К столетию общей теории относительности

УДК 530.12:531.51

А. К. Гуц[1]

ПРИНЦИП ОБЩЕЙ КОВАРИАНТНОСТИ И ЭКЗОТИЧЕСКИЕ $\mathbb{R}^4$ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Обсуждается роль принципа общей ковариантности в общей теории относительности. Показано, как он привел к рассмотрению гладких структур при построении теории пространства-времени. Представлены экзотические гладкие структуры для $\mathbb{R}^4$; способы их построения и свойства. Дан обзор физических эффектов, которые могут наблюдаться в том случае, когда в реальном пространстве-времени локализуется экзотичность гладкой структуры.

Ключевые слова: Общая теория относительности, принцип общей ковариантности, пространство-время, гладкая структура, экзотическая гладкость

PACS: 34D08, 93C15

Введение

Общая теория относительности (ОТО), созданная Эйнштейном и Гильбертом 100 лет тому назад, строилась изначально на основе принципа общей ковариантности[2], означающего неизменность формулировок физических законов относительно произвольных замен систем координат (локальных карт).

Принцип общей ковариантности был введен Эйнштейном для того, чтобы обобщить специальную теорию относительности (СТО), допуская к рассмотрению в теории не только электромагнитное поле, которое в СТО лоренц-инвариантно, но и гравитационное поле. Согласно принципу эквивалентности, который при построении ОТО считался Эйнштейном важнейшим принципом, позволяющим учитывать гравитацию, пребывание в системе отсчета, в которой действует гравитация, локально эквивалентно нахождению в системе отсчета, движущейся ускоренно. Ускоренные системы отсчета описывались посредством использования нелинейных преобразований координат. Отсюда логически следовало утверждение, что теория, обобщающая СТО и включающая гравитацию, должна быть инвариантной относительно нелинейных преобразований координат.

И хотя было сразу замечено, что гравитация – это проявление искривленности пространства-времени, а не эффект, возникаюший благодаря допущению произвольных замен координат, практически до 1980-х годов учебники по ОТО излагали эту теорию, как основывающуюся на принципах эквивалентности, общей ковариантности и уравнениях Эйнштейна. Эйнштейн писал, что «не остается ничего другого как признать все мыслимые координатные системы принципиально равноправными для описания природы», правда, при условии однозначности и непрерывности [1, с. 459]. И в этой связи виделось, что «построение общей теории относительности должно одновременно привести и к теории тяготения, ибо гравитационное поле можно «создать» простым изменением координатной системы» [1, с. 457].

Допуская различные системы координат, одновременно допускают возможность замены одной системы координат на другую. Эти замены должны быть гладкими отображениями, поскольку физика описывается дифференциальными уравнениями. Требование гладкости замены координат на языке математиков означает введение *гладкой структуры* в пространстве-времени.

[1] E-mail: guts@omsu.ru

[2] В статье 1913 года «Проект обобщенной теории относительности и теории тяготения» Эйнштейн и Гроссман не видели оснований для общей ковариантности полевых уравнений. Позже, в конце 1915 года Эйнштейн писал, что от требования общей ковариантности он тогда «отказался с тяжелым сердцем» [1, с. 425].

При этом на замены координат смотрели как на инструмент, с одной стороны, способствующий решению уравнений Эйнштейна, а с другой стороны, дающий возможность максимально расширить пространство-время, включая в него новые области.

Однако постепенно появились учебники, где ОТО формулировалась как теория лоренцева мнгогообразия M^4, метрика которого удовлетворяет уравнениям Эйнштейна. Координаты и их призвольные замены отошли на задний план и представляли собой способ описания гладкой структуры лоренцева многообразия M^4. Под гладкой структурой понимается максимальный набор всевозможных координат и соответствующих областей многообразия, в которых эти координаты действуют, при условии, что переходы от одних координат к другим

$$x^{i'} = x^{i'}(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad i' = 0, 1, 2, 3,$$

и обратно, являются инъективными отображениеми в областях их определения, и якобиан

$$det \left\| \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right\| \neq 0.$$

При этом неявно предполагается, что гладкая структура пространства-времени M^4 остается той же самой после любой замены системы координат. Иначе говоря, если $f : M^4 \to M^4$ – некоторое физическое движение в пространстве-времени M^4, которое из области действия одной системы координат $\{x^i\}$ переводит описание объекта движения в область действия другой системы координат $\{x^{i'}\}$, то записанное в координатах интуитивно гладкое физическое движение f дает отображение

$$x^{i'} = f^{i'}(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad i' = 0, 1, 2, 3,$$

обязательно являющееся гладким (как и его обратное). Как результат, например, гладкие описания объектов в координатах $\{x^i\}$ остаются гладкими для перемещенных посредством движения f объектов в координатах $\{x^{i'}\}$.

Но поскольку в 1980-е годы для топологического многообразия $\mathbb{R}^4$ было открыто существование несчётного числа экзотических, т. е. недиффеоморфных гладких структур [3, 5, 7], геометрия которых неоднородна [9], то мы можем с удивлением констатировать, что на одном множестве, т. е. на одном и том же наборе элементов, наконец, на одном и том же наборе *вещей в себе*, образующих математическое топологическое многообразие, возможны описания *вещей для нас* с разными физически несовместимыми свойствами.

Иначе говоря, процедура расширения пространства-времени за счет всевозможных замен координат может привести к совершенно непредсказуемым физическим эффектам. Физически неэквивалентные гладкие структуры на пространстве-времени, в таком случае, должны стать объектами исследования физики.

С современной точки зрения пространство-время – это 4-мерное хаусдорфово топологическое многообразие, оснащённое гладкой структурой и лоренцевой метрикой. Свободному движению вещи в гравитационном поле отвечает мировая линия частицы, являющаяся *гладкой* геодезической, несвободному – произвольная, но, опять-таки, гладкая кривая. Но, к примеру, гладкая кривая в $\mathbb{R}^4$ может иметь изломы в недиффеоморфном экзотическом $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$, и, следовательно, летательный аппарат с такой мировой линией в одном мире движется в соответствии с законами механики, а в другом – видится как совершающий мгновенное изменение направления движения, невозможное с точки зрения закона инерции [53].

Важно при этом отметить, что все экзотические гладкие структуры, в том числе и стандартное $\mathbb{R}^4$, *локально эквивалентны*, и, в силу этого в *локальных* координатах выражение физических законов, а это как правило, дифференциальные уравнения, и, следовательно форма этих уравнений и поведение их решений, одинаковы. Значит, экзотическая гладкость проявляется только при изучении дифференцируемой структуры пространства-времени *в целом*, т. е. *глобально* [19, p.13]. Это означает, что при исследованиях, затрагивающих глобальные, космологическике масштабы, недиффеоморфные гладкости по разному сказываются на проявлении физических полей, и мы можем столкнуться с неожиданными физическими эффектами [10, 27].

Поскольку мы трактуем Вселенную как гладкое многообразие, т. е. многообразие с конкретной гладкой структурой, то тоже самое топологическое многообразие с другой, недиффеоморфной гладкой структурой следует рассматривать как иную, скажем, *параллельную* вселенную[3].

[3]На сегодня не существует ясного понимания, что следует иметь в виду под термином «параллельная вселенная».

Таким образом, оказывается, что наши вещи одновременно являются вещами параллельной вселенной и наоборот. Параллельные миры лежат внутри нашего! Мы и есть все параллельные миры! Но мы их не ощущаем, поскольку они соответствуют гладкой структуре недиффеоморфной нашей. А вот переходы между параллельными вселенными можно осуществлять с помощью 4-мерных кротовых нор [11–13].

1. Гладкие структуры и диффеоморфизмы

Гладкая структура в пространстве-времени необходима для того, чтобы ввести лоренцеву метрику g_{ik} таким образом, чтобы отождествив ее с потенциалами гравитационного поля, допусить их дифференцирование, и в силу этого находить их в конкретных физических задачах как решения полевых дифференциальных уравнений, найденных Эйнштейном и Гильбертом.

1.1. Гладкая структура по Борисову

Приведем определения гладкой структуры, принадлежащее проф. Ю. Ф. Борисову[4], который давал его в своем спецкурсе по римановой геометрии в Новосибирском университете в 1968 году.

Пусть M – непустое множество, допускающее покрытие $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$, т. е. $\cup_\alpha M_\alpha = M$, причем для каждого M_α существует биективное отображение $\varphi_\alpha : M_\alpha \to U_\alpha$, где $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ – открытое подмножество.

Предполагаем, что выполняются условия:

1) для любого $x \in M_\alpha \cap M_\beta$ существуют $V_x \subset M_\alpha \cap M_\beta$ и $\varphi : V_x \to U \subset \mathbb{R}^n$ — биекция, а U – открытое множество; при этом отображения $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) : \varphi_\alpha(V_x) \to \varphi_\beta(V_x)$, $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) : \varphi_\beta(V_x) \to \varphi_\alpha(V_x)$, называемые ***функциями перехода***, принадлежат классу гладкости C^m $(m \geq 0)$ (условие гладкости функций перехода).

2) каковы бы ни были $x, y \in M$, существует отображение $f : [0,1] \to V$ такое, что $f(0) = x, f(1) = y$, и если $f(t_0) = x_0 \in M_\alpha,\ t_0 \in [0,1]$, то для всех $t \in [0,1]$, достаточно близких к t_0, $f(t) \in M_\alpha$ и $(\varphi_\alpha \circ f)(t)$ – непрерывное отображение (условие связности)[5].

Пара $< M_\alpha, \varphi_\alpha >$ называется *локальной картой*, или *локальными координатами* на M. Совокупность $\mathcal{A}$ всех локальных карт на M, удовлетворяющих условиям 1), 2), называется *атласом* класса C^m.

Два разных атласа $\mathcal{A}$ $\mathcal{A}'$ класса C^m *эквивалентны*, если объединение их локальных карт образует атлас класса C^m.

Таким образом, на множестве всех атласов класса C^m на M введено отношение эквивалентности, которое разбивает совокупность всех атласов на *классы эквивалентности*.

Пример 1. На $M^1 = \mathbb{R}^1$ существуют неэквивалентные атласы. Пусть первый атлас $\mathcal{A}_1$ содержит карту $\varphi : M^1 \to \mathbb{R}^1$, $\varphi(x) = x$, а второй класс $\mathcal{A}_2$ – карту $\phi : M^1 \to \mathbb{R}^1$, $\phi(x) = x^{1/3}$. Тогда функция перехода

$$(\phi \circ \varphi^{-1})(x) = x^{1/3} \notin C^\infty.$$

Следовательно, $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ не являются эквивалентными.

Определение 1 *Класс эквивалентных атласов класса C^m – это гладкая структура на M класса C^m.*

Как видим, гладкая структура – это максимальный атлас.

