Математические структуры и моделирование
2017. № 3(43). С. 63–69

УДК 004.9 : 631.4 + 519.6
DOI: 10.25513/2222-8772.2017.3.63-69

РАВНОВЕСНАЯ ДИНАМИКА ПЛОДОРОДИЯ ПОЧВЫ В ЗАСУШЛИВЫХ И ВЛАЖНЫХ РЕГИОНАХ

Л.А. Володченкова
к.б.н., доцент, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru
А.К. Гуц
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. В статье исследуется равновесная в смысле Нэша динамика почвы в засушливых и влажных регионах в рамках теории дифференциальных игр.

Ключевые слова: равновесие Нэша, модель почвы, плодородие почвы, засушливый регион, дифференциальные игры.

Почва относится к числу основных факторов, определяющих условия произрастания растительности. В [1–3] была предложена модель почвы в виде дифференциального уравнения для меры плодородия почвы:

$$\frac{dy}{dt} = \gamma \cdot [(p - p_0) - y^2]y - \delta \cdot (W - W_-)(W - W_+), \tag{1}$$

где y — мера плодородия почвы, p — мера типа почвообразующей породы, W — влажность почвы, W_- — значение влажности почвы, которое характеризует нехватку воды, и, соответственно, W_+ — её избыток, $0 < W_- < W_+$, и γ, δ — положительные константы.

Уравнение системы (1) — это уравнение, реализующее упрощённое представление о плодородии почвы и учитывающее только два фактора: тип почвообразующей породы и влажность почвы. Их изменение может привести к скачкообразному изменению плодородия почвы, и это мы смоделировали, вводя в правую часть уравнения катастрофу типа «сборка». В точке (p_0, W_-) происходит катастрофа падения плодородия, связанная с нехваткой воды в почве, а в точке (p_0, W_+) — катастрофа падения плодородия при избытке влаги [1].

Мы видим, что динамика плодородия почвы зависит от двух управляющих факторов: от меры типа почвообразующей породы p и от влажности почвы W.

В данной статье мы посмотрим на эти два фактора как на двух игроков, которые пытаются оптимизировать свой выигрыш, меняя стратегии управления.

Очевидно, в природе реализуется некоторое равновесие, которое возникает в том случае, когда один игрок каким-то образом соотносит свои действия, свою стратегию управления с действиями другого игрока.

В теории игр одним из самых известных равновесий является *равновесие Нэша*.

Реализация равновесия Нэша означает, что если каждый игрок пытается в одностороннем порядке изменить свою стратегию управления, в то время как политика остальных игроков остаётся неизменной, то он имеет худший результат (больший проигрыш).

1. Динамика плодородия почвы для засушливых регионов

При длительных засухах происходит естественное опустынивание. Опустынивание (дезертификация) почв — это деградация почв с постепенной потерей плодородия.

В засушливых районах влияние растительности на почву ослаблено в силу её скудности. Поэтому имеет смысл изучить динамику почвы, не учитывая взаимодействие почвы с растительностью.

В нашей модели почвы, если речь идёт о засушливых районах, влажность W находится в окрестности параметра W_{-}. Иначе говоря, вместо уравнения (1) будем изучать уравнение

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y^3 + \gamma y p + \mu \cdot (W - W_{-}), \tag{2}$$

$$\mu > 0, \quad t \in [0, T].$$

2. Динамика плодородия почвы для влажных регионов

Однако можно искать равновесия, предполагая, что недостаток влаги (засуха) в наших краях — явление крайне редкое, и поэтому можно считать, что W находится в окрестности параметра W_{+}. Иначе говоря, вместо уравнения (1) можно изучать уравнение

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y^3 + \gamma y p - \lambda \cdot (W - W_{+}), \tag{3}$$

$$\lambda > 0, \quad t \in [0, T].$$

Почва связана потоками энергии и вещества с растительностью и совместно с животными и микроорганизмами формирует целостный лесной биогеоценотический покров. Растительность влажных районов — существенная составляющая биоценоза. Поэтому динамику плодородия почвы для влажного региона следует изучать с учётом взаимодействия в системе «почва-растительность». Это было сделано в статье [4].

3. Алгоритм нахождения равновесий Нэша

Рассматривать игру с ненулевой суммой вполне разумно, поскольку «выигрыши» наших игроков p и W слабо связаны.

