Математические структуры и моделирование
2015. №2(34). С. 5–15

УДК 512.81+512.545

КОНТИНГЕНЦИЯ ПОРЯДКОВ В ОДНОРОДНЫХ АФФИННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

А.К. Гуц
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru
Г.Б. Гольдина
студентка, e-mail: zoloto13@list.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. Доказан слабый вариант теоремы Александрова о контингенции для однородных аффинных многообразий.

Ключевые слова: Порядки, аффинная структура, однородное аффинное многообразие, контингенция.

Введение

Исследования связно упорядоченного аффинного пространства A^n, $n \geq 2$, в случае порядка $\mathcal{P}$, инвариантного относительно группы параллельных переносов, привели, благодаря работе А.Д. Александрова [1], к полному описанию группы порядковых автоморфизмов $Aut(\mathcal{P})$.

Аналогичный результат был достигнут при изучении порядка, инвариантного относительно основной аффинной группы Ли [2, 3].

Основным инструментом этих исследований была теорема о контингенции, с помощью которой изучение порядковых автоморфизмов сводилось к изучению автоморфизмов порядков, задаваемых конусами.

В данной статье дается доказательство «слабой» теоремы о контингенции для упорядоченных связных односвязных разрешимых групп Ли, снабжённых полной левоинвариантной аффинной структурой.

1. Предпорядок, порядок и порядковые автоморфизмы

Определение 1. *Предпорядок* на множестве $\mathcal{M}$ — это семейство подмножеств $\mathcal{P} = \{P_x : x \in \mathcal{M}\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

O1) каждой точке $x \in \mathcal{M}$ сопоставлено подмножество $P_x \subset \mathcal{M}$;

O2) $x \in P_x$ для любой точки $x \in \mathcal{M}$;

O3) если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$.

Если $P_x \neq \{x\}$, то предпорядок называется *нетривиальным*. В противном случае — *тривиальным*.

Вводим отношение предпорядка

$$x \preceq y \ \Leftrightarrow y \in P_x.$$

Полагаем

$$P_x^- = \{y \in \mathcal{M} : y \preceq x\}.$$

Определение 2. *Порядок* на множестве $\mathcal{M}$ — это семейство подмножеств $\mathcal{P} = \{P_x : x \in \mathcal{M}\}$, удовлетворяющее условиям O1) - O3) определения 1 и дополнительному условию:

O4) если $y \neq y$, то $P_x \neq P_y$.

Определение 3. Биективное отображение $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, удовлетворяющее условию $f(P_x) = P_{f(x)}$ для любой точки $x \in \mathcal{M}$, где $\mathcal{P}$ — предпорядок в $\mathcal{M}$, будем называть *порядковым автоморфизмом*, или $\mathcal{P}$*-автоморфизмом*.

Из определения следует, что обратное отображение f^{-1} также является $\mathcal{P}$-автоморфизмом, т.е. $f^{-1}(P_x) = P_{f^{-1}(x)}$ для любой точки $x \in A^n$.

Обозначим через $Aut(\mathcal{P})$ множество всех $\mathcal{P}$-автоморфизмов, а через $Aut_c(\mathcal{P})$ множество всех непрерывных $\mathcal{P}$-автоморфизмов.

Ясно, $Aut(\mathcal{P})$ является группой относительно операции композиции.

Пусть дан предпорядок $\mathcal{P}$ в топологическом пространстве $\mathcal{M}$.

Говорим, что предпорядок $\mathcal{P}$ — *замкнутый*, если все P_x – замкнутые множества; предпорядок $\mathcal{P}$ — *открытый*, если все множества $P_x \setminus \{x\}$ открыты.

2. Инвариантные порядки в A^n

Пусть на аффинном пространстве A^n действует группа G преобразований этого пространства.

Определение 4. Порядок $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$, заданный в A^n, называется G*-инвариантным* (или инвариантный относительно группы G), если для любого $x \in A^n$ и любого $g \in G$ $\;g(P_x) = P_{g(x)}$.

Говорим, что группа G преобразований действует на A^n *транзитивно*, если для любых $x,\ y \in A^n$ найдётся $g \in G$ такое, что $g(x) = y$. Если для любых $x,\ y \in A^n$ найдётся единственный элемент $g \in G$ такой, что $g(x) = y$, то группа G действует *эффективно* или *просто транзитивно* на A^n.