Множество M с выбранной для него конкретной гладкой структурой класса C^m называется *n-мерным гладким многообразием класса C^m* или *C^m-многообразием* и обозначается M^n.

В случае, когда $m = 0$, говорят о топологическом n-мерном многообразии.

[4]Борисов Юрий Федорович (1925-2007) – замечательный советский и российский геометр, д.ф.-м.н. профессор Новосибирского государственного университета, ученик А. Д. Александрова. Читал в 1960-е годы в НГУ спецкурс «Риманова геометрия».

[5]Условие связности не является обязательным при определении гладких многообразий. Оно гарантирует топологическое свойство *связности* (линейной связности) гладкого многообразия, т.е. то, что оно не состоит из «двух кусков».

Предложение 1 *На многообразии $M^n = \mathbb{R}^n$ имеется **глобальная** карта*

$$\varphi : M^n \to \mathbb{R}^n,$$
$$\varphi : x \to (x^1, ..., x^n),$$
$$\varphi(x) = (x^1, ..., x^n), \quad x = (x^1, ..., x^n) \in M^n,$$

координаты которой

$$x^i = \varphi^i(x) = \varphi^i(\varphi^{-1}(x^1, ..., x^n)) = [\varphi \circ \varphi^{-1}]^i(x^1, ..., x^n) = x^i$$

являются, очевидно, C^∞-гладкими функциями на $\mathbb{R}^n$.

Определение 2 *Отображение $f : M^n \to N^k$, где M^n, N^k — C^m-гладкие многообразия, называется C^m-гладким, если для любой точки $x \in M^n$ и любых карт $< M_\alpha, \varphi_\alpha >$ многообразия M^n и $< N_\beta, \psi_\beta >$ многообразия N^k, $x \in M_\alpha$, $f(x) \in N_\beta$ функция $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^m$.*

Определение 3 *Отображение $f : M^n \to N^k$, где M^n, N^k — C^m-гладкие многообразия, называется C^m-диффеоморфизмом, если f гомеоморфизм и отображения $f, f^{-1} \in C^m$.*

Ясно, что диффеоморфные многообразия имеют одинаковую размерность. Диффеоморфизм M^n, N^n обозначаем как $M^n \simeq N^n$.

С точки зрения физики диффеоморфизм — это глобальное преобразование, движение в пространстве-времени. В ОТО относительно таких преобразований физические законы инвариантны. Следовательно, если отсутствует диффеоморфизм между многообразиями с разными гладкостями, то скорее всего это говорит о физически недопустимом движении, которое означает наличие физических различий в описании явлений (объектов) в недиффеоморфных гладких многообразиях [13], [19, с. 37].

1.2. Касательные векторы и касательное расслоение

Пусть M^n — гладкое многообразие и $x \in M^n$ – точка на нем. Рассмотрим множество $\{f\}_x$ всевозможных гладких отображений $f : [0,1] \to M^n$, таких, что $f(0) = x$.

Два такие отображения f, g *эквивалентны*, если для (координатных) представлений данных отображений в любой локальной карте $< M_\alpha, \varphi_\alpha >$

$$(\varphi_\alpha \circ f)(t) = (f^1(t), \ldots, f^n(t)) \ \text{ и } \ (\varphi_\alpha \circ g)(t) = (g^1(t), ..., g^n(t)), \quad t \in [0,1],$$

имеем
$$\frac{df^i}{dt}(0) = \frac{dg^i}{dt}(0) \quad (i = 1, ..., n).$$

Мы имеем отношение эквивалентности на указанном множестве $\{f\}_x$ отображений, которое разбивает его на классы эквивалентных отображений $[f]_x, [g]_x, \ldots$

Определение 4 *Касательный вектор ξ в точке x к гладкому многообразию M^n – это класс эквивалентных отображений $[f]_x$. Множество всех классов эквивалентных отображений называется касательным пространством в точке x к многообразию M^n и обозначается как M^n_x.*

Для вектора ξ в карте $< M_\alpha, \varphi_\alpha >$ определяем его координаты:

$$\xi = (\xi^1, ..., \xi^n), \quad \xi^i = \frac{df^i}{dt}(0).$$

1.3. Лоренцева метрика

Пусть M^n — гладкое многообразие. *Лоренцева метрика* g на M^n — это поле невырожденной квадратичной формы $g_x(-,-) : M^n_x \to \mathbb{R}$, $x \in M^n$, сигнатуры $(+ - ... -)$. В локальной карте $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = (x^1, ..., x^n)$,

$$g_x(\xi, \eta) = g_{ij}(x^1, ..., x^n)\xi^i\eta^j,$$
$$\xi = (\xi^1, ..., \xi^n) \in M^n_x, \quad \eta = (\eta^1, ..., \eta^n) \in M^n_x.$$

Мы видим, что метрика определена в точке $x \in M^n$, если в этой точке существуют касательные векторы. Следовательно, при решении задачи продолжения метрики в новую область, метрику g можно продолжить в точку x лишь в том случае, если координатные представления кривой $f_x : [0,1] \to M^n$, задающей вектор $\xi = [f_x]$, дифференцируемы в 0.

1.4. Погружения, вложения, подмногообразия

Определение 5 *C^m-гладкое отображение $f : N^k \to M^n$, где N^k, M^n – C^m-гладкие многообразия, называется иммерсивным в точке $x \in N^k$, если дифференциал $df_x : N^k_x \to M^n_{f(x)}$, $(df_x)^i(\xi) = \frac{\partial f^i}{\partial x^k}(x)\xi^k$, $\xi \in M^n_x$, инъективен, и субмерсивным в точке x, если df_x – сюръективен. Если f иммерсивно в каждой точке многообразия N^k, то f называется иммерсией, или погружением; если f субмерсивно в каждой точке, то – субмерсией.*

C^m-гладкое отображение $f : N^k \to M^n$ называется (гладким) вложением (embedding), если f есть погружение, гомеоморфно отображающее N^k на $f(N^k)$. Вложение собственное, если прообраз каждого компактного множества компактен.

Определение 6 *Подмножество $N^k \subset M^n$, снабженное структурой гладкого многообразия, называется подмногообразием в M^n, если отображение $i : N^k \to M^n$, $i = id_{M^n}|_{N^k}$, $i(x) = x$, является вложением.*

Локально в координатах подмногообразие N^k задается уравнением

$$x^i = F^i(u^1, \dots, u^k)\ (k < n), \quad i = 1, \dots, n,$$

причем:

1) ранг якобиевой матрицы $J = \left\| \dfrac{\partial x^i}{\partial u^j} \right\|$ равен k на подмногообразии N^k (регулярность i);

2) i является гомеоморфизмом на свой образ $i(N^k)$.

Атлас подмногообразия N^k эквивалентен индуцированному атласу, образованному картами $< M_\alpha \cap N^k, \varphi_\alpha \circ i >$.

2. Экзотические $\mathbb{R}^4_{экз}$

Гладкое многообразие M^4, гомеоморфное $\mathbb{R}^4$, может быть диффеоморфно C^∞-гладкому многообразию $\mathbb{R}^4$, но может быть не диффеоморфно[6]. В последнем случае говорят об *экзотическом* C^∞-гладком многообразии $\mathbb{R}^4$, которое обозначается через $\mathbb{R}^4_{экз}$.

Экзотические $\mathbb{R}^4_{экз}$ были открыты в 1980-е годы. Первый пример был найден Майклом Фридманом [6].

Экзотическое $\mathbb{R}^4_{экз}$ называется *малым*, если оно может быть гладко вложено как открытое подмножество в стандартное $\mathbb{R}^4$.

Экзотическое $\mathbb{R}^4_{экз}$ называется *большим*, если оно не может быть гладко вложено как открытое подмножество в стандартное $\mathbb{R}^4$.

М. Фридман и Л. Тэйлор [5] показали, что существует единственное максимальное экзотическое $\mathbb{R}^4_{экз}$, в которое все другие $\mathbb{R}^4$ могут быть гладко вложены как открытые подмножества [19, p. 244].

Существование малых и больших $\mathbb{R}^4_{экз}$ может по разному сказываться на проводимых нами исследованиях Вселенной. Если мы предположили, что наше пространство-время – это стандартное $\mathbb{R}^4$, а оно в действительностя является большим экзотическим, то наши теоретические предсказания относительно Вселенной могут быть неверными. Однако в силу того, что космологические наблюдения воспроизводимы, то рано или поздно, но мы поймем свою ошибку и примем за основу своих предсказаний (большую) экзотическую гладкость [35, p. 10].

В случае, когда справедливо, что мы живем в стандартном $\mathbb{R}^4$, в нем может находиться гладко вложенное малое экзотическое $\mathbb{R}^4_{экз}$. В таком случае пересечение границ экзотических областей способно проявиться в качестве неожиданного физического эффекта, причину которого не следует искать как проявление каких-либо физических взаимодействий. Примером может быть изменение пути фотонов. При наблюдении неожиданного отклонения световых лучей, мы не сможем отнести это к воздействию какой-либо видимой материи, мы вынуждены будем связать это с «отсутствующей массой» – темной материей [26].

2.1. Построение малых $\mathbb{R}^4_{экз}$

Малые $\mathbb{R}^4_{экз}$ строятся с использованием теоремы о гладком 5-мерном h-кобордизме, ручек Кассона, пробок Акбулата и техники разложения на ручки [19, § 8.6].

[6]Точнее, любое биективное отображение M^4 на $\mathbb{R}^4$ будет недифференцируемым хотя бы в одной точке.

Путь M^4 и N^4 — гладкие замкнутые односвязные многообразия Рассмотрим h-кобордизм[7] W^5 между M^4 и N^4. Тогда существуют стягиваемые подмногообразия $A^4 \subset M^4$ с краем ∂A^4 и $B^4 \subset N^4$ с краем ∂B^4 и подкобордизм $V^5 \subset W^5$ с $\partial V^5 = A^4 \sqcup B^4$ (несвязная сумма) такой, что $M^4 \setminus A^4$ диффеоморфно $N^4 \setminus B^4$ и $int(V^5)$ (как открытое подмногообразие) гомеоморфно $\mathbb{R}^4 \times [0,1]$.

Как показад Фридман [4], h-кобордизм W^5 влечет гомеоморфность M^4 и N^4. Кроме того, A^4 диффеоморфно B^4, имеет край ∂A^4, и существует инволюция $\tau : \partial A^4 \to \partial A^4$, т.е. отображение $\tau : \partial A^4 \to \partial A^4$ такое, что $\tau \circ \tau = id_{\partial A^4}$, $\tau \neq id_{\partial A^4}$. Край ∂A^4 есть гомологическая сфера S^3 [19, p. 192-193].

Если M^4 и N^4 гомеоморфны, но не диффеоморфны, то $int(V^5) \cap M^4$ есть малое экзотическое $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$.