Если игрок формирует «своё» управляющее воздействие в виде только функции времени $u(t)$ на всю продолжительность игры, то $u(t)$ — это *программное управление* игрока. Ранее мы называли его, используя термин «управление». Однако игрок может выбирать своё управление в зависимости от того, в каком положении y в момент времени t находится система «почва». В таком случае игрок конструирует управляющее воздействие в виде функции $u(t, y)$, зависящей уже от позиции $\{t, y\}$, и для $u(t, y)$ используется термин *позиционное управление* игрока [5]. Часто пишут просто $u(y)$.

Мы будем искать позиционное управление, позиционное равновесие Нэша.

Для дифференциальной игры N-игроков [6]

$$\frac{dz}{dt} = f(z) + \sum_{j=1}^{N} g_j(z)u_j, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad u_j \in \mathbb{R}^{m_j}, \quad f(0) = 0,$$

$$J_i(z, u_1, ..., u_N) = \int_0^{+\infty} [Q_i(z) + \sum_{j=1}^{N} u_j^T R_{ij} u_j] dt, \quad (i = 1, ..., N),$$

где $Q_i > 0$ и $R_{ii} > 0$, $R_{ij} \geqslant 0$ — симметрические матрицы, *существование равновесий Нэша*

$$J_i(u_1^*, u_2^*, u_i^*, ..., u_N^*) \leqslant J_i(u_1^*, u_2^*, ..., u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, ..., u_N^*), \quad \forall u_i, \quad i = 1, ..., N \tag{4}$$

сводится к крайне сложной задаче отыскания решения $V_i(z)$ нелинейного уравнения Гамильтона-Якоби

$$(\nabla V_i)^T f(z) + Q_i(z) - \frac{1}{2}(\nabla V_i)^T \sum_{j=1}^{N} g_j(z)(R_{jj})^{-1}(g_j(z))^T(\nabla V_j) +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N}(\nabla V_j)^T g_j(z) R_{jj}^{-T} R_{ij} R_{jj}^{-1} (g_j(z))^T (\nabla V_j) = 0, \tag{5}$$

$$\nabla V_i = \begin{pmatrix} (V_i)'_x \\ (V_i)'_y \end{pmatrix}, \quad (\nabla V_i)^T = ((V_i)'_x, (V_i)'_y),$$

по которому строится равновесие Нэша [6, Theorem 10.4-2, утверждение b.]:

$$u_i^*(z) = u_i(V_i(z)) = -\frac{1}{2} R_{ii}^{-1} (g_i(z))^T (\nabla V_i), \quad i = 1, ..., N. \tag{6}$$

Равновесная динамика с управлением Нэша (6) задаётся уравнением

$$\frac{dz}{dt} = f(z) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} g_j(z) R_{jj}^{-1} (g_i(z))^T (\nabla V_j). \tag{7}$$

4. Нэшевское равновесие для уравнений (2) и (3)

Для того чтобы проанализировать динамику плодородия почвы в засушливых и незасушливых районах и вести вычисления одновременно, уравнения (2), (3) запишем в едином виде

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y^3 + \gamma y p - \omega \cdot (W - \widehat{W}), \tag{8}$$

где для засушливого района: $\omega = -\mu < 0, \widehat{W} = W_-$ и $\omega = \lambda > 0$, $\widehat{W} = W_+$ — для влажного.

$$\lambda > 0, \quad t \in [0, T].$$

Сделаем замену в уравнении (7) $y = \bar{y} + c$, $c = const$ и подберём c так, чтобы слагаемое в правой части, в которое не входят факторы p, W при $\bar{y} = 0$ обращалось в нуль, как это требуется в теории из § 3.

