Математические структуры и моделирование
2017. № 1(41). С. 38–44

УДК 004.9:631.4+519.6

КЛИМАКСНЫЙ ЛЕС КАК НЭШЕВСКОЕ РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ ЛЕСНЫХ ЭКОСИСТЕМ

Л.А. Володченкова
к.б.н., доцент, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru
А.К. Гуц
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. Для нахождения возможных равновесных состояний лесных экосистем предлагается использовать теорию дифференциальных игр. В рамках 4-ярусной мозаичной модели лесного фитоценоза устанавливается существование в таких экосистемах равновесных состояний Нэша.

Ключевые слова: лесная экосистема, равновесные состояния экосистемы, дифференциальная игра, равновесие Нэша, климаксный лес.

Введение

Как правило, под равновесным состоянием системы, равновесием понимается *стационарное состояние*, при котором характеризующие его параметры $x(t)$ не меняются со временем, т. е.

$$\frac{dx}{dt} = 0.$$

Однако системы часто управляются внешними факторами $u_1, ..., u_N$, и в действительности их динамика описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u_1, ..., u_N).$$

В таком случае можно рассматривать это уравнение в рамках теории оптимального управления и, более того, в рамках теории дифференциальных игр, отыскивая так называемые *равновесия Нэша*.

В теории дифференциальных игр каждый управляющий фактор u_i считается находящимся в распоряжении некоторого игрока, который старается с его помощью воздействовать на систему таким образом, чтобы иметь максимальный выигрыш или минимальный проигрыш. Выигрыш/проигрыш игрока описывается некоторой заранее заданной функцией $J_i(x, u_1, ..., u_N)$. Очевидно, в реальности трудно предполагать, что факторы могут изменяться совершенно независимо друг от друга, и, следовательно, в системе могут устанавливаться в каком-то смысле равновесия.

Равновесие Нэша в данном случае означает, что если каждый игрок пытается в одностороннем порядке изменить свою стратегию управления, в то время как политика остальных игроков остаётся неизменной, то он имеет худший результат (больший проигрыш).

Динамика лесных экосистем также может описываться дифференциальным уравнением с внешними управляющими факторами. В качестве внешних управляющих факторов могут рассматриваться такие характеристики лесных фитоценозов как оконная динамика m, межвидовая и внутривидовая конкуренция k, антропогенное воздействие a и влажность почвы w.

Естественно попытаться установить существование равновесий Нэша в лесных экосистемах. Мы покажем, что лес в равновесии Нэша — это состояние, к которому стремится лесная экосистема в своём развитии, будучи подвергнутой начальным возмущениям, и это именно то состояние, которое соответствует состоянию климаксного леса.

1. Модель мозаично-ярусного леса

В книге [1] была предложена следующая модель 4-ярусного мозаичного лесного фитоценоза, характеризуемого продуктивностью x:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}V(x, k, m, a, w), \tag{1}$$

где

$$V(x, k, m, a, w) = \frac{\alpha}{6}x^6 + kx^4 + mx^3 + ax^2 + wx. \tag{2}$$

В [1] полностью и подробно исследованы стационарные равновесия таких экосистем.

Ниже мы исследуем равновесные состояния Нэша и устанавливаем их существование у 4-ярусной мозаичной лесной экосистемы.

2. Алгоритм нахождения равновесий Нэша

Естественно рассматривать игру с ненулевой суммой, поскольку «выигрыши» наших игроков слабо связаны.

Если игрок формирует «своё» управляющее воздействие в виде только функции времени $u(t)$ на всю продолжительность игры, то $u(t)$ — это *программное управление* игрока. Ранее мы называли его, используя термин «управление». Однако игрок может выбирать своё управление в зависимости от того, в каком положении x в момент времени t находится система. В таком случае игрок конструирует управляющее воздействие в виде функции $u(t, x)$, зависящей уже от позиции $\{t, x\}$, и для $u(t, x)$ используется термин *позиционное управление* игрока [3]. Часто пишут просто $u(x)$.

Мы будем искать позиционное управление, позиционное равновесие Нэша.

Для дифференциальной игры N-игроков

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \sum_{j=1}^{N} g_j(x)u_j, \quad f(0) = 0,$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad u_j \in \mathbb{R},$$

$$J_i(x, u_1, ..., u_N) = \int\limits_0^{+\infty} [Q_i(x) + \sum_{j=1}^{N} R_{ij}(u_j)^2]dt, \quad (i = 1, ..., N),$$

$$Q_i > 0, \quad R_{ii} > 0, \quad R_{ij} \geqslant 0,$$

существование равновесий Нэша

$$J_i(u_1^*, u_2^*, u_i^*, ..., u_N^*) \leqslant J_i(u_1^*, u_2^*, ..., u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, ..., u_N^*), \quad \forall u_i, \quad i = 1, ..., N \tag{3}$$

