Математические структуры и моделирование
2020. № 1(53). С. 37–48

УДК 550.37 : 550.837
DOI 10.24147/2222-8772.2020.1.37-48

ОБЛАСТЬ АНАЛИТИЧНОСТИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВЕРТИКАЛЬНО НЕОДНОРОДНОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

С.А. Терентьев
к.ф.-м.н., доцент, e-mail: sa.terentyev@gmail.com
А.К. Гуц
д.ф.-м.н., профессор, e-mail: guts@omsu.ru

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, Омск, Россия

Аннотация. Электромагнитное поле в задачах электроразведки часто представляется в виде интегралов с быстроосцилирущим ядром. При вычислении этих интегралов на ЭВМ приходится деформировать контур интегрирования в плоскость комплексного переменного. В статье изучена допустимая область деформации контура интегрирования в случае неоднородной среды, в которой сильные и слабые решения для электромагнитного поля аналитичны. Источник поля — гармонический вертикальный электрический или магнитный диполь.

Ключевые слова: электроразведка, электромагнитное поле вертикального электрического или магнитного диполя, быстроосцилирующие интегралы, деформация контура, комплексная плоскость, отсутствие особых точек, область деформации.

1. Введение

При аналитическом решении задач электроразведки очень часто компоненты электромагнитного поля могут быть выражены в виде интеграла

$$\int\limits_{0}^{+\infty} u(z,\lambda)K(r,\lambda)d\lambda,$$

где $K(r,\lambda)$ — быстро осциллирующее по λ ядро. При вычислении таких интегралов на ЭВМ приходится деформировать контур интегрирования в комплексную область $\mathbb{C}$ изменения переменной λ. В связи с этим необходимо прежде всего определить область $D_\lambda \subset \mathbb{C}$, в которой подынтегральная функция $u(p,\lambda)$ не имеет особенностей по λ. Примеры таких алгоритмов с обоснованием для простейших моделей даны в [1–3].

В статье мы исследуем эту задачу для произвольной вертикально неоднородной среды, параметры которой ε (диэлектрическая проницаемость), σ (электрическая проницаемость) и μ (магнитная проницаемость) зависят от глубины z

залегания слоя и, вообще говоря, кусочно-непрерывны. Полученные результаты могут быть распространены и на случай цилиндрической среды.

Функцию K называем ядром интегрального оператора, а $u(z,\lambda)$ — *спектральной плотностью.*

Мы продолжим λ в комплексную плоскость

$$\mathbb{C} = \{\lambda = \lambda_x + i\lambda_y : \lambda_x, \lambda_y \in \mathbb{R}\}.$$

Область, лежащую в плоскости $\mathbb{C}$, в которой плотность $u(z,\lambda)$ не имеет особенностей по λ, будем обозначать через D_λ.

Наша задача — найти область D_λ для сильного и слабого решений $u(z,\lambda)$.

Данная статья продолжает исследования, изложенные в [4–6]. Приведённые результаты были анонсированы в [7].

2. Исходные уравнения

Будем изучать гармонические источники и поля, т. е. предполагаем следующую зависимость от времени:

$$\mathbf{M} \to \mathbf{M}e^{i\omega t}.$$

Тогда уравнения Максвелла примут вид:

$$rot\ \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{j}^{m,\text{ст.}}, \tag{1}$$

$$rot\ \mathbf{H} = (\sigma - i\omega\varepsilon)\mathbf{E} + \mathbf{j}^{e,\text{ст.}}, \tag{2}$$

$$div\ (\sigma - i\omega\epsilon)\mathbf{E} = -i\omega\rho^{e,\text{ст.}} = -div\ j^{e,\text{ст.}}, \tag{3}$$

$$div\ i\omega\mu\mathbf{H} = i\omega\rho^{m,\text{ст.}} = div\ j^{m,\text{ст.}}, \tag{4}$$

где $\mathbf{j}^{e,\text{ст.}}$ и $\mathbf{j}^{m,\text{ст.}}$ — векторы объёмной плотности электрического и магнитного сторонних токов, которые возбуждаются полями, не учитываемые в искомом электромагнитном поле;

$\rho^{e,\text{ст.}}, \rho^{m,\text{ст.}}$ – объёмные плотности электрического и магнитного сторонних зарядов.