Легко найти, что $c = (\omega\widehat{W}/\gamma)^{1/3}$. В результате такой замены мы вместо уравнения (7) можем изучать, не ограничивая общности, уравнение

$$\frac{dy}{dt} = [-\gamma y^3 - 3\gamma c y^2 - 3\gamma c^2 y - \gamma c^3 + \omega\widehat{W})] + \gamma(y + c)p - \omega W. \tag{9}$$

Уравнение (9) представим в виде

$$\frac{dy}{dt} = f(y) + g_1(y)u_1 + g_2(y)u_2, \tag{10}$$

где

$$f(y) = -\gamma y^3 - 3\gamma c y^2 - 3\gamma c^2 y - \gamma c^3 + \omega\widehat{W}, \qquad f(0) = 0,$$

$$g_1(y) = \gamma(y + c), \quad g_2(y) = -\omega,$$

$$u_1 = p, \ u_2 = W.$$

Будем считать, что у нас 2 игрока. Игрок 1 — это фактор $u_1 = p$ — мера типа почвообразующей породы, игрок 2 — влажность почвы.

Выигрышные функции возьмём в виде:

$$J_i(y, u_1, u_2) = \int\limits_0^{+\infty} [Q_i(y) + u_i^2]dt, \quad (i = 1, 2) \tag{11}$$

и числа

$$Q_i > 0, \quad R_{ii} > 0, \quad R_{ij} \geqslant 0.$$

Рассматриваем игру с ненулевой суммой.

Используем теперь теорию, изложенную в § 3, для нахождения равновесий Нэша для уравнения (10).

В нашем случае $N = 2$, и рассматриваем $R_{11} = R_{22} = 1$, $R_{ij} = 0$ $(i \neq j)$.

Тогда уравнения Гамильтона-Якоби (5) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&Q_1 + (V_1)' f(y) - \frac{1}{2}(V_1)'[g_1^2(V_1)' + g_2^2(V_2)'] - \frac{1}{4}[g_1(y)]^2[(V_1)']^2 = 0,\\
&Q_2 + (V_2)' f(y) - \frac{1}{2}(V_2)'[g_1^2(V_1)' + g_2^2(V_2)'] - \frac{1}{4}[g_2(y)]^2[(V_2)']^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Полагая, что

$$V_1'(y) = V_2'(y) = -f(y),$$

получаем уравнения Гамильтона-Якоби в виде

$$
\begin{aligned}
Q_1(y) &= [f(y)]^2(1 + \frac{1}{2}[g_1^2]^2 + \frac{1}{4}[g_2]^2) > 0,\\
Q_2(y) &= [f(y)]^2(1 + \frac{1}{4}[g_1]^2 + \frac{1}{2}[g_2]^2) > 0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Следовательно, если Q_i выбрать именно такими, то уравнения Гамильтона-Якоби выполняются.

Поэтому по теореме 10.4-2 (пункт b)) из [6] имеем равновесие Нэша

$$p^*(y) = \frac{1}{2}g_1(y)f(y), \qquad W^*(y) = \frac{1}{2}g_2(y)f(y), \tag{14}$$

найденное по формулам (6).

Выигрышные/проигрышные функции поэтому имеют вид:

$$
\begin{aligned}
J_1(y,p,W) &= \int\limits_0^{+\infty} \left(Q_1(y) + [p^*(y)]^2\right) dt,\\
J_2(y,p,W) &= \int\limits_0^{+\infty} \left(Q_2(y) + [W^*(y)]^2\right) dt.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Равновесная нэшевская динамика описывается уравнением (7), имеющим в нашем случае следующий вид

$$\frac{dy}{dt} = f(y)\left(1 + \frac{1}{2}[g_1(y)]^2 + \frac{1}{2}[g_2(y)]^2\right), \tag{16}$$

или

$$\frac{dy}{dt} = \left(-\gamma y^3 - 3\gamma c y^2 - 3\gamma c^2 y - \gamma c^3 + \omega\widehat{W}\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{2}[\gamma(y+c)]^2 + \frac{1}{2}\omega^2\right), \tag{17}$$

получаемым из уравнения (9) заменой p и W на $p^*(y)$ и $W^*(y)$ соответственно.

Рассмотрим случай засушливого региона и возьмём

$$\gamma = 1, \quad \omega = -1, \quad \widehat{W} = 1, \quad c = -1. \tag{18}$$

Тогда интегрируя уравнение (17), получаем

$$\int \frac{dy}{\left(-\gamma y^3 - 3\gamma c y^2 - 3\gamma c^2 y - \gamma c^3 + \omega \widehat{W}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}[\gamma(y+c)]^2 + \frac{1}{2}\omega^2\right)} = t + const,$$

или

$$t = -1/6 * \ln(y) + 4/21 * ln(y^2 - 3 * y + 3) -$$
$$-4/21 * \sqrt(3) * \arctan(1/3 * (2 * y - 3) * \sqrt(3)) - 3/28 * \ln(4 + y^2 - 2 * y) -$$
$$-1/42 * \sqrt(3) * \arctan(1/6 * (2 * y - 2) * \sqrt(3)) + const.$$

Результат интегрирования уравнения представлен на рис. 1 Мы видим, что плодородие, как и следовало ожидать для засушливого района, падает. Происходит опустынивание почвы.