Подмногообразие A^4 называется *пробкой (cork) Акбулата* [8]. Многообразие N^4, недифеоморфное M^4, получается из M^4 перевклеиванием пробки Акбулата A^4, совершаемым по краю ∂A^4 с помощью инволюции края $\tau : \partial A^4 \to \partial A^4$.

Если взять пробку Акбулата и приклеить к ее краю ручку Кассона, то внутренность полученного многобразия есть (малое) $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$. Обратно, малое $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ «раскладывается» в пробку Акбулата и ручку Кассона [28].

Малое экзотическое $\mathbb{R}^4$ сильно зависит от ручки Кассона в том смысле, что недиффеоморфные ручки Кассона дают недиффеоморфные $\mathbb{R}^4$.

Описание ручки Кассона дается ниже. Как находить пробки Акбулата? Оказывается пробки Акбулата — это многообразия Штейна. Опишем ситуацию более подробно, отталкиваясь от понятия многообразия Штейна.

Пусть C — компактное стягиваемое 4-многообразие Штейна с краем и $\tau : \partial C \to \partial C$ инволюция края. Мы называем (C, τ) *пробкой Акбулата*, если τ продолжается до автогомеоморфизма многообразия C, но не может быть продолжен до автодиффеоморфизма.

Пробки Акбулата, вложенные в гладкие 4-многообразия, прзволяют превращать из в экзотические многообразия, гомеоморфные исходному [17]. Для пробки (C, τ) и гладкого 4-многообразия X, которое содержит C, *операция поворота пробки* (cork twist) в многообразии X вокруг (C, τ) определяется как гладкое 4-многообразие, полученное из X удалением подмногообразия C и перевклеиванием его с помощью инволюции. Обратите внимание, что, операция поворота пробки не изменяет топологический тип многообразия X. Пробка (C, τ) называется *пробкой многообразия* X, если поворот пробки в X вокруг (C, τ) не диффеоморфен исходному многообразию X [16].

Ручки Кассона. Назовем *n-мерным диском* множество

$$D^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + ... + x_n^2 \leq 1\}.$$

Диск D^n — n-мерное компактое многообразие с краем ∂D^n, являющимся $(n-1)$-мерной сферой $S^{n-1} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 = 1\}$.

Пусть дано гладкое n-мерное многообразие с краем $< M^n, \partial M^n >$. Назовем *n-мерной k-ручкой* h копию множества $D^k \times D^{n-k}$, приклеенную к ∂M^n вдоль $\partial D^k \times D^{n-k}$ с помощью вложения $\phi : \partial D^k \times D^{n-k} \to \partial M^n$. Результирующее многообразие обозначается как $M^n \cup_\phi h$.

Углы, получаемые при приклеивании, сглаживаются посредством специальной процедуры, и поэтому $M^n \cup_\phi h$ можно считать гладким многообразием.

Башня Кассона. Рассмотрим гладкое отображение $f : D^2 \to M^4$, где M^4 — ориентированное гладкое многообразие и D^2 – 2-мерный диск, причем $f^{-1}(\partial M^4) = \partial D^2$. Совершая малые шевеление можно добиться, чтобы это отображение превратилось в погружение. Однако, как правило, попытки сделать его вложением терпят неудачу. Ручки Кассона [43] придуманы для того, чтобы решить эту проблему.

Получение погруженного диска $f(D^2)$ — это 1-я стадия построения башни Кассона.

Погружение обладает конечным числом изолированных точек самопересечения $x_1, ..., x_k$, называемых *кинками*[9]. Любая замкнутая кривая на вложенном диске стягивается в точку, но для погруженного диска существуют нестягиваемые в точку замкнутые кривые. В частности, через каждый кинк x_i проходит такая кривая c_i, $x_i \in c_i$. Фундаментальная группа $\pi_1(f(D^2))$ свободно порождается этими кривыми. Полагаем $L := \{c_1, ..., c_k\}$.

[7]Это кобордизм, для которого включения $M^4 \hookrightarrow W^5$, $N^4 \hookrightarrow W^5$ гомотопически эквивалентны.

[8]Selman Akbulut (род. 1949) — турецкий математик, профессор Мичиганского университета (США).

[9]Kink (англ.) – перегиб.

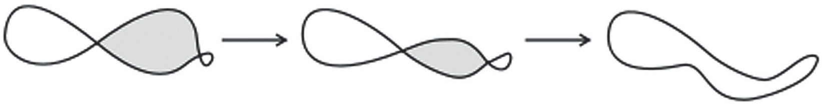

Рис. 1. Трюк Уитни

Если удастся найти сингулярный диск $D^2_{2,i}$, с границей c_i, который лежит вне $f(D^2)$ и *вложен* в M^4, то с помощью так называемого *трюка Уитни* (Whitney trick) можно деформировать (преобразовать) погружение $f(D^2)$ так, что после преобразования исчезнет кинк x_i (рис. 1).

Диски $D^2_{2,i}$, будь они вложенными, решили бы проблему убивания кинка x_i. Но трудно надеяться на такую удачу. Скорее всего диск $D^2_{2,i}$ сам имеет кинки.

Рис. 2. Диаграмма Кирби [8] ручки Кассона [8, p. 205]

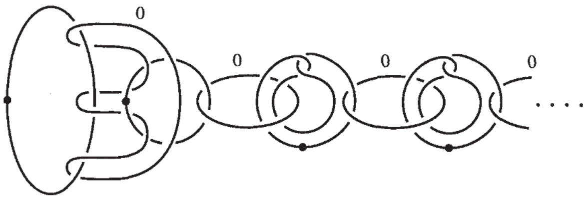

Рис. 3. Экзотическое (малое) $\mathbb{R}^4$ (оно является внутренностью изображенной фигуры, представлющей собой слегка модифицированную ручку Кассона) (см. [8, p.207])

Но в нашем распоряжении оказывается семейство *погруженных* сингулярных дисков $D^2_{2,i}$ в $M^4 \setminus f(D)$ таких, что каждая c_i ограничивает сингулярный диск $D^2_{2,i}$ в M^4, и

1) $D^2_{2,i} \cap D^2_{2,j} = \emptyset$ $(i \neq j)$;

2) $D^2_{2,i} \cap L = c_i$.

Объединение $L \cup \bigcup_i D^2_{2,i}$ — это 2-я стадия построения башни Кассона.

Скелет ручки Кассона. Погруженные диски $D^2_{2,i}$ сами имеют кинки. Повторим процедуру построения погруженных дисков $D^2_{3,j}$, ограничивающих замкнутые кривые, проходящие через кинки дисков $D^2_{2,i}$. А затем придется сделать новую подобную итерацию. Будем иметь k-ю стадию сингулярных дисков $D^2_{k,1}, ..., D^2_{k,s_k}$, построенных на $(k-1)$-й стадии. В итоге получим объединение $X = \bigcup_k^\infty \bigcup_s D^2_{k,s}$, которое определяет *скелет ручки Кассона.* Пространство X односвязно $(\pi_1(X) = 0)$, поскольку на каждой стадии порождающие в $\pi_1(f(D^2))$ убиваются на следующей стадии построения сингулярных дисков. Если остановить итерацию на стадии k и рассмотреть регулярную окрестность полученной конструкции, то имеем *башню Кассона* (рис. 6).

Заменяя сингулярные диски $D^2_{k,s}$ регулярными окрестностями $N(D^2_{k,s})$ и определяя бесконечное объединение $CH = \bigcup_{k,s} N(D^2_{k,s}) \subset M^4$, получаем *ручку Кассона* $(CH, \partial CH)$ с краем $\partial CH = N(f(\partial D^2))$.

Ручка Кассона CH является односвязным многообразием, которое гомотопно открытой 2-ручке $(D^2 \times \mathbb{R}^2, \partial D^2 \times \mathbb{R}^2)$. Внутренность любой ручки Кассона диффеоморфна $\mathbb{R}^4$, но слабая модификация превращает ее в $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$, показанное как внутренность рис. 3 [8, p. 206].

Теорема 1 (Фридман, 1981) *Каждая ручка Кассона $(CH, \partial CH)$ гомеоморфна стандартной открытой ручке $(D^2 \times \mathbb{R}^2, \partial D^2 \times \mathbb{R}^2)$.*

Теорема 2 (Gompf, 1989) *Существует несчетное число ручек Кассона.*

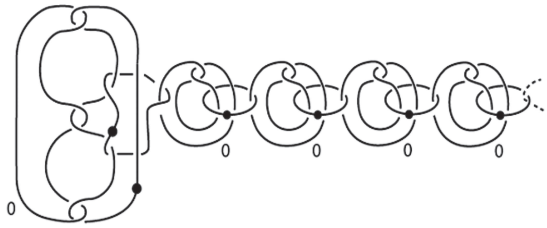

Рис. 4. Экзотическое $\mathbb{R}^4$ с одной ручкой Кассона (Bizaca, Gompf. 1996) [28, p. 460]

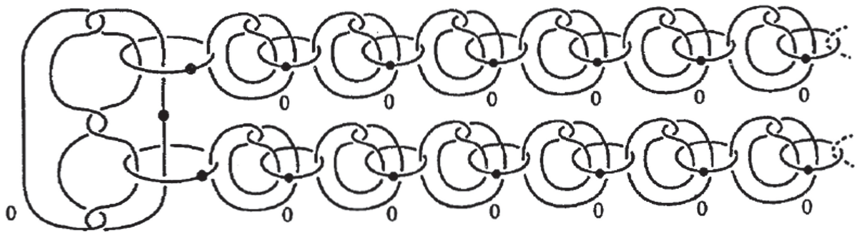

Рис. 5. Экзотическое $\mathbb{R}^4$ с двумя ручками Кассона (Bizaca, Gompf. 1996) [28, p. 462]

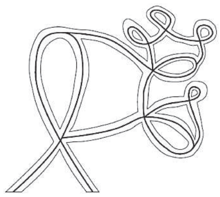

Рис. 6. Башня Кассона [44, p. 6]

2.2. Построение больших $\mathbb{R}^4_{экз}$

Форма пересечений

Пусть Y^n, Y^m – трансверсально пересекающиеся подмногообразия многообразия X^{n+m}. *Алгебраическое число пересечений* Y^n *и* Y^m по определению есть сумма знаков точек пересечений.

Определение 7 *Пусть* M^4 *– компактное ориентированное топологическое 4-многообразие и* $a, b \in H_2(M^4; \mathbf{Z})$ *представляются ориентированными поверхностями* A, B *в* M^4. *Определим форму пересечений многообразия* M^4

$$Q_{M^4} : H_2(M^4; \mathbf{Z}) \times H_2(M^4; \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$$

как $Q_{M^4}(a, b) = A \cdot B$, *где* $A \cdot B$ *есть число точек пересечений в* $A \cap B$, *взятых со знаком*[10].