Далее будем совершать преобразования Фурье вида

$$\widehat{f}(\xi,\eta,\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y,z)e^{-i(\xi x+\eta y)}dxdy.$$

Тогда (2) перепишем в виде

$$(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^{e,\text{ст.}} = i\xi\widehat{H}_y - i\eta\widehat{H}_x, \tag{5}$$

а из (3) получаем:

$$\frac{d}{dz}[(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^{e,\text{ст.}}] = -i\xi(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_x - i\eta(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_y - i\xi\widehat{j}_x^{e,\text{ст.}} - i\eta\widehat{j}_y^{e,\text{ст.}}. \tag{6}$$

Разделим (6) на $(\sigma - i\omega\varepsilon)$ и продифференцируем по z:

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)}\frac{d}{dz}[(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^{e,\text{ст.}}]\right\} = -i\xi\frac{d\widehat{E}_x}{dz} - i\eta\frac{d\widehat{E}_y}{dz} -$$

$$-\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)}[i\xi\widehat{j}_x^{e,\text{ст.}} + i\eta\widehat{j}_y^{e,\text{ст.}}]\right\}. \qquad (7)$$

Из (1)

$$i\eta\widehat{E}_z - \frac{d\widehat{E}_y}{dz} = i\omega\mu\widehat{H}_x - \widehat{j}_x^{m,\text{ст.}}, \qquad (8)$$

$$\frac{d\widehat{E}_x}{dz} - i\xi\widehat{E}_z = i\omega\mu\widehat{H}_y - \widehat{j}_y^{m,\text{ст.}}. \qquad (9)$$

Отсюда, учитывая (5) и (7), получаем

$$-\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)}\frac{d}{dz}[(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^{e,\text{ст.}}]\right\} + \frac{\lambda^2 - k^2}{\sigma - i\omega\varepsilon}[(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^{e,\text{ст.}}] =$$

$$= \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{(\sigma - i\omega\varepsilon)}[i\xi\widehat{j}_x^{e,\text{ст.}} + i\eta\widehat{j}_y^{e,\text{ст.}}]\right\} + \frac{\lambda^2}{\sigma - i\omega\varepsilon}\widehat{j}_z^{e,\text{ст.}} + i\eta\widehat{j}_x^{m,\text{ст.}} - i\xi\widehat{j}_y^{m,\text{ст.}}, \qquad (10)$$

где

$$\lambda^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad k^2 = i\omega\mu\sigma + \omega^2\varepsilon\mu.$$

Аналогичное уравнение имеем для $\widehat{H}_z$

$$-\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{i\omega\mu}\frac{d}{dz}[i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j}_z^{m,\text{ст.}}]\right\} + \frac{\lambda^2 - k^2}{i\omega\mu}[i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j}_z^{m,\text{ст.}}] =$$

$$= -\frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{i\omega\mu}[i\xi\widehat{j}_x^{m,\text{ст.}} + i\eta\widehat{j}_y^{m,\text{ст.}}]\right\} - \frac{\lambda^2}{i\omega\mu}\widehat{j}_z^{m,\text{ст.}} - i\eta\widehat{j}_x^{e,\text{ст.}} + i\xi\widehat{j}_y^{e,\text{ст.}}. \qquad (11)$$

Аналогично равенствам (5) и (6) из (1), (4) получаем:

$$i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j}_z^{m,\text{ст.}} = i\xi\widehat{E}_y - i\eta\widehat{E}_x, \qquad (12)$$

$$\frac{d}{dz}[i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j}_z^{m,\text{ст.}}] = -i\omega\mu(i\xi\widehat{H}_x + i\eta\widehat{H}_y) + i\xi\widehat{j}_x^{m,\text{ст.}} + i\eta\widehat{j}_y^{m,\text{ст.}}. \qquad (13)$$