сводится к крайне сложной задаче отыскания положительно определённого решения $V_i(x) > 0$ нелинейного уравнения Гамильтона-Якоби

$$(V_i)'_x(x)f(x) + Q_i(x) - \frac{1}{2}(V_i)'_x \sum_{j=1}^{N} [g_j(x)]^2 (R_{jj})^{-1} (V_j)'_x +$$

$$+\frac{1}{4} \sum_{j=1}^{N} R_{ij} [g_j(x)]^2 [(R_{jj})^{-1}]^2 [(V_j)'_x]^2 = 0, \tag{4}$$

по которому строится равновесие Нэша [2, Theorem 10.4-2]:

$$u_i^*(x) = u_i(V_i(x)) = -\frac{1}{2} R_{ii}^{-1} g_i(x)(V_i)'_x, \quad i = 1, ..., N. \tag{5}$$

3. Нэшевское равновесие лесной экосистемы

В нашем случае $N = 4$, игрок 1 — это фактор $u_1 = k$ конкуренции деревьев, игрок 2 — это оконная динамика $u_2 = m$, определяющая мозаичность фитоценоза, игрок 3 — антропогенное вмешательство $u_3 = a$ в лесную экосистему (вырубка леса, пожары и т. д.), и, наконец, игрок 4 — влажность почвы $u_4 = w$.

Далее

$$f(x) = -\alpha x^5, \quad g_1(x) = -4x^3, \quad g_2(x) = -3x^2, g_3(x) = -2x, \quad g_4(x) = -1$$

и при $R_{11} = R_{22} = R_{33} = R_{44} = 1, R_{ij} = 0 \ (i \neq j)$ уравнения Гамильтона-Якоби имеют вид:

$$Q_i + (V_i)'_x f(x) - \frac{1}{2}(V_i)'_x F(x) + \frac{1}{4}[g_i(x)]^2 [(V_i)'_x]^2 = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{6}$$

где

$$F(x) = \sum_{j=1}^{4} [g_j(x)]^2 (V_j)'_x.$$

Полагая, что

$$V_1(x) = V_2(x) = V_3(x) = V_4(x) = \frac{1}{2}x^2 > 0,$$

получаем уравнения Гамильтона-Якоби в виде

$$\begin{aligned} Q_1 &= \alpha x^6 + 4x^8 + \frac{9}{2}x^6 + 2x^4 + \frac{1}{2}x^2, \\ Q_2 &= \alpha x^6 + 8x^8 + \frac{9}{4}x^6 + 2x^4 + \frac{1}{2}x^2, \\ Q_3 &= \alpha x^6 + 8x^8 + \frac{9}{2}x^6 + x^4 + \frac{1}{2}x^2, \\ Q_4 &= \alpha x^6 + 8x^8 + \frac{9}{2}x^6 + 2x^4 + \frac{1}{4}x^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Поскольку все функции Q_i положительно определённые, то для этих функций и выбранных выше функций V_i уравнения Гамильтона-Якоби выполняются. Поэтому по теореме 10.4-2 из [2] имеем равновесие Нэша

$$k^* = 2x^4, \quad m^* = \frac{3}{2}x^3, \quad a^* = x^2, \quad w^* = \frac{1}{2}x, \tag{8}$$

найденное по формулам (5).

Выигрышные/проигрышные функции

$$\begin{aligned} J_1(x,k,m,a,w) &= \int\limits_0^{+\infty} [Q_1(x) + k^2]dt, \\ J_2(x,k,m,a,w) &= \int\limits_0^{+\infty} [Q_2(x) + m^2]dt \\ J_3(x,k,m,a,w) &= \int\limits_0^{+\infty} [Q_3(x) + a^2]dt, \\ J_4(x,k,m,a,w) &= \int\limits_0^{+\infty} [Q_4(x) + w^2]dt. \end{aligned} \tag{9}$$

Продуктивность x в случае равновесия Нэша (8) находятся посредством интегрирования уравнений (1)-(2). Имеем

$$\int \frac{x^{-1}dx}{8x^6 + (9/2+\alpha)x^4 + 2x^2 + 1/2} = -t + C, \tag{10}$$

где C — константа интегрирования, или

$$2\ln(x) - \sum_R \frac{(16R^2 + 9R + 2Ra + 4)\ln(x^2 - R)}{(48R^2 + 18R + 4Ra + 4)} =$$

$$= -t + C,$$

где

$$R \ - \text{корень уравнения} \ \ 16Z^3 + (9 + 2a)Z^2 + 4Z + 1 = 0.$$

Для $\alpha = 0,0007$, т. е. для леса с 70% массы в верхнем ярусе и по 10% в трёх других имеем решение:

$$2.*\ln(x) - .7721839916*\ln(x^2 + .35461134547644) - .1139080042*\ln((x^2 + .1039880773)^2 +$$

$$+ .1654357758) + .7314668785 * \arctan(.4067379695 * 1/(x^2 + .1039880773))$$

$$= -t + C.$$

В случае $C = 100$ это решение представлено на рис. 1.