В случае порядка G-инвариантного относительно просто транзитивной группы G свойства множеств P_x точно такие же, как у конкретного множества P_e, взятого в выделенной точке $e \in A^n$. Поэтому часто можно говорить о свойствах порядка, говоря только о множестве P_e. В силу того, что $P_x = g(P_e)$, где $x = g(e),\ g \in G$, видна определяющая роль множества P_e при задании порядка $\mathcal{P}$. Будем в таком случае говорить, что *множество* P_e *задаёт порядок* $\mathcal{P}$.

Будем также писать P вместо P_e.

Определение 5. Порядок $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$, заданный в A^n, называется *релятивистским*, если он инвариантен относительно группы параллельных переносов.

2.1. Конусы

Под *конусом* в аффинном пространстве A^n $(n \geq 2)$ понимается множество точек K, состоящее из лучей — *образующих конуса* — с началом в точке e, которую называем *вершиной* конуса.

В случае, когда P_x — конус и $P_x \setminus \{x\}$ — открытое множество, говорим об *открытом конусе*.

2.2. Теоремы о контингенции для релятивистских порядков в A^n

Определение 6. Пусть множество $M \subset A^n$. *Контингенцией* $cont(M, a)$ множества M в точке a называется конус, составленный из всевозможных пределов лучей $l^+(a, x)$, где $x \in M$ при стремлении x к a. Если a не является предельной точкой множества M, то такого конуса нет. Но тогда можно считать, что $cont(M, a) = \{a\}$ — «нулевой конус».

Нам нужна

> **Аксиома** A_2. *Для любых точек $x, y \in \mathcal{M}$ таких, что $y \in P_x$, множество $P_x \bigcap P_y^-$ ограничено.*

Пусть $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n, \ n \geq 2\}$ задаёт порядок в аффинном пространстве A^n. Назовём *направленной кривой*, исходящей из точки x, образ полуоси $[0, \infty)$ при непрерывном и монотонном (не убывающем по отношению к порядку на $[0, \infty)$ и порядку $\mathcal{P}$ в A^n) отображении $f : [0, \infty) \to A^n$, при котором число 0 отображается в x. Очевидно, всякая направленная кривая, исходящая из x, содержится в P_x.

Следовательно,

$$\forall t_1, t_2 \in [0, \infty) \ (t_1 \leq t_2 \Rightarrow f(t_1) \preceq f(t_2) \text{ или } P_{f(t_2)} \subset P_{f(t_1)}).$$

Следующая теорема А.Д. Александрова [1] даёт информацию о «внешнем виде» контингенции:

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{P}$ задаёт предпорядок в A^n $(n \geq 2)$ и $C = cont(P, e)$. Тогда*

1) *$C \subset \overline{P}$ и C — замкнутый выпуклый конус.*

2) *Если P — замкнутое множество, удовлетворяющее аксиоме A_2, то C — конус с острой вершиной, совпадающий с объединением S всех направленных кривых, исходящих из точки e.*

И, наконец, ответ на вопрос, чем же так хорошо множество $cont(P_x, x)$, связанное с порядком $\mathcal{P} = \{P_x : x \in A^n\}$, дает следующая [1]

Теорема 2. *Пусть $f : A^n \to A^n$, $n \geq 2$, — непрерывный $\mathcal{P}$-автоморфизм, $\mathcal{P}$ — замкнутый предпорядок, удовлетворяющий аксиоме A_2.*

Тогда $f(C_x) = C_{f(x)}$, где $C = cont(P, e)$, для любой точки $x \in A^n$.

3. Аффинные структуры и аффинные многообразия

Пусть V^n n-мерное дифференцируемое многообразие, где $n \geq 1$.

Определение 7. Аффинный атлас $\mathcal{A}$ на n-мерном многообразии V^n есть совокупность покрывающих V^n локальных карт таких, что любая функция перехода между картами из $\mathcal{A}$ продолжается до аффинного преобразования пространства $\mathbb{R}^n$. Максимальный аффинный атлас есть *аффинная структура* на V^n. Многообразие V^n, оснащённое аффинной структурой, называется n-мерным *аффинным многообразием*.

Каждая локальная карта аффинной структуры определяет *аффинные координаты*.

Отображение $f : V^n \to V^k$ аффинных многообразий V^n, V^k называется *аффинным*, если оно, будучи выраженным в аффинных координатах, является ограничением аффинного преобразования из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^k$.

Множество всех аффинных отображений аффинного многообразия V^n обозначим через $\mathrm{Aff}(V^n)$.

