Математические структуры и моделирование
2018. №1 (45). С. 52–56

УДК 004.9:631.4+519.6
DOI 10.25513/2222-8772.2018.1.52-56

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАВНОВЕСНОЙ ЭВОЛЮЦИИ ФОРМИРОВАНИЯ ЛЕСНОГО БИОЦЕНОЗА НА СПЛОШНЫХ ВЫРУБКАХ

Л.А. Володченкова
к.б.н., доцент, e-mail: volodchenkova2007@yandex.ru
А.К. Гуц
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Аннотация. Показано, что восстановления леса после вырубки может описываться как равновесная по Нэшу эволюция.

Ключевые слова: Восстановление леса, равновесная эволюция, равновесие Нэша.

Введение

В восстановлении леса после вырубок в большинстве случаев участвует несколько древесных видов. Выявлено, что их доли в составе формирующихся лесов не остаются постоянными и часто изменяются резко, скачком (проявляя дискретность) при плавном непрерывном изменении абиотических факторов. Такие явления легко описываются моделями теории катастроф Рене Тома.

Используя модель формирования лесной растительности, предложенную Г.П. Быстраем и Н.С. Ивановой [1], покажем, что восстановление лесного биоценоза может представлять эволюцию, равновесную по Нэшу.

1. Модель формирования нового древостоя

Г.П. Быстрай и Н.С. Иванова [1] предложили теоретико-катастрофическую модель формирования лесной растительности на сплошных вырубках. После сплошных рубок возможно несколько альтернативных линий развития растительности. Из всего разнообразия возможных вариантов смен древесных видов авторы рассматривают только взаимоотношения березы (Betula pendula Roth. и B. pubescens Ehrh.) и сосны (Pinus sylvestris L.) – наиболее распространённых на Урале и в Зауралье древесных видов – в процессе зарастания вырубок и формирования нового древостоя.

Модель представляет дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\rho}{dt} = -|k_1|\rho + |k_2|T\rho^2 - |k_3|\rho^3 + |k_4|H, \qquad (1)$$

где

ρ – характеристика, описывающая интенсивность возобновления древесной растительности: плотность (масса) подроста сосны (Pinus sylvestris) и подроста берёзы (Betula pendula и B. pubescens);

$T = (\rho_0 - \rho_m)/\rho_0$ – безразмерная характеристика интенсивности развития травянистого яруса;

$\rho_0 = (\rho_S - \rho_B)/2$ – средняя суммарная масса (плотность) сосны (Pinus sylvestris) и берёзы (Betula pendula и B. pubescens);

ρ_m – масса трав (плотность);

k_i – некоторые другие параметры экосистемы, подлежащие определению.

Управляющий параметр H – характеристика богатства лесорастительных условий (мощность почвы). Мощность почвы – комплексный фактор, характеризующий запас в почве элементов минерального питания и влаги и широко используемый в лесной типологии. Увеличение H (мощности почв) приводит к угнетению сосны в большей степени, чем берёзы.

Благодаря заменам

$$\eta = \frac{\rho}{\rho_c} - T\rho_0^*,$$

$$a = -3[T^2(\rho_0^*)^2 - 1], \quad b = -\frac{H}{H_c} + 3T\rho_0^* - 2T^3(\rho_0^*)^3,$$

$$\rho_0^* = |k_2|/(3|k_3|\varrho_c),$$

где ρ_c – некоторый масштаб плотности: плотность древесной растительности в критической точке, в которой плотность сосны и берёзы равны (смешанный древостой);

$$|k_1| = 3/t_0, \quad |k_2| = 3/(t_0\rho_c), \quad |k_3| = 1/(t_0\rho_c^2), \quad |k_4| = \rho_c/(H_c t_0),$$

и t_0 характеризует смену временного масштаба: $t = t : t_0$, уравнение (1) приводится к следующему виду:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \eta}, \tag{2}$$

$$F = \frac{1}{4}\eta^4 + \frac{1}{2}a\eta^2 + b\eta.$$

Это соответствует модели катастрофы «сборка».

Модель позволяет исследовать устойчивость текущих стационарных равновесных состояний (т.е. удовлетворяющих уравнению $d\eta/dt = 0$) лесной системы и прослеживать динамику формирования растительности (см. [1, 2]).

Однако сам процесс переходов при использовании теории катастроф является скачкообразным, т.е. не представляется как решение дифференциального уравнения.

Мы предлагаем посмотреть на уравнение (2) с точки зрения теории дифференциальных игр, когда эволюция растительности управляется параметрами a и b и и они могут динамически меняться в каждый момент времени и траектория $\eta = \eta(t)$ может быть оптимально равновесной в смысле Нэша [4]. Покажем, что такая равновесная эволюция (a^*, b^*) по Нэшу возможна.

Для отыскания такого равновесия воспользуемся теорией дифференциальных игр [3, 4].

2. Алгоритм нахождения равновесий Нэша

Рассмотрим дифференциальную игру вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u), \quad u = (u_1, ..., u_m),$$

где u_i – управляющий параметр i-го игрока.

Если игрок i формирует «свое» управляющее воздействие в виде только функции времени $u_i(t)$ на всю продолжительность игры, то $u_i(t)$ – это *программное управление* игрока. Однако игрок может выбирать свое управление в зависимости от того, в каком положении x в момент времени t находится система. В таком случае игрок конструирует управляющее воздействие в виде функции $u_i(t,x)$, зависящей уже от позиции $\{t,x\}$, и для $u_i(t,x)$ используется термин *позиционное управление* игрока [5]. Часто пишут просто $u_i(x)$.

Мы будем искать позиционное управления, позиционное равновесие Нэша.