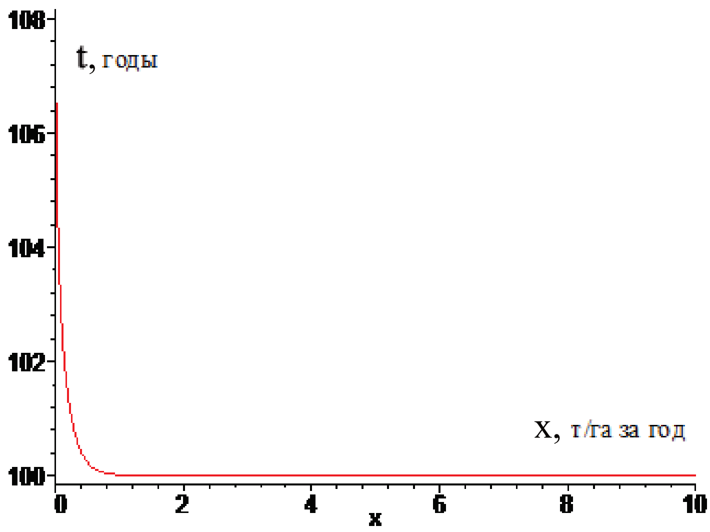

Рис. 1. Продуктивность леса в условиях равновесия Нэша (8)

Мы видим, что с течением времени продуктивность фитоценоза постепенно падает. Иначе говоря, лес асимтотически выходит на нулевое предельное значение продуктивности. Но наступает это не раньше, чем через 100 лет.

Однако если учесть, что система (1)–(2) получена, в частности, упрощением аналогичной системы [1] с функцией

$$V(x, k, m, a, w) = \frac{\alpha}{6}(x - x_{\text{гр}})^6 + k(x - x_{\text{гр}})^4 + m(x - \text{гр})^3 + a(x - x_{\text{гр}})^2 + w(x - x_{\text{гр}}),$$

посредством замены $x - x_{\text{гр}} \to x$, то следует говорить об асимтотическом падении продукции фитоценоза постепенно до величины $x_{\text{гр}} > 0$.

Здесь через $x_{\text{гр}}$ обозначена характерная наблюдаемая (измеряемая) для изучаемого типа леса продукция фитомассы в отсутствии сколь-либо серьёзных изменений внешних факторов. Фактически это «*исходное значение*» продукции фитомассы леса, наблюдаемое на протяжении ряда лет и принимаемое как точка отсчёта при прогнозировании будущих состояний экосистемы [1, с. 155].

Фактически найденное равновесие Нэша соответствует тому, что в лесоведении называется климаксом леса.

Напомним, что *климакс леса* (от греч. klimax – лестница) – это сравнительно зрелая, устойчивая (находящаяся в состоянии динамического равновесия с окружающей средой), «заключительная» стадия формирования фитоценоза, формирования лесной экосистемы.

Заметим, что для позиционного управления (8) получаемое уравнение продуктивности является асимтотически устойчивым (теорема 10.4-2, утверждение a из [2]). Иначе говоря, возмущения начальных условий автоматически гасятся экосистемой, находящейся в найденном равновесии Нэша, и она возвращается к исходной траектории развития. Это математическое свойство системы (1), (2), (8) вполне соответствует понятию климаксного леса.

Заключение

Мы показали, что возможно применить теорию дифференциальных игр к исследованию лесных экосистем. Мы показали, что в таких экосистемах существует равновесие Нэша, устанавливаемое в системе в случае, когда достигается некоторая определённая опосредованная связь между внешними факторами, влияющими на продуктивность леса.

В качестве дальнейшего исследования необходимо и полезно определить, какие леса и в каких случаях оказываются в равновесиях Нэша и как это выражается в терминах традиционной науки о лесах и лесных экосистемах.

Литература

1. Володченкова Л.А., Гуц А.К. Кибернетика катастроф лесных экосистем. Омск : Полиграфический центр КАН, 2012. 220 с.
2. Lewis F.L., Vrabie D.L., Syrmos V.L. Optimal Control. John Wiley & Sons, Inc., 2012. URL: `http://www.uta.edu/utari/acs/FL\%20talks/CDC\%20Orlando\%202011-\%20online\%20synch\%20PI.pdf`.
3. Тынянский Н.Т., Жуковский В.И. Дифференциальные игры с ненулевой суммой (кооперативный вариант) // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. 1979. Т. 17. С. 3—112.

CLIMAX FOREST AS THE NASH EQUILIBRIUM OF FOREST ECOSYSTEMS

L.A. Volodchenkova
Ph.D. (Biology), Associate Professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru
A.K. Guts
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. To find the possible equilibrium states of forest ecosystems one are encouraged to use the theory of differential games. At within the 4-tier model of mosaic forest communities it establishes the existence in such ecosystems the Nash equilibrium states.

Keywords: forest ecosystem, the equilibrium of the ecosystem, differential game, Nash equilibrium, climax forest.

Дата поступления в редакцию: 18.11.2016