Поверхность Куммера. Рассмотрим множество

$$K3 = \{[z_1, z_2, z_3, z_4] \in CP^3 : z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4 = 0\},$$

которое есть комплексное 2-многообразие, и вещественное 4-многообразие. Его называют поверхностью Куммера или $K3$-поверхностью.

Форма пересечения $K3$-поверхности имеет вид

$$Q_{K3} = E_8 \oplus E_8 \oplus (\oplus_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) \equiv 2E_8 \oplus 3H,$$

[10] Предполагаем, что A и B выбраны в общем положении, т.е. пересекаются трансверсально. Ориентации A и B вместе с фиксированной ориентацией M^4 дают знак точке пересечения $p \in A \cap B$, который находится следующим образом. Если положительные реперы в A_p и B_p дают положительный репер в M^4_p, то точке p приписывается знак $+1$, и -1 – в противном случае [8, p.9].

где последнее выражение содержит три копии матрицы H, известной как гиперболическая форма [29], и

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определение 8 *Для $i = 1, 2$ пусть $D_i^n \subset M_i^n$ — вложенные диски*[11]*, и пусть $\phi : D_1^n \to D_2^n$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм. Гладкое многообразие $(M_1^n \setminus int\ D_1^n) \cup_{\phi | D_1^n} (M_2^n \setminus int\ D_2^n))$ получаем отождествлением граничных точек диска D_1^n с граничными точками диска D_2^n, связанными отображением ϕ, называется связной суммой многообразий M_1^n и M_2^n и обозначается как $M_1^n \sharp M_2^n$.*

Будем использовать обозначение

$$\sharp_m Y = \underbrace{Y \sharp ... \sharp Y}_{m-\text{раз}}.$$

Пусть

$$X = \sharp_3 (S^2 \times S^2) \setminus D^4.$$

Подмножество поверхности $K3$, представляющее гомологию для $3H$ в форме пересечения $K3$-поверхности, можно описать как топологическое вложение $j : X \to K3$ такое, что окрестность множества $i(\partial X)$ имеет вид $C_j = \partial j(X) \times \mathbb{R}$. Можно выбрать j так, что $j(X)$ будет гомеоморфным образом X [19, p. 240-241].

Следующая теорема описывает способ построения больших $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$.

Теорема 3 *Рассмотрим гладкое 4-многообразие*

$$W = \sharp_3 (S^2 \times S^2) \setminus j(X),$$

где $j(X)$ – гомеоморфный образ X. Тогда W гомеоморфно $\mathbb{R}^4$, но не диффеоморфно $\mathbb{R}^4$, и, следовательно, является примером $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ [19, p. 241-242].

2.3. Негладкое поведение глобальной топологической карты в экзотических $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$

К сожалению, в настоящее время мы не располагаем явно построенным гладким атласом для $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$. Однако некоторые факты, касающиеся этого многообразия, могут быть установлены.

Прежде всего, очевидно, что глобальная карта $\varphi : \mathbb{R}^4_{\text{экз}} \to \mathbb{R}^4$ класса C^0 на $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ не может быть гладкой в каждой точке, иначе $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ было бы диффеоморфно $\mathbb{R}^4$. Но она может быть гладкой локально, как показывает следующая

Теорема 4 *Существует $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$, для которого глобальные C^0-координаты являются гладкими в некоторой окрестности. Другими словами, существует $\mathbb{R}^4_{\text{экз}} = \{x = (x^0, x^1, x^2, x^3)\}$, для которого $x^i \in C^\infty$ при $||x|| < \varepsilon$* [19, p. 270].

Мы видим в утверждении этой теореы явную *экзотичность* многообразия $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$, которая проявляется в том, что поведение глобальных C^0-координат экзотичной гладкой структуры отличается от поведения глобальных координат в стандартной гладкости на $\mathbb{R}^4$

Но экзотичность обнаруживается и в негладкости сфер на бесконечности многообразия $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$, как показано в следующих теоремах 5 и 6:

Теорема 5 *В некоторых $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ существует компактное множество, которое нельзя окружить никакой гладко вложенной трехмерной сферой S^3* [6, p. 33].

[11] Называем *n-мерным диском* множество $D^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + ... + x_n^2 \le 1\}$.

Теорема 6 *Для некоторых* $\mathbb{R}^4_{экз}$ *существуют глобальные глобальные топологические координаты* (t,x,y,z) *и числа* $R_1^3 < R_2$ *такие, что сферы* $S_R^3 = \{t^2+x^2+y^2+z^2 = R^2\}$ *являются гладкими для* $R < R_1$*, но не являются таковыми при любом* $R > R_2$ [6, p. 34].

Наконец, экзотичность поведения глобальных C^0-координат может быть пространственно локализовано в ограниченной области 3-пространства:

Теорема 7 *Существует* $\mathbb{R}^4_{экз}$ *, для которого глобальные топологические координаты* (t,x,y,z) *являются гладкими для* $x^2+y^2+z^2 \geq \varepsilon^2 > 0$*, но не глобально. Существует лоренцева метрика на* $\mathbb{R}^4_{экз}$ *, для которой граница этой области времениподобна. Иначе говоря, экзотичность пространственно ограничена* [19, p. 271].

2.4. Неоднородность экзотических $\mathbb{R}^4_{экз}$

Известно, что связная односвязная разрешимая 4-мерная группа Ли G_4 диффеоморфна $\mathbb{R}^4$. Группа Ли G_4, действующая гладко и просто транзитивно на гладком 4-многообразии M^4, диффеоморфна ему, т.е. $M^4 \simeq G_4 \simeq \mathbb{R}^4$. Отсюда следует, что $\mathbb{R}^4_{экз}$ не может допускать просто транзитивного действия группы G_4 [9, 10]. Другими словами, $\mathbb{R}^4_{экз}$ неоднородно.

Говорим, что гладкое многообразие M^4 имеет *немного симметрий*, если для любого выбора гладкого метрического тензора g на M^4 группа изометрий $Is(M^4, g)$ конечна.

Р. Тейлор построил примеры экзотических $\mathbb{R}^4$ с немногими симметриями [30]. Тогда группа изометрий на таких $< \mathbb{R}^4_{экз}, \widetilde{g} >$ конечна, и, следовательно, отсутствуют нетривиальные векторные поля Киллинга. Это означает, что гравитационное поле $\widetilde{g}$ существенно нестационарно, т.е. является изменяющимся. И причина этого – экзотичность гладкой структуры [31].

3. Экзотические $\mathbb{R}^4$ и физика

Экзотическая гладкость, хотя казалось бы не имеет отношения к физике, поскольку не является решением ни уравнений Эйнштейна, ни каких-либо других полевых уравнений, тем не менее, как будет продемонстрировано ниже, в значительной мере формирует физические явления. И происходит это по той простой причине, что гладкость — это фундаментальная характеристика пространства-времени, и в силу этого она во многом предопределяет существование вещей в природе. В то время как ОТО создавалась Эйнштейном как локальная теория, не требующая предъявления целиком всего атласа локальных карт, гладкая структура и есть этот атлас. Другими словами, задавая гладкую структуру, предъявляют *всё* пространство-время целиком, *в целом* (at large), как говорят геометры. Поэтому гладкая структура характеризует *космологические проявления* (свойства) пространства-времени.

3.1. Автодиффеоморфизмы и принцип общей ковариантности

На практике пространство-время как гладкое многообразие *строят*, вводя новые локальные карты как новые координаты $< M', \psi >$, к которым переходят $(x')^i = [\psi \circ \phi^{-1}]^i(x^1, ..., x^n)$ от старых $< M, \phi >$, производя тем самым *расширение*[12] пространства-времени от M к $M \cup M'$. Цель – получить максимальное расширение. Например, как максимальное расширение пространства-времени Шварцшильда, было в свое время получено пространство-время Крускала.

Стремясь к максимальному расширению пространства-времени, мы тем самым строим атлас локальных карт, и, следовательно, процесс расширения заканчивается, когда получаем *максимальный атлас.*

Заметим, что в силу того, что $[\psi \circ \phi^{-1}]^i(x^1, ..., x^n) = (\psi \circ id_{M^4} \circ \phi^{-1}]^i(x^1, ..., x^n)$, процесс расширения карт можно трактовать как получение такого атласа, в котором тождественное отображение является диффеоморфизмом $id_{M^4} : M^4 \simeq M^4$.

Эйнштейн, создавая общую теорию относительности, постулировал *принцип общей ковариантности*, который разрешал использовать все допустимые локальные карты (системы координат). При этом под допустимостью понималась не только гладкость функций перехода, но и выполнение условия незануления якобиана

$$J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \neq 0,$$

[12] В этом случае на пересечении $M \cap M'$ старые и новые координаты должны быть связаны преобразованием с ненулевым якобианом.

или
$$\left|\frac{\partial(x')^i}{\partial x^j}(x^1,...,x^n)\right| = \left|\frac{\partial(\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})^i}{\partial x^j}(x^1,...,x^n)\right| \neq 0.$$

Пусть $f: M^n \to M^n$ — диффеоморфизм. Поскольку, в соответствии с определением 2
$$\varphi_\beta\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1} = (\varphi_\beta\circ f)\circ\varphi_\alpha^{-1} = \overline{\varphi}_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}\in C^m,$$
где $\overline{\varphi}_\beta = \varphi_\beta\circ f$, то фактически мы осуществляем расширение атласа локальных карт, добавляя новые карты вида $\overline{\varphi}_\beta$. Но исходный атлас был максимальным, поэтому мы остаемся в том же самом атласе, в той же самой гладкой структуре. Иначе говоря, осуществление диффеоморфизма $f: M^n \to M^n$ – это просто добавление новых карт к атласу, что приветствуется принципом общей ковариантности.

Гомеоморфизм $f: \mathbb{R}^4_{\text{экз}} \to \mathbb{R}^4$ является фактически автогомеоморфизмом, но никак не автодиффеоморфизмом. Следовательно, его применение нельзя подвести под действие принципа общей ковариантности. Хотя это возможно для автодиффеоморфизмов $f: \mathbb{R}^4_{\text{экз}} \to \mathbb{R}^4_{\text{экз}}$.

Иначе говоря, мы имеем две *разные физики*, в рамках каждой из которых справедлив принцип общей ковариантности Эйнштейна. Одна физика связана с гладким 4-многообразием $\mathbb{R}^4$, а другая с $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$. В действительности разных физик много, поскольку существует бесконечное число экзотических $\mathbb{R}^4$, и многие их них не диффеоморфны.

Важно отметить, что если два многообразия недиффеоморфны, то имеется физическое различие между ними.

