Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования «Витебский государственный
университет имени П.М. Машерова»

Н А У К А –
ОБРАЗОВАНИЮ,
ПРОИЗВОДСТВУ,
ЭКОНОМИКЕ

***Материалы 72-й Региональной
научно-практической конференции преподавателей,
научных сотрудников и аспирантов***

Витебск, 20 февраля 2020 г.

*Витебск
ВГУ имени П.М. Машерова
2020*

По методу Денавита-Хартенберга для расчета прямой кинематики требуется правильно сориентировать системы координат звена, а именно, для каждой системы координат должны выполняться следующие требования:

1) ось z_{i-1} должна проходить вдоль оси i-го сочленения двух звеньев
2) ось x_i строится перпендикулярно оси z_{i-1} и направлена от нее вдоль {i+1} сочленения
3) ось y_i строится по правилу «правой руки» и тем самым дополняет оси до трехмерной системы координат.

Для определение звеньев выделяют четыре параметра, которые привязываются к каждому звену. Параметры определяются следующим образом:

Q_i– переменная величина, которая характеризует угол вращения i-го звена относительно {i-1} -го, и показывает на сколько нужно повернуть ось x_{i-1} вокруг оси z_{i-1} чтобы она стала cjнаправлена с осью x_i ;

a_i – фиксированный параметр, который описывает угол, на который надо повернуть ось z_{i-1} вокруг оси x_i, чтобы она стала сонаправленной с осью z_i ;

d_i – параметр описывающий фиксированное расстояния между пересечением оси z_{i-1} с осью x_i и началом $\{i\text{-}1\}$ системы координат, отсчитываемое вдоль оси;

a_1 – фиксированный параметр, который показывает кратчайшее расстояние между осями z_{i-1} и z_i отсчитываемое вдоль оси x_i.

Для нахождения отношений между звеньями, определяющее систему отсчета {i} относительно системы отсчета {i-1} применяется преобразование (1).

Общий вид преобразования ${}^{\mathbf{i-1}}_{\mathbf{i}}\mathbf{T}$ для сочленений вращательного типа выглядит следующим образом:

$$
{}^{\mathbf{i-1}}_{\mathbf{i}}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} & -\mathbf{sin}\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i} & \mathbf{0} & \mathbf{a}_{\mathbf{i-1}} \\ \sin\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i}\cos\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{i-1}} & \mathbf{cos}\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i}\cos\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{i-1}} & -\sin\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{i-1}} & -\sin\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{i-1}}\mathbf{d}_\mathbf{i} \\ \sin\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i}\sin\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{i-1}} & \cos\boldsymbol{\theta}_\mathbf{i}\sin\alpha_{\mathbf{i-1}} & \cos\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{i-1}} & \cos\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{i-1}}\mathbf{d}_\mathbf{i} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (1)
$$

где матрица состоит из матрицы поворота, вектора переноса, а также из перспективы и коэффициента масштабирования.

Заключение. В данной работе представлен матричный метод для решения задачи прямой кинематики при планировании положения захвата робота манипулятора.

1. John J. Craig. Introduction to Robotics: Mechanics and Control / John J. Craig - Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.,75 Arlington Street, Suite 300 Boston, MA United States. –450 p.
2. StudBooks [Электронный ресурс] Режим доступа: https://studbooks.net/2410885/informatika/pryamaya_zadacha_kinematiki - Дата доступа: 02.12.2019.

АВТОИЗОМЕТРИИ АЛГЕБРЫ ЛИ $\mathcal{A}(1)\times\mathcal{R}^2$

М.Н. Подоксёнов[1], А.К. Гуц[2]
[1]Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова
[2]Омск, ОмГУ имени Ф.М. Достоевского

В работе [1] были найдены все автоморфизмы четырёхмерной алгебры Ли $\mathcal{H}s\times\mathcal{R}$ и все способы задания лоренцевого скалярного произведения на ней, при которых эта алгебра Ли допускает однопараметрическую группу автоподобий, а также найдены однопараметрические группы автоизометрий.

Цель данной работы: найти полную группу автоморфизмов ещё одной четырёхмерной алгебры Ли, и найти её автоизометрии, при условии задания на ней евклидова скалярного произведения.