На аффинном многообразии V^n имеется естественная линейная связность ∇ с нулевой кривизной и кручением: в аффинных координатах она является стандартной связностью на $\mathbb{R}^n$. Ковариантное дифференцирование относительно ∇ в V^n отвечает обычному дифференцированию в $\mathbb{R}^n$.

Аффинное многообразие *полное*, если оно геодезически полное (относительно связности ∇).

Аффинное многообразие V^n полное тогда и только тогда, когда оно представимо в виде $\mathbb{R}^n/\Gamma$, где Γ подгруппа аффинных преобразований, действующая свободно и вполне разрывно на $\mathbb{R}^n$ [4, с.61].

Геодезические аффинного многообразия $\langle V^n, \mathcal{A}\rangle$ относительно связности ∇ будем называть *прямыми*. Полугеодезическую, исходящую из точки x, именуем *лучом* с началом x.

Очевидно, образ прямой при аффинной биекции будет всегда прямой. Кроме того, на аффинном многообразии через каждую точку в любом направлении можно провести единственную прямую.

3.1. Однородные аффинные многообразия

Аффинное многообразие $\langle V^n, \mathcal{A}\rangle$ будем называть *однородным*, если на нем действует транзитивно аффинная подгруппа $T \subset \mathrm{Aff}(V^n)$. Причём, если T связная группа Ли, действующая просто транзитивно на V^n, то T диффеоморфна V^n. Следовательно, T оснащается аффинной структурой, в которой левые сдвиги являются аффинными биекциями. Другими словами, группа T приобретает левоинвариантную аффинную структуру.

Если G вещественная связная односвязная группа Ли, оснащённая левоинвариантной аффинной структурой, тогда G допускает *аффинное представление*, т.е. существует гомоморфизм

$$\alpha : G \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n).$$

Причём $\alpha(G)$ сохраняет область $D(G) \subset \mathbb{R}^n$ и действует транзитивно на ней [5].

Обратно, если $dim\ G = n$ и $\alpha : G \to \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ аффинное представление, имеющее открытую орбиту, тогда можно оснастить G единственной левоинвариантной аффинной структурой [5].

При изучении вещественных связных односвязных групп Ли G с левоинвариантными аффинными структурами, которые являются полными, полезно иметь в виду, что группа $\alpha(G)$ действует просто транзитивно на $\mathbb{R}^n$. Известно, что при этом G должна быть разрешимой, и можно изучать вместо аффинной геометрии на G фигуры аффинной геометрии на $\mathbb{R}^n$, но инвариантные относительно группы $\alpha(G)$.

Предложение 1. *Пусть группа Ли G оснащена полной левоинвариантной структурой. Каждая прямая есть однопараметрическая подгруппа группы Ли G тогда и только тогда, когда каждая однопараметрическая подгруппа есть прямая.*

Доказательство. Пусть каждая прямая есть однопараметрическая подгруппа группы Ли G является прямой. Докажем, что каждая однопараметрическая подгруппа есть прямая.

Предположим, что это не верно. Возьмём однопараметрическую подгруппу $\omega_\xi(t)$ с касательным вектором ξ в e. В направлении ξ проведём прямую L. По условию прямая L является однопараметрической подгруппой. Поскольку в одном направлении двух однопараметрических подгрупп быть не может, то получаем, что $\omega_\xi(t) = L$. Получили противоречие с нашим предположением.

Обратно. Пусть каждая однопараметрическая подгруппа есть прямая, но не каждая прямая является однопараметрической подгруппой. Например таковой является прямая L. Пусть эта прямая проходит через e в направлении ξ. Выпустим в направлении ξ однопараметрическую подгруппу $\omega_\xi(t)$. По условию она является прямой. Поскольку в одном направлении двух прямых не бывает, то $L = \omega_\xi(t)$. Получили противоречие с нашим предположением.

Таким образом, предложение 1 доказано.

■

4. Теорема о контингенции

Рассматриваем связную односвязную разрешимую группу Ли G, оснащённую полной левоинвариантной аффинной структурой. Через e обозначаем единицу группы.

Пусть $\mathcal{P} = \{P_x : x \in G\}$ — левоинвариантный порядок на G, т.е.

$$g(P_x) = P_{g\cdot x}.$$

Определение 8. *Контингенцией* $C = cont(P_e, e)$ множества P_e в e называется конус, составленный из всевозможных пределов лучей $l^+(e, x)$, исходящих из e и проходящих через x, где $x \in P_e$, при стремлении x к e. Если e не является предельной точкой множества P_e, то такого конуса нет. Но тогда можно считать, что $cont(P_e, e) = \{e\}$ — «нулевой конус».