3.2. Невосстановимость прошлого

Экзотические $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ могут обладать многими удивительными свойствами, позволяющими иначе посмотреть на проблему восстановления фактов прошлого. Например, глобальные координаты (t, r) не являются гладкими на всем $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$. Это означает, что если что-то «вещает» нам из прошлого, то это может происходить вдоль временных радиальных кривых $t = s, r = r(s), s \in [\alpha, \beta]$. Но такие кривые, соединяющие факт b с точкой a его восприятия в настоящем, не являются гладкими с какого-то момента при следовании вдоль кривой от a к b (см. рис. 7, [20]).

Поскольку современная физика предполагает использование только гладких кривых, то мы можем заявить о том, что прошлое факта a не может быть восстановлено.

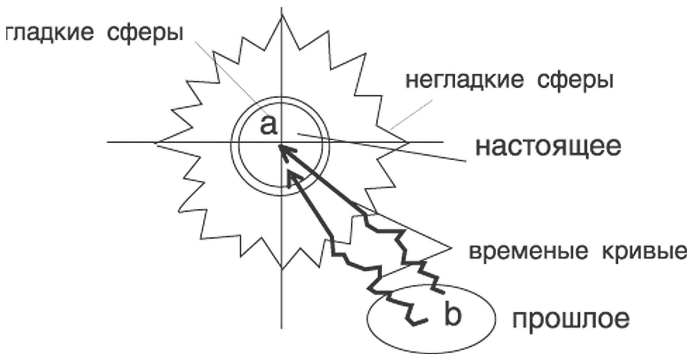

Рис. 7. Невозможность гладкого продолжения временных кривых из a в область прошлого b в экзотическом $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$.

3.3. Причинные свойства $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$

Рассмотрим пространства-времена $< \mathbb{R}^4, g >$ и $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{g} >$. Для каждого многообразия найдём лоренцевы функции расстояния d и $\widetilde{d}$.

Пусть отображение $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ — биекция, являющая изометрией относительно лоренцевых расстояний d и $\widetilde{d}$, т.е.
$$d(p,q) = \widetilde{d}(f(p), f(q)). \tag{3.1}$$
Поскольку $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ и $\mathbb{R}^4$ не диффеоморфны, то f не может быть гладким отображением. Можно ли из этого извлечь информацию о причинных свойствах пространства-времени $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{g} >$? [9, 10]

Если существует биекция $f : \mathbb{R}^4_{\text{экз}} \to \mathbb{R}^4$, сохраняющая расстояние, то $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{g} >$ не может быть различающим, поскольку по теореме Кима из [39] f было бы гладким. Но это означает, что либо $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{g} >$ содержит временные петли, либо они появляются в слабо возмущенной метрике [9, 10].

Если же $< \mathbb{R}^4, g >$ различающее (что возможно), то не существует биекции $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4_{\text{экз}}$, сохраняющей расстояние, в силу той же теоремы Кима из [39]. Это говорит о том, что для хотя бы двух событий p и q лоренцево расстояния между ними в $< \mathbb{R}^4, d >$ и $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{d} >$ существенно различны.

Теорема А. Н. Романова [15, 40] позволяет относительно усилить этот результат и говорить о либо о непричинности пространства-времени $< R^4_{\text{экз}}, \widetilde{g} >$, либо о нарушении условия конечности расстояния, либо о выпадении пространства-времени $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{g} >$ из класса A. Из теоремы Маламента [41] вытекает, что либо $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{g} >$ не может быть различающим, либо любой гомеоморфизм между $< \mathbb{R}^4, d >$ и $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{d} >$ не является хронологическим. Фактически это означает, что если p прошлое для q в $< \mathbb{R}^4, d >$, то это неверно в $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{d} >$.

Иначе говоря, истинностное значение причинно-следственного отношения между двумя вещами в себе – p и q – различно после того, как они становятся вещами для нас в $< \mathbb{R}^4, d >$ и в $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{d} >$.

3.4. Экзотическое $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ не может быть слоем в 5-мерном Гиперпространстве?

Стандартное $\mathbb{R}^4$ может быть слоем гладкого слоения 5-мерного (замкнутого) гладкого многообразия. Как следствие, становится возможным переход к 5-мерной теории грави-электро-слабого взаимодействия типа Калуцы-Клейна и построение теории «схода со своего слоя», т.е. выхода за пределы «своего» пространства-времени в 5-е измерение и перемещений в объемлющем Гиперпространстве [15, гл. 7]. Источником энергии, необходимой для таких перемещений, в таком случае выступает внешнее скалярное поле и электрическая заряженность перемещаемого объекта (Гуц, [14]).

В силу сказанного, особого внимания заслуживает тот факт, что в теории слоений известна следующая нерешенная задача (2003), сформулированная в «сессии проблем» известным специалистом в теории слоений Хардером: доказать, что гладкое многообразие L, которое есть экзотическое $\mathbb{R}^4$, не может быть слоем C^1-слоения $\mathcal{F}$ компактного многообразия M [42, p. 5].

Если это окажется верным, то экзотическое $\mathbb{R}^4$ совсем иначе размещается в объемлющем Гиперпространстве, чем стандартное $\mathbb{R}^4$, и это ограничит перемещения в прошлое.

4. Физическая наблюдаемость изменения гладкой структуры

Рассмотрим пространство-время $< \mathbb{R}^4, g >$, где g – метрика. Поскольку при смене локальной карты $x^i \to x^{i'}$ метрика подвергается преобразованию

$$g_{ik} \to g_{i'k'} = g_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}, \tag{4.1}$$

то гладкость метрики может нарушиться, если произошел переход к экзотическому гладкому атласу.

Смена локальной карты, замена координат физически означает переход к *новым физическим условиям*[13]. Таким образом, изменения гладкой структуры вполне можно *измерить*, т. е. они *могут быть наблюдаемым* эффектом (Гуц, 1987, [9]; Asselmeyer, 1996, [21]).

Но можно к этому вопросу подойти с другой стороны: возможно ли, что при определенных физических условиях происходит смена гладкой структуры? В § 2.4 и § 3.3 было показано, что переход к экзотической гладкой структуре – это переход к крайне неоднородному гравитационному полю $\widetilde{g}$ в $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ от однородного поля g в $\mathbb{R}^4$. Следовательно, экзотичность может проявляться как источник возмущения, наблюдаемого до этого постоянного (однородного) гравитационного поля (Гуц, 1987, [9]).

В 1990-е годы было сформулировано следующее утверждение:

> *Локализованная экзотичность может выступать как источник некоторого регулярного внешнего поля в форме материи или черной дыры* (Бранс, 1994, [26]).

[13]Например, переход к координатам, в которых $\Gamma^i_{jk}(x_0) = 0$, означает переход от ощущения силы тяжести к невесомости (лифт Эйнштейна).

Основой для такого заявления является, в частности, теорема 7, которая локализует экзотичность глобальных координат во времениподобном цилиндре $S^3 \times \mathbb{R}$. Обратим внимание на то, что скачки производных метрики $h_{\alpha\beta}$, обеспечивающие разрыв пространства [15, § 6.1.2], следствием которого является потеря связности или односвязности пространства, можно трактовать как проявление экзотичности, приводящее к скачку энергии и, как следствие, к разрыву пространства.

Но с другой стороны, скачки производных метрики $g_{i'k'}$, которых мы добъемся за счет скачков энергии в пространстве, означают в случае гладкой g_{ik}, как видно из (4.1), наличие недифференцированности для отображения $x^{i'} \to x^i$. А это говорит о том, что мы оказались в другой гладкости пространства-времени. Иначе говоря, мы можем за счет физических эффектов, скачков энергии, изменить гладкость пространства-времени. Правда, меняя гладкость в пространстве-времени $\mathbb{R}^4$, мы оказываемся в одной из несчетного числа экзотических $\mathbb{R}^4$, — оказываемся в одном из бесчисленного множества параллельных миров.

4.1. Экзотическая черная дыра

С помощью техники, посредством которой устанавливалась теорема 7, можно ввести экзотическую гладкость в $\mathbb{R}^2 \times S^3$ с топологией крускаловского представления решения Шварцшильда, точнее, в области $K = \{(u, v, \omega) : u^2 - v^2 < 1 \text{ и } \omega \in S^2\}$ в координатах Крускала, так, что глобальные топологические координаты (u, v) в $\mathbb{R}^2$ гладки на бесконечности, вне $u^2 + v^2 > R$. Координаты (u, v, ω) – это глобальные топологические координаты в K. Но они не могут быть продолжены как гладкие функции на всю область $u^2 - v^2 < 1$. Но могут быть гладкими в некотором замкнутом подмногообразии A (=STANDARD), для которого $r \geq a > 2M$ (рис. 8).

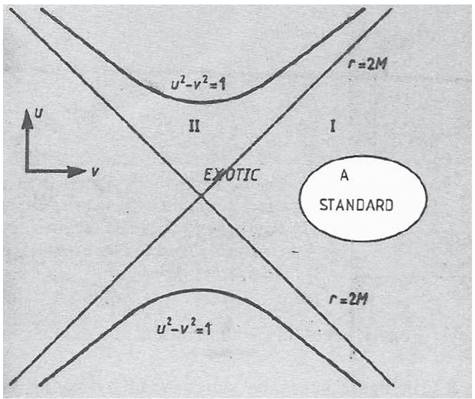

Рис. 8. Экзотическая черная дыра [26]

В области A, мы можем как обычно решить вакуумные уравнения Эйнштейна, чтобы получить метрику Крускала в координатах (u, v). Однако эта метрика не может быть расширена на все полное многообразие K ни по каким-либо соображеним, связанными с развитием сингулярностей в координатом выражении метрики, ни по топологическим соображениям по той простой причине, что координаты (u, v, ω), не могут быть продолжены как гладкие функции на область $u^2 - v^2 < 1$ за границу подмножества A.

Поясним сказанное. Для задания метрики g в координатах

$$g_{(u_0,v_0,\omega_0)}(\xi, \eta) = g_{ij}(u_0, v_0, \omega_0)\xi^i \eta^j,$$

необходимо иметь касательные векторы ξ, η в любых точках (u_0, v_0, ω_0) пространства K. А для этого нужно уметь дифференцировать кривые $(u(s), v(s), \omega(s))$, $s \in [0, 1]$, исходящие из точки $(u_0, v_0, \omega_0) = (u(0), v(0), \omega(0))$ (см. \$ 1.2, 1.3). Но как раз не во всех точках (u_0, v_0, ω_0) глобальные крускаловские координаты дифференцируемы.