Материал и методы. Рассматривается алгебра Ли $\mathcal{G}_4=\mathcal{A}(1)\times\mathcal{R}^2$, относящаяся к VI типу Бианки (подтип VI_1). Находится полная группа автоморфизмов этой алгебры Ли, и среди автоморфизмов выделяются те, которые сохраняют евклидово скалярное произведение (будем называть из автоизометриями). В исследовании применяются методы аналитической геометрии и линейной алгебры.

Результаты и их обсуждение. В подходящем базисе (E_1, E_2, E_3, E_4) коммутационные соотношения алгебры Ли $\mathcal{G}_4=\mathcal{A}(1)\times\mathcal{R}^2$ задаются одним равенством: $[E_2,E_1]=E_1$. Будем называть такой базис каноническим. Эта алгебра Ли содержит двумерный коммутативный идеал $\mathcal{L}$, являющийся линейной оболочной векторов (E_1, E_3, E_4), а также двумерный центр $\mathcal{Z}$, $\boldsymbol{R}E_2$ являющийся линейной оболочной векторов (E_3, E_4). Одномерное подпространство $\boldsymbol{R}E_1$ является производной алгеброй Ли: $\boldsymbol{R}E_1=[\mathcal{G}_4,\mathcal{G}_4]$.

Все указанные выше векторные подпространства должны быть инвариантными относительно автоморфизмов алгебры Ли. Поэтому любой автоморфизм алгебры Ли $f\colon\mathcal{G}_4\to\mathcal{G}_4$ в каноническом базисе задаётся формулами вида

$$
\begin{aligned}
E_1' &= \alpha E_1,\\
E_2' &= \beta E_1+\sigma E_2+\gamma E_3+\delta E_4,\\
E_3' &= \qquad\qquad \varepsilon E_3+\lambda E_4,\\
E_4' &= \qquad\qquad\quad\; \mu E_3+\nu E_4.
\end{aligned}
$$

Требование сохранения скобки Ли $[E_2,E_1]$ приводит нас к дополнительному условию $\beta=1$. Итак, полная группа автоморфизмов алгебры Ли восьмимерная и состоит из преобразований, которые задаются матрицами вида

$$
\begin{pmatrix}
\alpha & 1 & 0 & 0\\
0 & \sigma & 0 & 0\\
0 & \gamma & \varepsilon & \mu\\
0 & \delta & \lambda & \nu
\end{pmatrix},
\tag{1}
$$

где

$$
\alpha\neq 0,\ \begin{vmatrix}\varepsilon & \lambda\\ \mu & \nu\end{vmatrix}\neq 0.
\tag{2}
$$

Предположим теперь, на алгебре Ли $\mathcal{G}_4$ введено евклидово скалярное произведение. Прежде, чем выделить из автоморфизмов (1), те которые являются изометриями, необходимо решить вопрос: к какому каноническому виду можно привести матрицу Грама заданного скалярного произведения с помощью наших автоморфизмов.

Во-первых, изменение длин любых векторов, кроме E_2, не меняет операцию скобки, поэтому векторы E_1, E_3, E_4 можно сделать единичными. Во-вторых, векторы E_3, E_4 можно сделать ортогональными. В третьих, большая свобода изменения вектора E_2 позволяет выбрать его ортогональным идеалу $\mathcal{L}$. Наконец, если вектор E_1 не ортогонален центру $\mathcal{Z}$, то вектор E_3 мы можем сделать сонаправленным ортогональной проекции вектора E_1 на центр $\mathcal{Z}$, и только после этого выбирать E_4. Тогда E_4 будет ортогонален не только E_3, но E_1 тоже.

В итоге, мы можем привести матрицу Грама, путём выбора нового канонического базиса к виду

$$
\Gamma=\begin{pmatrix}
1 & 0 & g_{13} & 0\\
0 & g_{22} & 0 & 0\\
g_{13} & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix},\ g_{22}>0.
\tag{3}
$$

Будем обозначать новый базис по-прежнему (E_1, E_2, E_3, E_4).

Любая автоизометрия алгебры Ли должна сохранять ортогональность вектора E_2 идеалу $\mathcal{L}$. В силу единственности ортогонального дополнения и неизменности скалярного квадрата вектора E_2, получаем что

$$E_2'=E_2.$$

В силу неизменности скалярного квадрата вектора E_1, выполнено $\alpha=\pm 1$.

Далее необходимо рассмотреть два случая.