Пусть $\mathcal{P} = \{P_x : x \in G,\ \dim G \geq 2\}$ задаёт предпорядок в группе Ли G. Назовём *направленной кривой*, исходящей из точки e, образ полуоси $[0, \infty)$ при непрерывном и монотонном (не убывающем по отношению к порядку на $[0, \infty)$ и порядку $\mathcal{P}$ в G) отображении $\omega : [0, \infty) \to G_n$, при котором число 0 отображается в e. Очевидно, всякая направленная кривая, исходящая из e, содержится в P_e.

Следовательно,

$$t_1 \leq t_2 \Rightarrow \omega(t_1) \preceq \omega(t_2) \text{ или } P_{\omega(t_2)} \subset P_{\omega(t_1)}.$$

Вещественная конечномерная группа Ли G, для которой экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{g} \to G$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G является диффеоморфизмом, называется *экспоненциальной*.

Любая экспоненциальная группа Ли разрешима и односвязна. Всякая вполне разрешимая группа Ли (в частности, нильпотентная группа Ли) экспоненциальна, если она односвязна [1].

Следующая теорема дает информацию о «внешнем виде» контингенции:

Теорема 3. *Пусть G, $\dim G \geq 2$ связная односвязная экспоненциальная разрешимая группа Ли, оснащённая полной левоинвариантной аффинной структурой и каждая прямая которой является однопараметрической подгруппой. Пусть $\mathcal{P}$ задаёт замкнутый предпорядок в G, удовлетворяющий условию* (A)*: существует окрестность U точки e такая, что $P_e \cap P_e^- \cap U = \{e\}$. Тогда*

(1) *$C = cont(P_e, e) \subset P_e$ и C — замкнутый выпуклый конус с острой вершиной e.*

(2) *C содержится в объединении S всех направленных кривых, исходящих из точки e.*

Доказательство. (1) Луч контингенции C — это луч l, исходящий из e и содержащийся в C.

Пусть l – луч контингенции. Он является пределом лучей $l_N = l(e, x_N), x_N \in \in P_e$.

По предложению 1 каждый $l_N = l(e, x_N)$ луч является однопараметрической подполугруппой $\omega_N(t)$, $t \geq 0$, и $x_N = \omega_N(t_0)$. Имеем

$$e \preceq x_N \Rightarrow x_N \preceq x_N \cdot x_N = \omega_N(t_0)\omega_N(t_0) = \omega_N(2t_0) = x_N^2 \subset l_N \cap P_e.$$

Обозначим, $k \cdot x_N \equiv \omega_N(kt_0), k = 1, 2, ...$ Тогда получаем, что все точки вида $k \cdot x_N$ будут принадлежать лучу $l_N \cap P_e$.

При $x_N \to e$ точки $k \cdot x_N \in P_e$ сгущаются на лучах l_N, и их пределы дают точки луча l, т.е. каждая точка $x_0 \in l$ луча l есть предел точек множества P_e. Значит, $x_0 \in \overline{P_e}$ и, следовательно, $l \subset P_e$, т.е. $C \subset P_e$.

Докажем это. Берём $x_0 \in l$, и пусть $\omega(t)$ параметризация луча l.

[1] См. «Математическую энциклопедию».

Имеем
$$l = \overline{\left\{\omega\left(\frac{m}{n}\right) : \forall m, n \geq 0 - \text{целые}\right\}}.$$
Пусть U_{x_0} – произвольная окрестность точки x_0 и $x_0 = \omega(t_0)$. Выберем m, n так, что $\omega(m/n) \in U_{x_0}$.

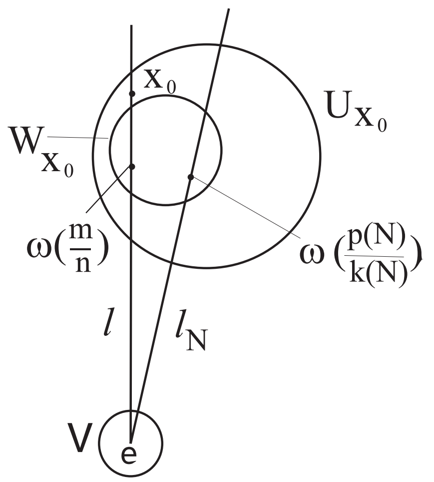

Рис. 1.