Уравнения (5), (6), (12), (13) дают:

$$\widehat{E}_x = \frac{1}{\lambda^2}\left\{\frac{i\xi}{\sigma - i\omega\varepsilon}\frac{d}{dz}[(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^{e,\text{ст.}}] + i\eta[i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j}_z^{m,\text{ст.}}] -\right.$$

$$\left. - \frac{\xi^2\widehat{j}_x^{e,\text{ст.}} + \xi\eta\widehat{j}_y^{e,\text{ст.}}}{(\sigma - i\omega\varepsilon)}\right\}, \qquad (14)$$

$$\widehat{E}_y = \frac{1}{\lambda^2}\left\{\frac{i\eta}{\sigma - i\omega\varepsilon}\frac{d}{dz}[(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^{e,\text{ст.}}] - i\xi[i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j}_z^{m,\text{ст.}}] -\right.$$

$$-\frac{\xi\eta\widehat{j}_x^{e,\text{ст.}} + \eta^2\widehat{j}_y^{e,\text{ст.}}}{(\sigma - i\omega\varepsilon)}\Bigg\}, \tag{15}$$

$$\widehat{H}_x = \frac{1}{\lambda^2}\Bigg\{\frac{i\xi}{i\omega\mu}\frac{d}{dz}[i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j}_z^{m,\text{ст.}}] + i\eta[(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^{e,\text{ст.}}] +$$
$$+\frac{\xi^2\widehat{j}_x^{m,\text{ст.}} + \xi\eta\widehat{j}_y^{m,\text{ст.}}}{i\omega\mu}\Bigg\}, \tag{16}$$

$$\widehat{H}_y = \frac{1}{\lambda^2}\Bigg\{\frac{i\eta}{i\omega\mu}\frac{d}{dz}[i\omega\mu\widehat{H}_z - \widehat{j}_z^{m,\text{ст.}}] - i\xi[(\sigma - i\omega\varepsilon)\widehat{E}_z + \widehat{j}_z^{e,\text{ст.}}] +$$
$$+\frac{\xi\eta\widehat{j}_x^{m,\text{ст.}} + \eta^2\widehat{j}_y^{m,\text{ст.}}}{i\omega\mu}\Bigg\}. \tag{17}$$

Таким образом, достаточно определить $\widehat{E}_z$ и $\widehat{H}_z$.

3. Случай диполей. Сильные решения

В этом параграфе в качестве источников поля будут рассматриваться электрический и магнитный диполи, расположенные в точке $(0, 0, 0)$. То есть токи $j^{e,\text{ст.}}, j^{m,\text{ст.}}$ будут сингулярными функциями: в случаях вертикального диполя $j^{\text{ст.}} = (0, 0, \delta(x)\delta(y)\delta(z))$ и горизонтального – $j^{\text{ст.}} = (\delta(x)\delta(y)\delta(z), 0, 0)$. Если при $z = 0$ параметры среды не являются непрерывными функциями, то определение вертикального диполя сторонним током не является однозначным (это будет отмечено ниже в постанове краевой задачи). В этом случае вертикальный диполь должен быть описан с помощью напряжённостей поля сторонних э.д.с. и м.д.с.

Таким образом, при возбуждении поля с помощью диполя уравнения (10), (11) невозможно рассматривать в классическом смысле. Их следует рассматривать как дифференциальные уравнения в классе обобщённых функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R},\mathbb{C})$. При этом приходится особо оговаривать класс гладкости входящих в уравнения коэффициентов.