1 случай. Вектор E_1 не ортогонален центру $\mathcal{Z}$ $(g_{13}\neq 0)$. Тогда, в силу единственности его проекции на центр, вектор E_3' должен быть коллинеарен E_3. С учётом необходимости сохранения скалярного квадрата вектора E_3 и сохранения g_{13}, получаем

$$E_1'=\pm E_1,\ E_3'=\pm E_3,$$

где знаки выбираются одновременно «плюс» или одновременно «минус». Окончательно группа автоморфизмов, сохраняющих матрицу Грама (3), задаётся формулами

$$E_1'=\theta E_1,\ E_2'=E_2,\ E_3'=\theta E_3,\ E_4'=\pm E_4, \theta=\pm 1. \quad (4)$$

Подобные преобразования не могут образовывать однопараметрическую группу.

2 случай. Вектор E_1 ортогонален центру $\mathcal{Z}$ (g_{13}=0). Тогда векторы E_3 и E_4 получают большую свободу изменения, и ограничение автоизометрии двумерный на центр $\mathcal{Z}$ задаётся ортогональной матрицей. В итоге имеем формулы

$$\begin{cases} E_1'=\theta E_1,\ E_2'=E_2, \\ E_3'=E_3\cdot\cos t-\xi E_4\cdot\sin t, \\ E_4'=E_3\cdot\sin t+\xi E_4\cdot\cos t, \xi=\pm 1,\ \theta=\pm 1. \end{cases} \quad (5)$$

а E_1 и E_2 изменяются по тем же формулам (4). Однопараметрическую группу образуют только преобразования при $\theta=\xi=1$. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема. *1. Полная группа автоморфизмов алгебры Ли* $\mathcal{A}(1)\times\mathcal{R}^2$ *задаётся в каноническом базисе матрицей вида* (1) *с дополнительными условиями* (2).

2. Матрицу Грама евклидова скалярного произведения с помощью автоморфизмов алгебры Ли можно привести к виду (3) *в каноническом базисе*.

3. В этом базисе полная группа автоизометрий задаётся формулами (4) *при* $g_{13}\neq 0$ *и формулами* (5) *при* $g_{13}=0$.

4. Алгебра Ли $\mathcal{G}_4=\mathcal{A}(1)\times\mathcal{R}^2$ *допускает однопараметрическую группу автоизометрий, только в случае, когда производная алгебра Ли* $[\mathcal{G}_4,\mathcal{G}_4]$ *ортогональна двумерному центру* $\mathcal{Z}$. *В указанном выше базисе однопараметрическая группа автоизометрий действует по формулам* (5) *при* $\theta=\xi=1$.

Заключение. В данной работе мы нашли полную группу автоморфизмов четырёхмерной алгебры Ли $\mathcal{A}(1)\times\mathcal{R}^2$, определили, к какому каноническому виду можно привести матрицу Грама евклидова скалярного произведения, заданного в этой алгебре Ли, и нашли полную группу автоизометрий рассматриваемой алгебры Ли. Среди автоизометрий выделили однопараметрическую группу, которая существует только при некотором дополнительном условии. Отсутствие автоподобий данной алгебры Ли относительно евклидова скалярного произведения достаточно очевидно.

1. Подоксёнов, М.Н. Автоподобия и автоизометрии одной четырехмерной алгебры ли VI типа Бианки / М.Н. Подоксёнов, Ф.С. Гаджиева // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С – 2019. – № 4. – С. 124–130.

ОБ ОРГАНИЗАЦИИ ОБРАБОТКИ СТРОКОВЫХ ЛИТЕРАЛОВ ВО ВРЕМЯ КОМПИЛЯЦИИ СРЕДСТВАМИ ЯЗЫКА С++

С.В. Сергеенко
Витебск, ВГУ имени П.М. Машерова

При группировании символов текста на искусственном языке в элементарные лексические единицы (лексем) широко используются регулярные языки и описывающие их регулярные выражения [1]. Регулярные выражения представляют собой предложения специального языка. Для построения во время компиляции конечных автоматов, эквивалентных регулярным выражениям, необходимо провести анализ этих литералов.

Цель исследования – разработать подход к организации обработки строковых литералов во время компиляции.

Материал и методы. Материалом исследования является анализ регулярных выражений. Предметом исследования служит описание подхода к организации обработки во время компиляции строкового литерала. Поставленная цель достигается средствами обобщенного программирования посредством шаблонов в языке программирования С++. Кроме того, были использованы методы математического моделирования и общенаучные методы.