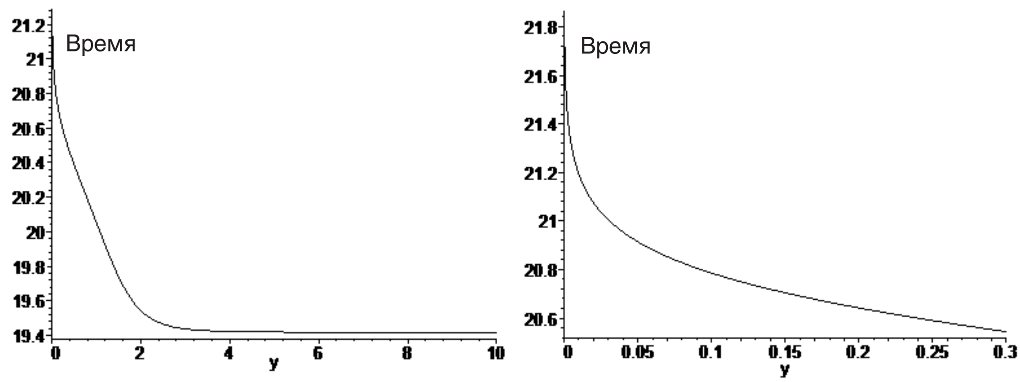

Рис. 1. Примеры равновесной динамики меры плодородия для засушливого региона в условиях равновесия Нэша при $const = 20$

Обратим внимание, что в нашем примере (18)

$$f(y) = -y^3 + 3y^2 - 3y < 0 \quad \text{при} \quad y > 0,$$

и, следовательно,

$$V_1(y) = V_2(y) = -\int_0^y f(y)dy > 0 \quad \text{при} \quad y > 0.$$

Тогда на основании теоремы 10.4–2 (пункт а)) из [6] можно заявить, что решения уравнения (17), (18) будут асимптотически устойчивыми.

Литература

1. Володченкова Л.А. Модель плодородия почвы с точки зрения катастрофы «сборка» // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов Международной научной конференции (Омск, 21 ноября 2014 г.). Омск : изд-во Ом. гос. ун-та, 2014. С. 25–26.

2. Гуц А.К., Володченкова Л.А. Математическая модель взаимосвязи «растительность-почва» в лесных экосистемах // Математические структуры и моделирование. 2015. № 3(35). С. 56–60.
3. Гуц А.К., Володченкова Л.А. Теоретико-катастрофическая модель взаимосвязи «растительность-почва» в лесных экосистемах // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов Международной научной конференции (Омск, 21 ноября 2014 г.). Омск : изд-во Ом. гос. ун-та, 2014. С. 23–24.
4. Володченкова Л.А., Гуц А.К. Равновесная динамика лесных экосистем с учетом взаимосвязи «растительность-почва» // Математические структуры и моделирование. 2017. № 2(42). С. 68–79.
5. Тынянский Н.Т., Жуковский В.И. Дифференциальные игры с ненулевой суммой (кооперативный вариант) // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. 1979. Т. 17. С. 3–112.
6. Lewis F.L., Vrabie D.L., Syrmos V.L. Optimal control. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., 2012. 540 p.

THE EQUILIBRIUM DYNAMICS OF SOIL FERTILITY IN ARID AND HUMID REGIONS

L.A. Volodchenkova
Ph.D. (Biology), Associate Professor, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru
A.K. Guts
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University

Abstract. The article investigates the equilibrium dynamics in the sense of Nash of soils in arid and humid regions in the framework of the differential games theory.

Keywords: the Nash equilibrium, model of soil, soil fertility, arid region, differential games.

Дата поступления в редакцию: 11.06.2017