Оба уравнения (10) и (11) имеют вид

$$Lu \equiv -\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{p(z)}\frac{du}{dz}\right) + \frac{q(z,\lambda)}{p(z)}u = f(z), \tag{18}$$

где $f(z) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R},\mathbb{C})$ — линейная комбинация δ-функции и ее производной. Функция $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R},\mathbb{C})$ является решением этого уравнения, если для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$$(u, L^*\varphi) = (f, \varphi).$$

Покажем, что в случае *достаточно гладких коэффициентов* к задаче (18) можно прийти, рассматривая следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} L\widetilde{u} = 0 \quad (z \neq 0), \\ [\widetilde{u}]_0 = \alpha, \\ \left[\dfrac{1}{p(z)}\dfrac{d\widetilde{u}}{dz}\right]_0 = 0, \end{cases} \tag{19}$$

где $[F]_0 = F(+0) - F(-0)$.

Положим

$$u = \begin{cases} \widetilde{u}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$(Lu, \varphi) \equiv (u, L^*\varphi) = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \right) \widetilde{u}\ \overline{L^*\varphi} dz =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left\{ -\widetilde{u} \frac{1}{p(z)} \frac{d\overline{\varphi}}{dz} \bigg|_{+\varepsilon}^{-\varepsilon} + \frac{1}{p(z)} \frac{d\widetilde{u}}{dz} \overline{\varphi} \bigg|_{+\varepsilon}^{-\varepsilon} + \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \right) L\widetilde{u}\ \overline{u} dz \right\} =$$

$$= [\widetilde{u}]_0 \frac{1}{p(0)} \frac{d\overline{\varphi}(0)}{dz} - \left[\frac{1}{p(z)} \frac{d\widetilde{u}}{dz} \right]_0 \overline{\varphi}(0)$$

или

$$Lu \equiv -\alpha \left(\frac{\delta(z)}{p(z)} \right)' - \beta \delta(z). \tag{20}$$

Это и есть уравнение (18), где

$$f(z) = -\alpha \left(\frac{\delta(z)}{p(z)} \right)' - \beta \delta(z).$$

Приведём значения коэффициентов α, β задачи (19) для различных диполей. Введём обозначения:

$$p_e(z) = \sigma - i\omega\varepsilon, \qquad p_h(z) = i\omega\mu,$$

$$\widetilde{u}_e(z) = p_e(z)\widehat{E}_z(z) + \widehat{j}_z^{\,e,\text{ст.}}(z),$$

$$\widetilde{u}_h(z) = p_h(z)\widehat{H}_z(z) - \widehat{j}_z^{\,m,\text{ст.}}(z).$$

1) Вертикальный электрический диполь:

$$\widehat{j}^{\,e,\text{ст.}} = (0, 0, \delta(z)), \quad \alpha_e = 0, \quad \beta_e = -\lambda^2/p_e(0),$$

$$\widehat{j}^{\,m,\text{ст.}} \equiv 0, \quad \alpha_h = 0, \quad \beta_h = 0.$$

2) Горизонтальный электрический диполь:

$$\widehat{j}^{\,e,\text{ст.}} = (\delta(z), 0, 0), \quad \alpha_e = -i\xi, \quad \beta_e = 0,$$

$$\widehat{j}^{\,m,\text{ст.}} \equiv 0, \quad \alpha_h = 0, \quad \beta_h = i\eta.$$

3) Вертикальный магнитный диполь:

$$\widehat{j}^{\,e,\text{ст.}} \equiv 0, \quad \alpha_e = 0, \quad \beta_e = 0,$$

$$\widehat{j}^{\,m,\text{ст.}} = (0, 0, \delta(z)), \quad \alpha_h = 0, \quad \beta_h = \lambda^2/p_h(0).$$

4) Горизонтальный электрический диполь:

$$\widehat{j}^{e,\text{ст.}} \equiv 0, \quad \alpha_e = 0, \quad \beta_e = -i\eta,$$

$$\widehat{j}^{m,\text{ст.}} = (\delta(z), 0, 0), \quad \alpha_h = i\xi, \quad \beta_h = 0.$$

