)$, такое, что для любого $r \in [0,+\infty)$

$$s_0(r) \equiv 1, \quad s_t(0) = 1, \quad \lim_{r\to+\infty} s_t(r) = 1$$

и при $r \in (0,+\infty)$ семейство функций s_t представляет непрерывную деформацию функции s_0 в функцию s_1, причем все $s_t(x)$ непрерывны вместе с первыми производными. Единственной функцией, производная которой имеет разрыв первого рода в точке $r = 1$ является $s_1(x)$ (см. рис. 1, b)). Наконец, пусть

$$\lim_{r\to1-0} s_1'(r) = -1, \quad \lim_{r\to1+0} s_1'(r) = +1.$$

Рассмотрим топологическое подпространство $\Gamma_t = \{(r,\varphi,z), s_t(r), s'_t(r\pm 0)\}$ с индуцированной топологией пятимерного арифметического пространства $\mathbb{R}^5$, где $s'_t(r\pm 0) = \lim_{\rho\to r\pm 0} s'_t(\rho)$.

Две точки $((r,\varphi,z),a,\alpha)$ и $((r',\varphi',z'),b,\beta)$ пространства Γ_t назовем эквивалентными тогда и только тогда, когда, во-первых,

1) $(r,\varphi,z)=(r',\varphi',z')$; 2) $a=b$; 3) $\lim_{\rho\to r-0} s'_t(\rho) = \lim_{\rho\to r+0} s'_t(\rho)$;

и, во-вторых,

2) $r=1,\ 0\le\varphi',\varphi\le 2\pi, z'=z\ (0\le z,z'\le 1)$; 2) $a=b$; 3) $(\alpha=\beta=\lim_{\rho\to 1-0} s'_t(\rho)=-1)$;

и, в-третьих,

3) $r=1,\ 0\le\varphi',\varphi\le 2\pi, z'=z\ (0\le z,z'\le 1)$; 2) $a=b$; 3) $(\alpha=\beta=\lim_{\rho\to 1+0} s'_t(\rho)=+1)$.

Профакторизуем пространство Γ_t по введенному отношению эквивалентности $\sim$. В результате при при $t=1$ пространство $\mathbb{R}^3$ превращается в многообразие с ручкой, т.е. в неодносвязное некомпактное 3-многообразию с 3-мерной ручкой, которую физики называют 3-мерной кротовой норой.

Изменение геометрии. Зададим семейство римановых метрик

$$dl_t^2 = A_t^2(r,z)[dr^2+dz^2] + r^2[B_t(r,z)]^{-2}d\varphi^2,$$

отражающих изменение геометрии по мере изменения топологии, где функции A_t, B_t выбираются так, что, во-первых, при $t<1$ они C^2-гладкие и, во-вторых, при $t=1$ имеем:

$$\lim_{r\to 1+0} A_t \neq \lim_{r\to 1-0} A_t, \quad \lim_{r\to 1+0} B_t \neq \lim_{r\to 1-0} B_t \ \text{ при } 0<z<1 \tag{1}$$

и

$$A_t(1,z)[B_t(1,z)]^{-1} \to 0 \ \text{ при } \ t\to 1-0 \ \ (0\le z\le 1).$$

Последнее условие – это геометрическое отражение условия стягивания окружностей C_1, C_z, C_2 в точку, при котором их длина должна стремиться к нулю.

Более точным, вместо условий (1) было бы условие наличия разрыва конечного скачка у функции B_t по переменной r:

$$\lim_{r\to 1+0} \frac{\partial B_t}{\partial r} \neq \lim_{r\to 1-0} \frac{\partial B_t}{\partial r} \ \text{ при } 0<z<1. \tag{2}$$

Это говорит о нарушении гладкости, как компонент тензора кривизны, так и тензора Риччи. Если принять, что риманово многообразие замкнутое (или провести его компактификацию), и использовать формулы типа Черна-Гаусса-Бонне, например формулы Ревентоса [2], то это будет говорить о том, что при $t=1$ за счет разрыва кривизны меняется одно из чисел Бетти, а точнее, $\beta_1(M^3)$. Иными словами, образуется ручка.

Физическая интерпретация. С точки зрения описания динамики образования ручки в 3-пространстве M^3 (на языке физиков – кротовой норы) в пространстве-времени с метрикой

$$dl_t^2 = A_t^2(r,z)[dr^2+dz^2] + r^2[B_t(r,z)]^{-2}d\varphi^2 - [B_t(r,z)]^2dt^2,$$

условие (2) означает появление δ-функции $\delta(r)$ в правой части вакуумных уравнений Эйнштейна, трактуемое как включение источника энергии на границе цилиндра Z в момент времени $t=1$. Именно этот приток энергии и меняет топологию 3-мерного пространства, делая ее неодносвязной.

Список литературы

[1] А. Гуц, *Физика реальности*, Омск, Изд-во КАН, (2013).

[2] A. Reventos, "On the Gauss-Bonnet formula on the odd-dimensional manifolds ", *Tohoku Math. J.*, 31, No. 2, 165–178 (1979).

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, 644077, Россия
E-mail address: guts@omsu.ru