Для дифференциальной игры N-игроков

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \sum_{j=1}^{N} g_j(x)u_j, \quad f(0) = 0,$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad u_j \in \mathbb{R},$$

$$J_i(x, u_1, ..., u_N) = \int\limits_0^{+\infty} [Q_i(x) + \sum_{j=1}^{N} R_{ij}(u_j)^2]dt, \quad (i = 1, ..., N),$$

$$Q_i > 0, \quad R_{ii} > 0, \quad R_{ij} \geq 0,$$

существование равновесий Нэша

$$J_i(u_1^*, u_2^*, u_i^*, ..., u_N^*) \leq J_1(u_1^*, u_2^*, ..., u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^* ..., u_N^*), \quad \forall u_i, \quad i \in N, \tag{3}$$

сводится к крайне сложной задаче отыскания положительно определенного решения $V_i(x) > 0$ нелинейного уравнения Гамильтона-Якоби

$$(V_i)'_x(x)f(x) + Q_i(x) - \frac{1}{2}(V_i)'_x \sum_{j=1}^{N} [g_j(x)]^2 (R_{jj})^{-1} (V_j)'_x +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{N} R_{ij}[g_j(x)]^2[(R_{jj})^{-1}]^2[(V_j)'_x]^2 = 0, \tag{4}$$

по которому строится равновесие Нэша [4, Theorem 10.4-2]:

$$u_i^*(x) = u_i(V_i(x)) = -\frac{1}{2}R_{ii}g_i(x)(V_i)'_x, \quad i \in N. \tag{5}$$

Мы рассматриваем восстановление растительности как игру (2) с ненулевой суммой и двуми игроками, соответствующими управляющим параметрам a и b.

В нашем случае $N = 2$, игрок 1 – это интенсивности развития травянистого яруса a, игрок 2 – это взамосвязь травянистого яруса и богатства лесорастительных условий (мощность почвы):

$$f(x) = -\eta^3, \quad g_1(\eta) = -\eta, \quad g_2(\eta) = -1,$$

и при $R_{11} = R_{22} = 1, R_{12} = R_{21} = 0$ уравнения Гамильтона-Якоби имеют вид:

$$\begin{aligned} Q_1 + (V_1)'_\eta f(\eta) - \frac{1}{4}[g_1(\eta)]^2[(V_1)'_\eta]^2 - \frac{1}{2}[g_2(\eta)]^2(V_1)'_\eta(V_2)'_\eta + \frac{1}{4}[g_2(\eta)]^2[(V_1)'_\eta]^2 = 0, \\ Q_2 + (V_2)'_\eta f(\eta) - \frac{1}{4}[g_2(\eta)]^2[(V_2)'_\eta]^2 - \frac{1}{2}[g_1(\eta)]^2(V_1)'_\eta(V_2)'_\eta + \frac{1}{4}[g_1(\eta)]^2[(V_1)'_\eta]^2 = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Полагая, что

$$V_1(\eta) = V_2(\eta) = \frac{1}{2}\eta^2,$$

получаем уравнения Гамильтона-Якоби в виде

$$\begin{aligned} Q_1 = \frac{5}{4}\eta^4 + \frac{1}{4}\eta^2 > 0, \\ Q_2 = \frac{5}{4}\eta^4 + \frac{1}{4}\eta^2 > 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Мы выбираем эти фунции Q_1, Q_2 именно такими, поэтому уравнения Гамильтона-Якоби удовлетворяются.

Наши функции Q_1, Q_2 положительно определенные. Поэтому по теореме 10.4-2 из [4] имеем равновесие Нэша

$$a^* = \frac{1}{2}\eta^2, \qquad \mathfrak{b}* = \frac{1}{2}\eta, \tag{8}$$

найденное по формулам (5).

Выигрышные функции

$$\begin{aligned} J_1(\eta, a, b) = \int\limits_0^{+\infty} [Q_1(\eta) + a^2]dt, \\ J_2(\eta, a, b) = \int\limits_0^{+\infty} [Q_2(\eta) + b^2]dt. \end{aligned} \tag{9}$$

Равновесная по Нэшу эволюция формирования древостоя в данном случае задается уравненим

$$\frac{d\eta}{dt} = -\frac{3}{2}\eta^3 - \frac{1}{2}\eta.$$

Интегрируя это уравнение, находим семейство оптимальных равновесный траекторий

$$arctg(\eta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}t + const.$$

3. Заключение

Мы показали, что восстановление лесного биоценоза может быть описано как равновесная эволюция по Нэшу. Найдена только одна равновесная эволюция, хотя не исключено, что их может намного больше, поскольку при восстановлении леса возможно участие различных видов растительности (березняки разнотравно-вейниковые, сосняки брусничниковые и т.д.).

Литература

1. Быстрай Г.П., Иванова Н.С. Подходы к моделированию динамики лесной растительности на основе теории катастроф // Аграрный вестник Урала. 2010. 2 (68). С.75-79.
2. Володченкова Л.А., Гуц А.К. Кибернетика катастроф лесных экосистем. Омск: Полиграфический центр КАН, 2012. 220 с.
3. Гуц А.К., Володченкова Л.А. Климаксный лес как нэшевское равновесное состояние лесных экосистем // Математические структуры и моделирование. 2017. № 1 (41). С.38-44.
4. Lewis F.L., Vrabie D.L., Syrmos V.L. Optimal Control. John Wiley & Sons, Inc., 2012. URL:http://www.uta.edu/utari/acs/FL%20talks/CDC%20Orlando%202011-%20online%20synch%20PI.pdf
5. Тынянский Н.Т., Жуковский В.И. Дифференциальные игры с ненулевой суммой (кооперативный вариант) // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. 1979. Т. 17. С. 3—112.

Дата поступления в редакцию: 02.02.2018