Таким образом, в отличие от постановки (18) в операторной постановке (19) в случае горизонтальных диполей можно отказаться от условия

$$\frac{1}{p(z)} \in C(0).$$

Определение же коэффициентов β задачи (19) для вертикальных диполей через сторонние токи при $1/p(z) \not\in C(0)$ неоднозначно. При постановке задачи в этом случае с помощью сторонней э.д.с. (м.д.с.) коэффициенты β определяются однозначно:

1) $\widehat{E}^{\text{ст.}} = (0, 0, \delta(z)), \quad \beta_e = -\lambda^2$;

2) $\widehat{H}^{\text{ст.}} = (0, 0, -\delta(z)), \quad \beta_h = \lambda^2$.

Подводя итоги, отмечаем, что задача о поле диполя в вертикально-неоднородной среде имеет вид (19). Предполагается, что

$$\frac{1}{p(z)}, \quad \frac{q(z,\lambda)}{p(z)} \in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}); \quad \left(\frac{1}{p(z)}\right)' \in L^\infty(\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+,\mathbb{C}).$$

Здесь $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$, $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.

Решение её ищется в виде $W_2^2(\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+,\mathbb{C})$.

Под $W_2^l(\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+,\mathbb{C})$ понимается замыкание в норме

$$||u|| = \left\{ \left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{+\infty} \right) \sum_{i=0}^{l} \left| \frac{d^i u}{dz^i} \right|^2 dz \right\}^{1/2} \tag{21}$$

пространства функций $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, сужения которого на $\mathbb{R}^-$ и $\mathbb{R}^+$ совпадают с соответствующими сужениями пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (или $W_2^l(\mathbb{R},\mathbb{C})$).

4. Случай диполя. Вариационная постановка, слабые решения

Вместо решения задачи (19) в классе $W_2^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (сильные решения) нетрудно перейти к следующей вариационной задаче:

$$r(u,\varphi) = \left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{+\infty} \right) \left\{ \frac{1}{p(z)} \frac{du}{dz} \frac{d\overline{\varphi}}{dz} + \frac{q(z,\lambda)}{p(z)} u\overline{\varphi} \right\} dz = -\beta\overline{\varphi}(0) = l(\varphi), \tag{22}$$

$$\forall \varphi \in W_2^1(\mathbb{R},\mathbb{C}).$$

Слабые решения этой задачи ищем среди элементов замкнутого выпуклого множества $k_\alpha \subset W_2^1(\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+, \mathbb{C})$, определяемого условием $[u]_0 = \alpha$. При этом достаточно потребовать, чтобы коэффициенты

$$\frac{1}{p(z)}, \quad \frac{q(z,\lambda)}{p(z)} \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}),$$

в частности, были кусочно-непрерывными и ограниченными.

В связи с заменой $\varphi \leftrightarrow i\varphi$ формулировка (22) эквивалентна **каждой** из следующих формулировок (23), (24):

$$Re\ r(u,\varphi) = Re\ l(\varphi), \quad \forall \varphi \in W_2^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \tag{23}$$

$$Im\ r(u,\varphi) = Im\ l(\varphi), \quad \forall \varphi \in W_2^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}). \tag{24}$$

Обозначим

$$p_1 = Re\left(\frac{\gamma}{p(z)}\right), \quad p_2 = Im\ \left(\frac{\gamma}{p(z)}\right),$$

$$q_1 = Re\ \left(\gamma\frac{q(z,\lambda)}{p(z)}\right), \quad q_2 = Im\ \left(\gamma\frac{q(z,\lambda)}{p(z)}\right),$$

где $\gamma \neq 0$ — произвольная комплексная константа.