Полагаем
$$\omega\left(\frac{m}{n}\right) = \underbrace{\omega\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \omega\left(\frac{1}{n}\right)}_{m} \equiv m \cdot \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$
Так как групповая операция непрерывна, то по окрестности U_{x_0} можно найти окрестность единицы V такую, что
$$m \cdot \omega\left(\frac{1}{n}\right) V \subset U_{x_0}.$$
Поясним это. Пусть
$$a = m \cdot \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Если дан левый сдвиг $L_a : x \to a \cdot x$, то $L_a : e \to a$. Но L_a — это гомеоморфизм на G и, значит, для любой окрестности O_a существует окрестность единицы V такая, что $L_a(V) \subset O_a$. В нашем случае, $a \in U_{x_0}$. Берём $O_a \subset U_{x_0}$. Но тогда
$$L_a(V) \equiv a \cdot V \equiv m \cdot \omega\left(\frac{1}{n}\right) O_a \subset U_{x_0}.$$
Пусть теперь
$$\omega_N(t) - \text{параметризация луча } l_N.$$
Имеем
$$l_N = \overline{\{\omega_N\left(\frac{p}{k}\right) : \forall p, k \geq 0 - \text{целые}\}}.$$

Берём окрестность $W_{x_0} \subset U_{x_0}$. Существуют числа $p(N), k(N)$ такие, что

$$\omega_N\left(\frac{p(N)}{k(N)}\right) \in W_{x_0}$$

или

$$p(N) \cdot \omega_N\left(\frac{1}{k(N)}\right) \in W_{x_0} \subset U_{x_0}.$$

Без ограничения общности считаем, что

$$x_N = \omega_N\left(\frac{1}{k(N)}\right).$$

Тогда

$$p(N) \cdot x_N \in W_{x_0} \subset U_{x_0},$$

что мы и доказывали.

Тем самым мы пояснили, что значит «точки $k \cdot x_N$» сгущаются на лучах l_N, и тем самым доказали часть первого утверждения теоремы 3.

Выпуклость контингенции следует из работы Э.Б. Винберга [6].

Покажем, что конус C имеет острую вершину e. Предположим, что это не верно. Тогда имеется прямая $L \subset C$ и $e \in C$. По доказанному выше, $L \subset P_e$. По предложению 3 прямая L является однопараметрической подгруппой, т.е. $L = \omega(t), t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим луч $l = \omega(t), t \geq 0$ (или $t \leq 0$). Это однопараметрическая подполугруппа; для любого $t \geq 0$ $\omega(t) \succeq e$. Следовательно, $\omega(-t)\omega(t) \succeq \omega(-t)$ и $\omega(-t) \preceq e$, т.е. $\omega(-t) \in P_e^-$.

Поскольку знак t при взятии луча не играет роли, то получаем, что $\forall t \omega(t) \in P_e^-$ и, таким образом, $L \subset P_e^-$. Следовательно, $L \subset P_e \cap P_e^-$. Но это противоречит условию (A).

Итак, утверждение (1) теоремы доказано.

(2) Докажем второе утверждение теоремы.

Пусть l – луч контингеници. Покажем, что он является направленной кривой. Надо показать, что если $x, y \in l$, то либо $x \preceq y$, либо $y \preceq x$, либо $x = y$.

Пусть $\omega(t),\ t \geq 0$ параметризация луча l и $x = \omega(t_1)$, $y = \omega(t_2)$, $t_1 \leq t_2$.

Тогда, раз $l \subset C \subset P_e$, то $x, y \in P_e$

$$x \cdot l = \{\omega(t_1) \cdot \omega(t) : t \geq 0\} = \{\omega(t_1 + t) : t \geq 0\} \subset \{\omega(t) : t \geq 0\} = l.$$

Так как $t_2 = t_1 + \tau$ и $l \subset P_e$, то

$$y \in x \cdot l \subset x \cdot P_e = P_{x \cdot e} = P_x,$$

т.е. $P_y \subset P_x$, или $x \preceq y$. Второе утверждение теоремы 3 доказано.

Теорема 3 доказана.

■

5. Группы Ли, каждая прямая в которых является однопараметрической подгруппой

Приведём примеры экспоненциальных групп Ли, оснащённых аффинной структурой, в которых каждая прямая является однопараметрической подгруппой.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является *нильпотентной шага* $k > 0$, где k — целое число, если

$$\mathfrak{b}^{k-1}\mathfrak{g} \neq \{0\}, \quad \mathfrak{b}^k\mathfrak{g} = \{0\},$$

где операция $\mathfrak{b}^k$ определяется посредством индукции:

$$\mathfrak{b}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{b}^k\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{b}^{k-1}\mathfrak{g}].$$

1. Нильпотентные группы Ли шага 2.

