



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Гуц, Об отображениях семейств множеств,
Докл. АН СССР, 1973, том 209, номер 4, 773–774

<https://www.mathnet.ru/dan37562>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 80.249.207.97

15 апреля 2025 г., 19:45:37



А. К. ГУЦ

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ СЕМЕЙСТВ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком А. Д. Александровым 21 VI 1972)

Пусть L^n — n -мерное пространство Лобачевского, $n \geq 2$, M — некоторое множество в L^n и $T(L^n)$ — некоторая транзитивная подгруппа группы движений. Пусть $f: L^n \rightarrow L^n$ — биективное отображение, обладающее следующим свойством. Образ всякого множества $t(M)$, получаемого из M с помощью элемента t группы $T(L^n)$, есть множество $t'(M)$, где t' — также элемент группы $T(L^n)$.

Спрашивается: каким должно быть множество M , чтобы отображение f было движением?

Для формулировки наших результатов введем некоторые определения.

Пусть $L = \{l(X): X \in L^n\}$ обозначает семейство всевозможных прямых параллельных в некотором заданном направлении, причем через $l(X)$ обозначена прямая, проходящая через точку X ; и так обозначаются только прямые семейства L .

Пусть O — фиксированная точка в пространстве.

Назовем множество, получаемое вращением вокруг прямой $l(O)$, соответственно прямой, орицикла, эквидистанты, проходящей через точку O под углом α , $0 \leq \alpha < \pi/2$, к прямой $l(O)$ и лежащей в двумерной плоскости, проходящей через прямую $l(O)$, соответственно конусом ($\alpha \neq 0$), ориконусом, эквикусом.

Пусть $L_k = \{l_k(X): X \in L^n\}$, $k = 1, \dots, n+1$, — семейство прямых такое, что прямая $l_k(X)$ проходит через точку X под углом α_k к прямой $l(X)$ семейства L . Причем предположим, что прямые $l_1(X), \dots, l_{n+1}(X)$ таковы, что никакие n из них не лежат в одной гиперплоскости. Значит, имеем $(n+1)$ различных семейств прямых, причем случай, когда одно из них совпадает с семейством L , не исключается.

Полагаем

$$D(X) = \bigcup_{k=1}^{n+1} l_k(X).$$

Псевдоцентром гиперсферы $S(X, r)$ радиуса $r > 0$ и с центром в точке X называется точка Y , отстоящая от точки X на прямой $l(X)$ в направлении параллельности прямых данного семейства на расстоянии $k \ln \operatorname{sh}(r/k)$, где k — константа, отвечающая геометрии Лобачевского. Сферу $S(X, r)$ с псевдоцентром Y обозначим через $\Sigma(Y, r)$.

С помощью семейства L можно ввести орициклические координаты в пространстве L^n , причем метрика в них задается в виде

$$d\sigma^2 = dy^1{}^2 + \exp\left(-\frac{2y^1}{k}\right) \cdot \sum_{i=2}^n dy^i{}^2.$$

Пусть $T(L^n)$ — транзитивная подгруппа группы движений, элементы которой задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} t: (x^1, \dots, x^n) &\rightarrow (\lambda(t)x^1, \lambda(t)x^2 + \alpha^2(t), \dots, \lambda(t)x^n + \alpha^n(t)), \\ x^i &= \exp(y^i/k), \quad x^i = y^i/k, \quad i = 2, \dots, n, \end{aligned}$$

где $t \in T(L^n)$, а $\lambda(t)$, $\alpha^2(t), \dots, \alpha^n(t)$ — числа, зависящие от самого элемента t .

Тогда, если $C(O)$ есть некоторое множество с отмеченной точкой O , мы можем рассматривать семейство множеств

$$\{C(X): X \in L^n\} = T(L^n)C(O),$$

т. е. $C(X)$ есть образ множества $C(O)$ при отображении t , являющегося элементом группы $T(L^n)$, если образом точки O является точка X .

Теорема 1. Пусть L^n , $n \geq 2$, — n -мерное пространство Лобачевского и $f: L^n \rightarrow L^n$ — биективное отображение такое, что

$$f[C(X)] = C[f(X)],$$

где $\{C(X): X \in L^n\}$ — некоторое семейство множеств, построенное указанным выше способом.

Отображение f будет движением, если множество $C(O)$ есть одно из следующих: конус (здесь $n > 2$), ориконус, эврикonus ($n > 2$), гиперсфера, множество $\Sigma(O, r)$, множество $D(O)$.

Заметим, что в случае, когда эврикonus $C(O)$ таков, что гиперорисфера, ортогональная к прямой $l(O)$ в точке O , имеет пересечение с $C(O)$, состоящее лишь из точки O , имеющееся доказательство использует условие непрерывности отображения, хотя, как нам кажется, оно излишне. Как раз этот случай важен при построении теории относительности в мире де Ситтера.

Случай гиперсферы или множества $\Sigma(O, r)$ дает ответ на вопрос: каковы же физические движения, при которых определенного рода наблюдения тождественны в мире с метрикой

$$ds^2 = c^2 dt^2 + \sum_{i,k=1}^3 g_{ik}(y^1, y^2, y^3) dy^i dy^k$$

в случаях, когда фронт распространения света в 3-пространстве изображается в пространстве Лобачевского сферой или множеством $\Sigma(X, r)$.

Теорема 2. Пусть $f: L^n \rightarrow L^n$, $n \geq 2$, — биективное отображение, которое любой орицикл отображает на орицикл.

Тогда f есть движение.

Доказательства указанных теорем довольно длинны и не могут быть приведены здесь. Основная идея заключается в том, чтобы, используя модель Пуанкаре, продолжить отображение f на все эвклидово пространство и показать, что оно будет сохранять семейство эвклидовых конусов. Затем, применяя ⁽¹⁾, показываем, что отображение f в модели Пуанкаре есть композиция определенного рода инверсий и симметрий, т. е. является движением.

В случае, если рассматривать сепарабельное гильбертово пространство, причем вместо движений брать аффинные отображения, то теорема 1 верна за исключением случая, когда рассматривается множество $D(O)$. Однако можно построить обобщение множества $D(O)$, и теорема будет верной лишь в случае непрерывности отображения. В случае конуса результат известен давно: это известная теорема А. Д. Александрова и В. В. Овчинниковой ⁽¹⁾, работой которых было положено начало подобного рода исследованиям.

В заключение автор выражает благодарность акад. А. Д. Александрову, которому он обязан выбором данной темы.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
6 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Д. Александров, В. В. Овчинников, Вестн. Ленингр. ун-в., в. 2, 95 (1953).