Пусть

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & -p_2 \\ p_2 & p_1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix},$$

$$U = \begin{pmatrix} Re\ u \\ Im\ u \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} Re\ \varphi \\ Im\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \Phi^T = (Re\ \varphi, Im\ \varphi),$$

$$B = \gamma \begin{pmatrix} Re\ \beta \\ Im\ \beta \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} Re\ \alpha \\ Im\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Тогда (23), (24) могут быть переписаны в виде:

$$R(U,\Phi) = \left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{+\infty}\right)\left\{\frac{d\Phi^T}{dz}P\frac{dU}{dz} + \Phi^T Q U\right\}dz =$$

$$= L(\Phi) = -\Phi^T(0)B, \qquad \forall \Phi \in W_2^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2). \tag{25}$$

Решение ищется среди элементов замкнутого выпуклого множества $K_A \subset W_2^1(\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$, определяемого условием $[U]_0 = A$.

Задача (25) может быть сформулирована и как вариационное неравенство [8]:

$$R(U, \widetilde{U} - U) \geqslant L(\widetilde{U} - U), \quad \forall \widetilde{U} \in K_A. \tag{26}$$

Здесь решение, как и раньше, ищется в K_A.

Следуя [8], сформулируем достаточные условия существования и единственности решения задачи (27).

Пусть $R(U,\widetilde{U})$ является билинейной, и вообще говоря, несимметричной формой, а $L(\Phi)$ — линейной и непрерывной в $W_2^1(\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$ и $W_2^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ соответственно, причем билинейная форма — аналитическая:

$$\exists c > 0 \ \forall U \in W_2^1(\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2) \ (|R(U,U) \geqslant c||U||^2).$$

Тогда решение задачи (26) существует и единственно.

Таким образом, в области

$$\boxed{\begin{gathered} D_\lambda = \Bigg\{ \lambda = \lambda_x + i\lambda_y \ : \ |\lambda| < \infty \ \wedge \ \underset{z}{vrai\sup} \left| \frac{1}{p(z)} \right| < \infty \ \wedge \\ \wedge \ \underset{z}{vrai\sup} \left| \frac{q(z,\lambda)}{p(z)} \right| < \infty \ \wedge \ \underset{z}{vrai\inf} \, p_1 > 0 \ \wedge \ \underset{z}{vrai\inf} \, q_1 > 0 \Bigg\} \end{gathered}}$$

решение задачи (22) существует и единственно.

5. Аналитичность слабого решения

Легко видеть, что в общем случае решение строится в виде линейной комбинации решений задач вида

$$r(v,\varphi) = l(\varphi), \quad \forall \varphi \in W_2^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \quad v \in k_\alpha, \tag{27}$$

где $\alpha = 1 \wedge \beta = 0$ или $\alpha = 0 \wedge \beta = 1$.

При этом компоненты электромагнитного поля выражаются посредством линейной комбинации интегралов вида [1]:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{d^k v}{dz^k} \lambda^p \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} J_0(\lambda\sqrt{x^2+y^2}) d\lambda, \tag{28}$$

здесь $k = 0,1$; $p = -1,1,3$; $\alpha_1 + \alpha_2 = 0,1,2$; $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ при $p = -1$, и $J_0(-)$ — функция Бесселя.

Для применения методов вычисления интегралов (28), связанных с деформацией контура интегрирования в комплексную плоскость переменной λ [1–3], достаточно установить область аналитичности функции $v(z,\lambda)$

Теорема 1. *Область D_λ является областью аналитичности по λ решения задачи* (27) *при произвольном z.*

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in D_\lambda$. Тогда существует такая окрестность $S_\varepsilon(\lambda_0)$ точки λ_0, в которой определенная выше билинейная форма является равномерно эллиптичной, т. е.

$$\exists c > 0 \forall \lambda \in S_\varepsilon(\lambda_0) \forall V \in W_2^1(\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)(|R(V,V)| \geqslant c||V||^2).$$

Это легко следует из аналитичности по λ коэффициента $q(z,\lambda)$.

Обозначим через V_0, V — решения задачи (25) и задачи (27) для λ_0 и произвольного $\lambda \in S_\varepsilon(\lambda_0)$, соответственно.