Следовательно, справедлива

Теорема 8 (Brans, [26]) *Существует гладкое мнгообразие $\mathbb{R}^2 \times S^3$, стандартная метрика Крускала для которого не может быть гладко продолжена на всю область $u^2 - v^2 < 1$.*

Но тогда для черной дыры Шварцшильда, представленной в координатах Крускала на рис. 8, допустимо предположение, что стандартная гладкость истинна лишь в макроскопической области A (=STANDARD), а экзотичность может быть локализована (пространственная ограниченность экзотичности из теоремы 7), например, за горизонтом $r = 2M$. Тем самым мы можем столкнуться в космосе с «экзотической черной дырой». Ее экзотичность проявляется в том, что находящийся в области A наблюдатель описывает окружающее его простансство-время с помощи метрики Крускала, но за горизонтом метрика может быть и другой, или иметь особенности, отличные от метрики Крускала.

4.2. Экзотическая гладкость как источник гравитационного поля

Покажем, что при переходе к экзотической гладкой структуре происходит изменение тензора Эйнштейна, а значит в правой части возникает дополнительный источник гравитациооного поля. В случае, если в исходной ситуации мы имели вауумные уравнения Эйнштейна, то переход к экзотической гладкости преобразует их в невакуумные, т.е. соответстующее их решение являет гравитационное поле, имеющее своим источкиком экзотическую гладкую структуру.

Пусть M обладает двумя недиффеоморфными гладкими структурами M' и M''. Тогда любой гомеоморфизм $f : M' \to M''$ будет недифференцируемым хотя бы в одной точке, скажем в точке x_0. Тогда в некоторой ее окрестности U_{x_0} можно представить $df : TM' \to TM''$ в виде $df|U_{x_0} = (b_1, b_2)$ и выразить изменение связности при преобразовании f:

$$\nabla'' = \nabla' + (b_1^{-1}db_1) \oplus (b_2^{-1}db_2).$$

Поскольку в исчислении Кошуля тензор кривизны

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]}Z,$$

то изменение связности приведет к изменению тензора кривизны и тензора Эйнштейна $G' \to G''$ так, что даже если $G'(X,Y) = 0$, то

$$G''(X,Y) = Ric(X,Y) - \frac{1}{2}g(X,Y)R \neq 0.$$

Таким образом, переход к экзотичному многообразию приводит к появлению источника гравитационного поля (Asselmeyer, 1996, [24]). *Экзотическая гладкость действует как источник гравитационного поля*!

Sladkowski [32] приводит такую интерпретацию этого результата: «Предположите, что мы обнаружили некоторый странный астрофизический источник тяготения, который не ведёт к любому приемлемому решению уравнений Эйнштейна. Это может означать, что мы используем неправильную гладкую структуру при описании пространства-времени и наблюдение этого странного источника указывает нам на нашу ошибку. Если мы изменяем гладкую структуру, то всё будет в порядке» [31].

4.3. Экзотичность как источник спинорного поля

Многообразия $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ можно представить как обладающие соответственно тривиальной ручкой Кэйсона $CH_0 = D^2 \times \mathbb{R}^2$ и нетривиальной CH так, что имеет место диффеоморфизм

$$\mathbb{R}^4 \setminus CH_0 \simeq \mathbb{R}^4_{\text{экз}} \setminus CH.$$

Действие

$$S = \int R_{\mathbb{R}^4}\sqrt{g_{\mathbb{R}^4}}d^4x$$

распишем с граничным членом:

$$S = \int\limits_{\mathbb{R}^4\setminus CH_0} R_{\mathbb{R}^4}\sqrt{g_{\mathbb{R}^4}}d^4x + \int\limits_{\partial(\mathbb{R}^4\setminus CH_0)} K_{CH_0}\sqrt{g_\partial}d\sigma. \qquad (4.2)$$

Приклеиваемая область ∂CH может быть описана как погружение $D^2\times(0,1)$ в $\mathbb{R}^4$. В [23] показано, как может быть осуществлено спинорное представление погруженной поверхности D^2 в $\mathbb{R}^3$, которое легко продолжается до погружения приклеенной области $D^2\times(0,1)$ в $\mathbb{R}^4$. Как результат имеем

$$\int\limits_{\partial(\mathbb{R}^4\setminus CH_0)} K_{CH_0}\sqrt{g_\partial}d\sigma = \int\limits_{\partial(\mathbb{R}^4\setminus CH_0)} \psi\gamma^k D_k\overline{\psi}\sqrt{g_\partial}d\sigma. \tag{4.3}$$

Спинорное представление обладает свойством: действие исчезает, если граница есть вложение, т.е. не имеет самопересечений. Поэтому получается ненулевой вклад граничного члена в действие только для $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ с границей $\partial(\mathbb{R}^4\setminus CH)$:

$$\int\limits_{\partial(\mathbb{R}^4\setminus CH)} \psi\gamma^k D_k\overline{\psi}\sqrt{g_\partial}d\sigma,$$

который можно продолжить с границе на всё $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}\setminus CH$. В результате имеем для экзотического $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ совместное действие гравитационного поля со спинорным источником:

$$S_{\mathbb{R}^4_{\text{экз}}} = \int\limits_{\mathbb{R}^4_{\text{экз}}\setminus CH} [R_{\mathbb{R}^4}+\psi\gamma^k D_k\overline{\psi}]\sqrt{g_{\mathbb{R}^4}}d^4x,$$

появившимся благодаря экзотичности гладкой структуры, непосредственно относящейся к приклеенной области ручки Кэйсона (Asselmeyer-Maluga, Brans, 2011, [23]).

4.4. Экзотичность и квантовая гравитация

Суммирование квантовых амплитуд по историям является удобным и полезным инструментом в изучении многих интересных эффектов в квантовой гравитации. Например, статистическая сумма евклидовой квантовой гравитации с положительной космологической постоянная Λ

$$Z=\sum_{(M^n,g)}\exp(-I[g]),$$

$$I[g]=-\frac{1}{16\pi G}\int(R-2\Lambda)d\mu[g],$$

где сумма берется по физически отличным историям, состоящих из многообразий (M^n,g) с римановой метрикой g.

Многое зависит от того, что следует понимать под физически отличными историями. В случае квазиклассического приближения разумно принять [47], что две истории считаются физически различными, если

1) их многообразия имеют различную топология, т.е не гомеоморфны;

2) их метрики не связаны преобразованием координат, т.е. не изометричны, не конформны и т.д.;

3) в случае размерности 4 или более, если топология многообразий одинакова, то они не диффеоморфны, т.е. имеем дело с экзотическими гладкостями.

Впервые включать экзотические многообразия в сумму по историям в контексте теории Калуцы-Клейна предложил Фройнд (1985, [50]). На их роль в квантовой гравитация обращалось внимание в (1993, [49]).

Принципиальным является вопрос, оказывается ли учет недиффеоморфных гладких структур существенным, и в какой мере они сказываются на результатах расчетов?

В работе [48] рассмотрен случае $n=7$ и показано, что недиффеоморфные пространства Уоллаха (Wallach) дают одинаковый вклад в сумму по историям, и нет возможности предсказать, вклад какой гладкой структуры будет самым весомым.

Подобные вычисления для важнейшего случая $n=4$ впервые проделал Duston (2010, [34]). Рассматривались недиффеоморфные накрытия CP^2. Вклад экзотических многообразий оказался незначительным. Однако автор предположил, что для других многообразий будет получен иной результат. Так или иначе, но в в работе [51] был получен обнадеживающий результат, который говорит, что «квантовая гравитация зависит от экзотической гладкости».

4.5. Космологическое прявления экзотической гладкости

В 2012 году T. Asselmeyer-Maluga и J. Król [52] рассмотрели функциональный интеграл по траекториям

$$Z = \int D[g] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{EH}[g]\right),$$

$$S_{EH}[g] = \int\limits_{M^4} R\sqrt{g} d^4x.$$

Однако вместо метрики g они предпочли иметь дело с системой отсчета (тетрадой) e и связностью Γ:

$$Z = \int D[e] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{EH}[e, M^4]\right),$$

$$S_{EH}[e, M^4] = \int\limits_{M^4} tr(e \wedge e \wedge R),$$

где e — 1-(ко)форма, R — 2-форма кривизны.

Расчеты действия для двух типов экзотических $\mathbb{R}^4$ (больших и малых) показывают, как и следовало было ожидать, независимость экзотической гладкости от метрики. Известно, что экзотические гладкости большого/малого $\mathbb{R}^4$экз зависят от непрерывного параметра, который обозначим через t, и таким образом, при вычислении интеграла по траекториям как «суммы по всем геометриям и по всем гладким структурам», необходимо производить интегрирование и по параметру t.

Для $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ в таком случае имеем имеем:

$$S_{EH}[e, \mathbb{R}^4_{\text{экз}}] = S_{EH}[e, \mathbb{R}^4] + S_{\text{экз}}[t].$$

Поэтому

$$Z = \underbrace{\int\limits_{\text{Геометрии}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{EH}[e, \mathbb{R}^4]\right) D[e]}_{\text{Классическая часть}} \cdot \underbrace{\int\limits_{\text{Экз. гладкости}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\text{экз}}[t]\right) D[t]}_{\text{Экзотическая часть}}.$$

или

$$Z = Z_0 \cdot \underbrace{\int\limits_{\text{Экз. гладкости}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{\text{экз}}[t]\right) D[t]}_{\text{Экзотическая часть}}.$$

Как видим, экзотическая часть не зависит от системы отсчета e и или от метрики g.

В случае, если t пробегает счетное число больших $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$, то

$$Z = Z_0 \cdot \exp\left(-i \frac{vol(D_2)}{L^2} \cdot 4\pi^2 g_4(K)\right),$$

где L — константа, $g_4(K)$ — 4-род, связанный с некоторым узлом K в диске D^4, $vol(D_2)$ — объем некоторого образа диска D^2.

Принимая во внимание сингулярность Большого взрыва в пространстве-времени $\mathbb{R}^4$, скажем в $0 \in \mathbb{R}^4$, и удаляя ее, имеем

$$\mathbb{R}^4 \setminus \{0\} = S^3 \times \mathbb{R},$$

где S^3 — 3-пространство.

Тогда, от момента 0 — рождения Вселенной до современной эпохи, момента 1, имеем

$$\frac{i}{\hbar} S_{\text{экз}}(t) = \frac{i}{\hbar}\left(-\hbar \frac{vol(D_2)}{L^2} \cdot 4\pi^2 g_4(K)\right) = -\frac{i}{\hbar} \int\limits_{S^3 \times [0,1]} 2\Lambda_{\text{cosmos}} \sqrt{g} d^4x.$$

Следовательно,

$$Z = \int D[g, \mathbb{R}^4_{\text{экз}}] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{EH}[g, \mathbb{R}^4_{\text{экз}}]\right),$$

где

$$S_{EH}[g, \mathbb{R}^4_{\text{экз}}] = \int (R - 2\Lambda_{\text{cosmos}})\sqrt{g}d^4x,$$

$$\Lambda_{\text{cosmos}} = \hbar \frac{vol(D_2)}{L^2\ vol(S^3 \times [0,1])} \cdot 2\pi^2 g_4(K) > 0.$$

Мы получили действие с космологической постоянной Λ_{cosmos}, которая дает отталкивание в космосе [15, с. 188], т.е. действует как темная энергия.