Обозначим $\exp^{-1}(x) = X$, $x \in G$, $X \in \mathfrak{g}$. Если $X = \sum_i x^i X_i$, где X_i — базис в $\mathfrak{g}$, то элементу x ставим в соответствие *координаты 1-го рода*:

$$G \ni x \to (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Для нильпотентных алгебр Ли шага 2

$$\exp^{-1}(xy) = X * Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y].$$

Имеем

$$X * Y = \sum_i x^i X_i + \sum_i y^i X_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j} x^i y^j [X_i, X_j] =$$

$$= \sum_k \left(x^k + y^k + \frac{1}{2}\sum_{i,j} c^k_{ij} x^i y^j \right) X_k.$$

Поэтому

$$(xy)^k = x^k + y^k + \frac{1}{2}\sum_{i,j} c^k_{ij} x^i y^j.$$

Левый сдвиг $L_a(x) = ax$ записывается в таком случае в виде

$$[L_a(x)]^k = a^k + x^k + \frac{1}{2}\sum_{i,j} c^k_{ij} a^i x^j \tag{1}$$

$$a \to (a^1, ..., a^n), \quad x \to (x^1, ..., x^n).$$

Видим, что левые сдвиги задаются аффинными преобразованиями (1). Следовательно, имеем аффинную структуру на нильпотентной группе Ли шага 2.

Прямая $\omega(t)$, проходящая через единицу e, в канонических координатах 1-го рода задаётся как

$$[\omega(t)]^k = ta^k.$$

Пусть $Z = \sum_i a^i X_i$ — направляющий вектор данной прямой. Имеем

$$\omega(t_1)\omega(t_2) = (t_1 Z) * (t_2 Z) = t_1 Z + t_2 Z + \frac{1}{2}[t_1 Z, t_2 Z] = (t_1 + t_2) Z = \omega(t_1 + t_2).$$

Это говорит о том, что прямая является однопараметрической подгруппой. По предложению 1 верно и обратное, т.е. однопараметрические подгруппы являются прямыми.

2. Группа Гейзенберга G_3II.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}_3$II группы Гейзенберга задаётся коммутационными соотношениями:

$$[X_1, X_2] = 0, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = 0.$$

Имеем

$$b^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3 II, \quad \mathfrak{b}^1\mathfrak{g} = \{X_1\},$$

$$b^2\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}_3\mathrm{II}, \mathfrak{b}^1\mathfrak{g}] = \{[X_1, X_1], [X_2, X_1], [X_3, X_1]\} = \{0\}.$$

Следовательно, алгебра Гейзенберга является нильпотентной шага 2. Поскольку в канонических координатах 1-го рода

$$\begin{aligned} &[L_x(y)]^1 = (xy)^1 = x^1 + y^1 + \frac{1}{2}(x^2 y^3 - x^3 y^2), \\ &[L_x(y)]^2 = (xy)^2 = x^2 + y^2, \\ &[L_x(y)]^3 = (xy)^3 = x^3 + y^3, \end{aligned} \tag{2}$$

то имеем на G_3II левоинвариантную аффинную структуру.

Литература

1. Александров А.Д. Отображения упорядоченных пространств // Тр. Математ. ин-та АН СССР. 1972. Т. 128. С. 3–21.
2. Гуц А.К. Отображения упорядоченного пространства Лобачевского // Докл. АН СССР. 1974. Т. 215, № 1. С. 35–37.
3. Гуц А.К. Отображения упорядоченного пространства Лобачевского // Сиб. мат. ж. 1986. Т. 27, № 3. С.51–67.
4. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны. М. : Наука, 1982.
5. Fried D., Goldman M., Hirsch M. Affine manifolds with nilpotent holonomy // Comment. Math. Helv. 1981. V. 56, № 4. P. 487–523.
6. Винберг Э.Б. Инвариантные выпуклые конусы и упорядочения в группах Ли // Функ. анализ и его прил. 1980. Т. 14, Вып. 1. С. 1–13.

CONTINGENCE OF ORDERS IN HOMOGENEOUS AFFINE MANIFOLDS

A.K. Guts
Dr.Sc.(Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru
G.B. Goldina
Student, e-mail: zoloto13@list.ru

Omsk State University n.a. F.M. Dostoevskiy

Abstract. The weak version of the Alexandrov's theorem for the homogeneous affine manifolds is proven.

Keywords: Orders, affine structures, homogeneous affine manifolds, contingence.