Так как $V_0 - V \in W_2^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, то

$$R_0(V_0, V_0 - V) = L_0(V_0 - V),$$

$$R(V, V_0 - V) = L(V_0 - V).$$

Но в виду свойств коэффициентов β задачи (27)

$$L_0(V_0 - V) = L(V_0 - V).$$

Учитывая это, запишем

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{+\infty}\right)\left\{\frac{d}{dz}(V_0 - V)^T P \frac{d}{dz}(V_0 - V) + (V_0 - V)^T Q (V_0 - V)\right\} dz =$$

$$= \left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{+\infty}\right)(V_0 - V)^T (Q - Q_0) V_0 dz. \tag{29}$$

Отсюда

$$||V_0 - V|| \leqslant \frac{1}{c}\frac{|R(V_0 - V, V_0 - V)||}{||V_0 - V||} \leqslant$$

$$\leqslant \underset{z}{vrai\sup} [\![(Q - Q_0)(z)]\!] \cdot ||V_0|| \underset{\lambda \to \lambda_0}{\to} 0,$$

поскольку $q(z,\lambda)$ — аналитическая функция по λ.

Здесь через $[\![Q]\!]$ обозначена норма матрицы Q.

Значит $\lambda \to V(z,\lambda)$ непрерывная по λ абстрактная функция.

Аналогично уравнению (29) запишем

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{+\infty}\right)\left\{\frac{d}{dz}\Phi^T P \frac{d}{dz}\frac{V_0 - V}{\lambda_0 - \lambda} + \Phi^T Q_0 \frac{V_0 - V}{\lambda_0 - \lambda}\right\} dz =$$

$$= -\left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{+\infty}\right)\Phi^T \frac{Q_0 - Q}{\lambda_0 - \lambda} V dz. \tag{30}$$

Рассмотрим следующую задачу

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{+\infty}\right)\left\{\frac{d}{dz}\Phi^T P \frac{d}{dz} W + \Phi^T Q W\right\} dz =$$

$$= -\left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{+\infty}\right) \Phi^T Q'_\lambda V dz\Big|_{\lambda=\lambda_0}. \qquad (31)$$

Так как в D_λ

$$\underset{z}{vrai\sup} [] Q'_\lambda [] < +\infty,$$

то правые части уравнений (30) и (31) близки благодаря аналитичности Q и непрерывности функции $\lambda \to V(z, \lambda)$.

Задачи (30) и (31) отличаются лишь правыми частями, а, значит, это одна и та же задача с близкими правыми частями. Но так как $|R(U, U)| \geqslant c||U||^2$, то задача эта корректна. Следовательно, решения задач (30) и (31) близки, точнее,

$$\left\|\frac{V_0 - V}{\lambda_0 - \lambda} - W\right\| \underset{\lambda\to\lambda_0}{\to} 0.$$

Из теоремы вложения $W_2^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ следует, что

$$\sup_z \left|\frac{V_0 - V}{\lambda_0 - \lambda} - W\right| \underset{\lambda\to\lambda_0}{\to} 0,$$

т. е. V аналитична по λ в области D_λ. ■

Замечание. Мы использовали конкретный вид функции $q(z, \lambda)$, имеющий вид

$$\frac{\lambda^2 - k^2}{i\omega\mu} \quad \text{или} \quad \frac{\lambda^2 - k^2}{\sigma - i\omega\varepsilon}.$$

Но теорема верна для любой функции $q(z, \lambda)$, удовлетворяющей условию $\underset{z}{vrai\sup} [] Q'_\lambda [] < +\infty$.