То, что экзотичность проявляется в появлении в теории космологической постоянной, говорит о том, что она, экзотичность, и есть темная энергия.

5. Заключение

Первые публикации, обращающие внимание физиков на экзотические $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ как на новый инструмент, с помощью которого теория гравитации предстанет в ином свете были сделаны P. Freund[14] (1985, [50]), А.К. Гуцем (1987, [9]; 1988, [10]; 1992, [11]), Р.И. Пименовым (1987, [53, с. 16]), K. Schleich и D.M. Witt (1992, [49]). Систематические исследования в этом направлении начались с публикаций C.H. Brans[15] (1994, [25]) в 1990-е годы. Большая часть исследований проделана T. Asselmeyer-Maluga[16] в 90-е и нулевые годы.

Пространство-время $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ с экзотической гладкостью, посредством этой гладкости, которая никак не зависит от физических условий, порождает, как было показано в § 4.2, гравитационное поле, оказывающее физическое действие.

Таким образом, экзотическая гладкость действует на физические тела универсальным образом как гравитационное поле. Но в то же самое время на нее можно воздействовать, можно ее изменить, поменять на другую, хотя это и приведет к космологическим последствиям. Во всяком случае, экзотическая гладкость – это то абсолютное *нечто*, а точнее, это гладкое пространство-время, которое действует на тела так, как хотелось Маху, но при этом это *нечто* не выпадает из присущего науке метода мышления: не может быть того, что воздействут, но на что нельзя воздействовать [2, с. 44]. Принцип Маха, похоже, все-таки выполняется в общей теории относительности, но его реализация предполагает допущения в теорию экзотических гладких структур и экзотических $\mathbb{R}^4$, в частности.

Исследования показывают, что универсальность экзотической гладкость более широкая, чем универсальность гравитационного поля. Локализованная экзотичность может проявлять себя как фермионное или бозонное поля, или как черная дыра [37] в соответствии с приведенной в начале § 4 гипотезой Бранса.

Таким образом, идея Эйнштейна о введении принципа общей ковариантности, истоки которой отчасти лежат в принципе эквивалентности, через 100 лет преобразовалась в необходимость исследовать роль экзотических гладких структур в ОТО и в квантовой гравитации. Экзотичность — это космологический фактор, который может сказываться и как притяжение (гравитация) и как отталкивание (антигравитация).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эйнштейн А. Собрание научных трудов в 4-х томах. Т. 1. М.: Изд-во «НАУКА», 1965. 700 с.
2. Эйнштейн А. Собрание научных трудов в 4-х томах. Т. 2. М.: Изд-во «НАУКА», 1966. 880 с.
3. Donaldson S.K. Self-Dual Connections and the Topology of Smooth 4-Manifold // Bull. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 8. P. 81–83.
4. Freedman M.H. The topology of four-dimensional manifolds // J. Diff. Geom. 1982. Vol. 17. P. 357–454.
5. Freedman M.H., Taylor L.R. A universal smoothing of four-space // Journal of Differential Geometry. 1986. Vol. 24. № 1. P. 69–78.
6. Фрид Д., Уленбек К. Инстантоны и четырехмерные многообразия. М.: Мир, 1988. 232 с.

[14] Peter George Oliver Freund (род. 7.09.1936 в Румынии) — профессор теоретической физики at the University of Chicago. Специалист в области теории струн и физики частиц.

[15] Carl Henry Brans (род. 13.12.1935) — американский физик. Один из авторов скалярно-тензорной теории гравитации Бранса-Дикке.

[16] Torsten Asselmeyer-Maluga — немецкий физик (German Aerospace Center).

7. Gompf R. An infinite set of exotic R^4's // J. Diff. Geom. 1985. Vol. 21. P. 283–300.

8. Gompf R., Stipsicz A. 4-manifolds and Kirby Calculus / Graduate Studies in Mathematics. Vol. 20. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1999. Перевод на русский яз.: Гомпф Р., Штипшиц А. Четырехмерные многообразия и исчисление Кирби. М.: изд-во МЦНМО, 2013. 624 с.

9. Гуц А.К. Хроногеометрия и экзотические R^4 // Всесоюзная конференция по геометрии «в целом»: тез. докл. ИМ СО АН СССР. Новосибирск, 1987. С. 36.

10. Гуц А.К. Экзотические R^4 в теории гравитации / Сб.: Гравитация и фундаментальные взаимодействия. УДН им. П. Лумумбы. М., 1988. С. 64–65.

11. Гуц А.К. Экзотические перемещения в пространстве-времени // Лобачевский и современная геометрия: тез. докл. Международная конф. к 200-летию со дня рождения Н.И. Лобачевского. Ч. 2. КГУ. Казань, 1992. С. 23–24.

12. Гуц А.К. Машина времени, кротовые норы и экзотические гладкие структуры / ОмГУ. Омск, 1992. 39 с. Деп. в ВИНИТИ, № 2267-В92.

13. Гуц А.К. Группы порядковых автоморфизмов и их разрывные расширения // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 5. С. 1057–1061.

14. Гуц А.К. Многомерная гравитация и машина времени // Известия вузов. Физика. 1996. № 2. С. 14–19.

15. Гуц А.К. Физика реальности. М.: Изд-во КАН, 2012. 422 с.

16. Akbulut S., Yasui K. Corks, Plugs and exotic structures // J. of Gökova Geometry Topology. 2008. Vol. 2. P. 40-–82.

17. Akbulut S., Yasui K. Stein 4-manifolds and corks // J. of Gökova Geometry Topology. 2012. Vol. 6. P. 58–79.

18. Akbulut S. Exotic structures on smooth 4-manifolds. *http://arxiv.org/pdf/0807.4248.pdf*

19. Asselmeyer-Maluga T., Brans C.H. Exotic smoothness and physics: differential topology and spacetime models. Singapur: World Scientific Publ., 2007. 322 p.

20. Asselmeyer-Maluga T., Brans C.H. Cosmological anomalies and exotic smoothness structures. *http://arxiv.org/pdf/gr-qc/0110043.pdf*

21. Asselmeyer T. Generation of Source Terms in General Relativity by differential structures. *http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9610009v1.pdf*

22. Asselmeyer-Maluga T., Krol J. Topological quantum D-branes and wild embeddings from exotic smooth R^4. *http://ru.arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1105/1105.1557v1.pdf*

23. Asselmeyer-Maluga T., Brans C.H. Gravitational sources induced by exotic smoothness. *http://ru.arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1101/1101.3168v1.pdf*

24. Asselmeyer T. Generation of source terms in general relativity by differential structures // Class. Quant. Grav. 1996. V. 14. P. 749–758. *http://ru.arxiv.org/PS_cache/gr-qc/pdf/9610/9610009v1.pdf*

25. Brans C.H. Exotic smoothness and physics // J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 5494–5506.

26. Brans C.H. Localized Exotic Smoothness // Class. Quant. Grav. 1994. Vol. 11. P. 1785-1792. *http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9404003.pdf*

27. Brans C.H. Exotic smoothness of space-time. *http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9604048v1.pdf*

28. Bizaco Z., Gompf R. Elliptic surfaces and some simple exotic $\mathbb{R}^4$'s // J. Diff. Geom. 1996. Vol. 43. P. 458–504.

29. Milnor J. On simply connected 4-manifolds // Symposium International de Topologia Algebraira. Univ. Nac. Autonoma de Mexico and UNESCO. Mexico City, 1958. P. 122–128.

30. Taylor R.L. Smooth Euclidean 4–spaces with few symmetries // Geometry & Topology Monographs. Vol. 2: Proceedings of the Kirbyfest. 1999. P. 563—569.

31. Sladkowski J. Strongly gravitating empty spaces. *http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9906037.pdf*

32. Sladkowski J. Exotic Smoothness and Astrophysics. *http://arxiv.org/abs/0910.2828v1*

33. Sladkowski J. Gravity on exotic R^4 with few symmetries // Int.J. Mod. Phys. D. 2001. Vol. 10. P. 311–313.

34. Duston C.L. Exotic smoothness in four dimensions and euclidean quantum gravity // Intern. J. of Geom. Methods in Modern Phys. 2011. Vol. 08. Iss. 03. P. 459–484.

35. Duston C.L. Exotic smoothness, branched covering spaces, and quantum gravity: dissertation …for the degree of Doctor of Philosophy. Florida state university, 2013. 118 p.

36. Król J. Exotic smooth 4-manifolds and gerbes as geometry for quantum gravity // Acta physica polonica. 2009. Vol. 40. № 11. P. 3079–3085.

37. Frank Dodd Tony Smith Jr. Exotic R^4 and $E8$ Physics. *http://vixra.org/abs/1401.0070*

38. Doboszewski J. Space invaders and (small) exotic sources // Logic, Relativity and Beyond. 2nd international conference, Budapest, 2015. P. 1–4.
URL: http://www.renyi.hu/conferences/lrb15/LRB15_Doboszewski.pdf

39. Kim J.H. Homothetic maps of distinguishing space-times // Bull. Austral. Math. Soc. 1990. Vol. 42. P. 483–486.

40. Романов А.Н. Лоренцева функция расстояния и причинность: дис. ... на соиск. ученой степ. канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, Институт математики СО РАН, 2002. 120 с.

41. Malament D.B. The class of continuous timelike curves determines the topology of spacetime // J. Math. Phys. 1977. Vol. 18, № 7. P. 1399–1404.

42. Hurder S. Foliation geometry/topology problem set. http://homepages.math.uic.edu/∼hurder/

43. Casson A.J. Three lectures on new-infinite constructions in 4-dimensional manifolds / A la recherche de la topologie perdue, Progr. Math. 1986. Vol.62. Boston, MA: Birkhäuser Boston. P. 201–244.

44. Ray A. Casson towers and filtrations of the smooth knot concordance group: dissertation ... for the degree of Doctor of Philosophy. Rice university, Houston, Texas, 2014. 56 p.

45. Kawach J. Khovanov homology, slice invariants, and exotic R^4: BSc thesis, McMaster University, 2014. 28 p. URL: http://ms.mcmaster.ca/ boden/students/Kawach-BSc.pdf

46. Brans C.H. Exotic Black Holes? *http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9303035.pdf*

47. Schleich K., Witt D.M. Exotic spaces and quantum gravity // AIP Conf. Proc. 1999. Vol. 493. P. 233–237.

48. Schleich K., Witt D. Exotic spaces in quantum gravity. I. Euclidean quantum gravity in seven dimensions // Classical Quant. Grav. 1999. Vol. 16. № 7. P. 2447–2469. *http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9903086v2.pdf*

49. Schleich K., Witt D.M. Generalized sums over histories for quantum gravity (I). Smooth conifolds // Nuclear Physics B. 1993. Vol. 402. Iss. 1–2. P. 411–468.

50. Freund P. Higher-dimensional unification // Physica D. 1985. Vol. 15. Iss. 1–2. P. 263–269.

51. Asselmeyer-Maluga T. Exotic Smoothness and Quantum Gravity. *http://arxiv.org/pdf/1003.5506.pdf*

52. Asselmeyer-Maluga T., Król J. Exotic Smoothness and Quantum Gravity II: exotic R^4, singularities and cosmology. *http://arxiv.org/pdf/1112.4882.pdf*

53. Пименов Р.И. Хроногеометрия: достижения, препятствия, структуры. Серия препринтов «Научные доклады», вып. 160. Коми филиал АН СССР. Сыктывкар, 1987. 24 с.

A. K. Guts

The principle of general covariance and exotic $\mathbb{R}^4$ in General Relativity

Keywords: General Relativity, space-time, smooth structure, exotic smoothness

PACS: 34D08, 93C15

The role of the principle of general covariance in the General relativity is discussed. We show how it has led to consideration of smooth structures in the theory of spacetime. The exotic smooth structures for $\mathbb{R}^4$ are presented. Methods for their construction and properties are given. A review of the physical effects which may occur in the case where the real spacetime has an exotic smooth structure.

REFERENCES

1. Einstein A. *Sobranie nauchnih trudov v 4 tomah* (Collection of scientific proceedings in 4 volums). Vol. 1, Moscow: Nauka, 1965. 700 p.

2. Einstein A. *Sobranie nauchnih trudov v 4 tomah* (Collection of scientific proceedings in 4 volums). Vol. 2, Moscow: Nauka, 1966. 880 p.

3. Donaldson S.K. Self-Dual Connections and the Topology of Smooth 4-Manifold. *Bull. Amer. Math. Soc.,* 1983, vol. 8, pp. 81–83.

4. Freedman M.H. The topology of four-dimensional manifolds. *Journal of Diff. Geom.,* 1982, vol. 17, pp. 357–454.

5. Freedman M.H., Taylor L.R. A universal smoothing of four-space. *Journal of Diff. Geom.*, 1986, vol. 24, no. 1, pp. 69–78.

6. Freed D., Uhlenbeck K. *Instantons and four-dimensional manifolds*, Springer, 1982. 232 p.

7. Gompf R. An infinite set of exotic R^4's. *Journal of Diff. Geom.*, 1985, vol. 21, pp. 283–300.

8. Gompf R., Stipsicz A. *4-manifolds and Kirby Calculus / Graduate Studies in Mathematics*. Vol. 20. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1999. Translated under the title *Chetirehmernie mnogoobraziya i ischislenie Kirbi*, Moscow.: MNTsNMO Publ.„ 2013. 624 p.

9. Guts A.K. Chronogeometry and exotic R^4. *Abstracts of All-Union conference on geometry "at large"*, Institute of mathematics, Novosibirsk, 1987. p. 36.

10. Guts A.K. Exotic R^4 in theory of gravitation. *Gravitatiya i fundamentalnie vzaimodeystviya* Gravitation and fundamentai interaction, Moscow, UDN , 1988, pp. 64–65.

11. Guts A.K. Exotic movings in spacetime. *Lobachevsky and modern geometry: Abstracts of Int. Conf. Dedicated to the 200th Anniversary of N.I.Lobachevsky*, Kazan' State University, Kazan', 1992, Part. 2. pp. 23–24.

12. Guts A.K. Time machine, wormholes and exotic smoothness. OmSU, Omsk, 1992, 39 p. Deposited in VINITI, no. 2267-B92.

13. Guts A.K. Groups of order automorphisms of affine space and their discontinuous extensions. *Soviet Math. Dokl.*, 1985, vol. 32, no.2, pp.537–541.

14. Guts A.K. Many-dimensional gravitation and time machine. *Izvestiya vizov. Fizika*, 1996, no 2, pp. 14–19.

15. Guts A.K. *Physics of reality*. Omsk: KAN publ., 2012. 424 p.

16. Akbulut S., Yasui K. Corks, Plugs and exotic structures. *Journal of Gökova Geom. Topology*, 2008, vol. 2, pp. 40-–82.

17. Akbulut S., Yasui K. Stein 4-manifolds and corks. *Journal of Gökova Geometry Topology*, 2012, vol. 6, pp. 58–79.

18. Akbulut S. Exotic structures on smooth 4-manifolds. *http://arxiv.org/pdf/0807.4248.pdf*

19. Asselmeyer-Maluga T., Brans C.H. Exotic smoothness and physics: differential topology and spacetime models. Singapur: World Scientific Publ., 2007. 322 p.

20. Asselmeyer-Maluga T., Brans C.H. Cosmological anomalies and exotic smoothness structures. *http://arxiv.org/pdf/gr-qc/0110043.pdf*

21. Asselmeyer T. Generation of Source Terms in General Relativity by differential structures. *http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9610009v1.pdf*

22. Asselmeyer-Maluga T., Krol J. Topological quantum D-branes and wild embeddings from exotic smooth R^4. *http://ru.arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1105/1105.1557v1.pdf*

23. Asselmeyer-Maluga T., Brans C.H. Gravitational sources induced by exotic smoothness. *http://ru.arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1101/1101.3168v1.pdf*

24. Asselmeyer T. Generation of source terms in general relativity by differential structures, *Class. Quant. Grav.*, 1996, vol. 14, pp. 749–758. *http://ru.arxiv.org/PS_cache/gr-qc/pdf/9610/9610009v1.pdf*

25. Brans C. Exotic smoothness and physics. *J. Math. Phys.,* 1994, vol. 35, pp. 5494–5506.

26. Brans C.H. Localized Exotic Smoothness. *Class. Quant. Grav.*, 1994, vol. 11, pp. 1785-1792. *http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9404003.pdf*

27. Brans C.H. Exotic smoothness of space-time. *http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9604048v1.pdf*

28. Bizaco Z., Gompf R. Elliptic surfaces and some simple exotic $\mathbb{R}^4$'s. *Journal of Diff. Geom.*, 1996, vol. 43, pp. 458–504.

29. Milnor J. On simply connected 4-manifolds. *Symposium International de Topologia Algebraira*, Univ. Nac. Autonoma de Mexico and UNESCO, Mexico City, 1958, pp. 122–128.

30. Taylor R.L. Smooth Euclidean 4–spaces with few symmetries *Geometry & Topology Monographs: Vol. 2: Proceedings of the Kirbyfest*, 1999. pp. 563—569.

31. Sladkowski J. Exotic Smoothness and Astrophysics. *http://arxiv.org/abs/0910.2828v1*

32. Sladkowski J. Exotic Smoothness and Astrophysics. *http://arxiv.org/abs/0910.2828v1*

33. Sladkowski J. Gravity on exotic R^4 with few symmetries. *Int. J. Mod. Phys. D.,* 2001. vol. 10. pp. 311–313.

34. Duston C.L. Exotic smoothness in four dimensions and euclidean quantum gravity. *Intern. J. of Geom. Methods in Modern Phys.*, 2011, vol. 08, iss. 03, pp.459–484.

35. Duston C.L. Exotic smoothness, branched covering spaces, and quantum gravity. *Ph.D. Dissertation.* Florida state university, 2013. 118 p.

36. Król J. Exotic smooth 4-manifolds and gerbes as geometry for quantum gravity. *Acta physica polonica*, 2009, vol. 40, no. 11, pp. 3079–3085.

37. Frank Dodd Tony Smith Jr. Exotic R^4 and $E8$ Physics. *http://vixra.org/abs/1401.0070*

38. Doboszewski J. Space invaders and (small) exotic sources. *Logic, Relativity and Beyond: 2nd international conference*, Budapest, 2015, pp. 1–4. *http://www.renyi.hu/conferences/lrb15/LRB15_Doboszewski.pdf*

39. Kim J.H. Homothetic maps of distinguishing space-times. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 1990, vol. 42, pp. 483–486.

40. Romanov A.N. Lorentz distance function and causality. *Ph.D. (Phys.–Math.) Dissertation*, Novosibirsk, 2002, 120 p.

41. Malament D.B. The class of continuous timelike curves determines the topology of spacetime. *J. Math. Phys.*, 1977. vol. 18, no. 7, pp. 1399–1404.

42. Hurder S. Foliation geometry/topology problem set. *http://homepages.math.uic.edu/~hurder/*

43. Casson A.J. Three lectures on new-infinite constructions in 4-dimensional manifolds. *A la recherche de la topologie perdue: Progr. Math, 1986, vol. 62*, Boston, pp.201–244.

44. Ray A. Casson towers and filtrations of the smooth knot concordance group. *Ph.D. Dissertation.* Houston, Texas, 2014. 56 p.

45. Kawach J. Khovanov homology, slice invariants, and exotic R^4. *BSc thesis*, McMaster University, 2014. 28 p. *http://ms.mcmaster.ca/ boden/students/Kawach-BSc.pdf*

46. Brans C.H. Exotic Black Holes? *http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9303035.pdf*

47. Schleich K., Witt D.M. Exotic spaces and quantum gravity. *AIP Conf. Proc.*. 1999, vol. 493, pp. 233–237.

48. Schleich K., Witt D. Exotic spaces in quantum gravity. I. Euclidean quantum gravity in seven dimensions. *Classical Quant. Grav.*, 1999, vol. 16, no. 7, pp.2447–2469. *http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9903086v2.pdf*

49. Schleich K., Witt D.M. Generalized sums over histories for quantum gravity (I). Smooth conifolds. *Nuclear Physics B.*, 1993, vol. 402, Iss. 1–2, pp. 411–468.

50. Freund P. Higher-dimensional unification. *Physica D.,* 1985, vol. 15, Iss. 1–2, pp. 263–269.

51. Asselmeyer-Maluga T. Exotic Smoothness and Quantum Gravity. *http://arxiv.org/pdf/1003.5506.pdf*

52. Asselmeyer-Maluga T., Król J. Exotic Smoothness and Quantum Gravity II: exotic R^4, singularities and cosmology. *http://arxiv.org/pdf/1112.4882.pdf*

53. Pimenov R.I. *Hronogeometriya: dostizheniya, prepyatstviya, strukturi* (Chronogeometry: achievements, obstacles structures). A series of preprints «Scientific reports», № 160. Komi Branch of the USSR Academy of Science. Syktivkar, 1987, 24 p.

Received 27.12.2015

Guts Alexander Konstantinovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Department of Cybernetics, Dostoevsky Omsk State University, pr. Mira, 55-a, Omsk, 644077, Russia.
E-mail: guts@omsu.ru