Литература

1. Табаровский Л.А. Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. Новосибирск : Изд-во «Наука», Сибирское отделение, 1975.
2. Терентьев С.А. Теоретическое исследование полей источников магнитотеллурического поля // Отчёт по НИР. Омск : ОмГУ, 1980. Деп.во ВНТИЦ, № Б 818289.
3. Терентьев С.А. Основные закономерности поведения поля плоской волны в слоистых средах с эллиптическим цилиндром: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1972.
4. Терентьев С.А., Гуц А.К. Теоретическое исследование электромагнитного поля в проводящих неоднородных средах // Отчёт по НИР. Омск : ОмГУ, 1980. Деп.во ВНТИЦ 25.02.81, № Б 919817. 48 с.
5. Терентьев С.А., Гуц А.К. Исследования особенностей спектральной плотности для электромагнитного поля в вертикально неоднородной проводящей среде // Математические структуры и моделирование. 2018. № 4(48). С. 61–77.
6. Терентьев С.А., Гуц А.К. Особенности спектральной плотности электромагнитного поля для электрического и магнитного диполей в вертикально неоднородной проводящей среде // Математические структуры и моделирование. 2019. № 2(50). С. 66–78.

7. Гуц А.К., Терентьев С.А. Исследования особенностей спектральной плотности для электромагнитного поля в вертикально неоднородной проводящей среде // Сб.: Автоматизация анализа и синтеза структур ЭВМ и вычислительных алгоритмов. Омск : ОмПИ, 1982. С. 78–80.
8. Гловински Р., Лионс Ж.Л., Тремольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М. : Мир, 1979.

THE ANALYTICITY DOMAIN OF SPECTRAL DENSITY OF THE ELECTROMAGNETIC FIELD IN A VERTICALLY INHOMOGENEOUS CONDUCTIVE MEDIUM

S.A. Terentyev
PhD. (Phys.-Math.), Associate Professor, e-mail: sa.terentyev@gmail.com
A.K. Guts
Dr.Sc. (Phys.-Math.), Professor, e-mail: guts@omsu.ru

Dostoevsky Omsk State University, Omsk, Russia

Abstract. The electromagnetic field in electrical exploration problems is often represented as integrals with a fast-oscillating nucleus. When calculating these integrals on a computer, it is necessary to deform the contour of integration into the plane of the complex variable. The article studies the allowable deformation region of the integration contour in the case of a non-uniform medium, in which strong and weak solutions of electromagnetic field are analytical. The source of the field is a vertical dipole. A similar problem was solved for a horizontally layered medium with a harmonious electrical or magnetic dipole as a source.

Keywords: Electrical exploration, electromagnetic field of vertical electric or magnetic dipole, fast-oscillating integrals, deformation contour, complex plane, absence of singular points, deformation domain.

References

1. Tabarovskii L.A. Primenenie metoda integral'nykh uravnenii v zadachakh geoelektriki. Novosibirsk, Nauka Publ., Sibirskoe otdelenie, 1975. (in Russian)
2. Terent'ev S.A. Teoreticheskoe issledovanie polei istochnikov magnitotelluricheskogo polya. Otchet po NIR, Omsk, OmGU Publ., 1980, Dep.vo VNTITs, no. B 818289. (in Russian)
3. Terent'ev S.A. Osnovnye zakonomernosti povedeniya polya ploskoi volny v sloistykh sredakh s ellipticheskim tsilindrom: dis. ... kand. fiz.mat. nauk. Novosibirsk, 1972. (in Russian)
4. Terent'ev S.A. and Guts A.K. Teoreticheskoe issledovanie elektromagnitnogo polya v provodyashchikh neodnorodnykh sredakh. Otchet po NIR, Omsk, OmGU Publ., 1980, Dep. vo VNTITs 25.02.81, no. B 919817, 48 p. (in Russian)
5. Terent'ev S.A. and Guts A.K. Issledovaniya osobennostei spektral'noi plotnosti dlya elektromagnitnogo polya v vertikal'no neodnorodnoi provodyashchei srede. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2018, no. 4(48), pp. 61–77. (in Russian)

6. Terent'ev S.A. and Guts A.K. Osobennosti spektral'noi plotnosti elektromagnitnogo polya dlya elektricheskogo i magnitnogo dipolei v vertikal'no neodnorodnoi provodyashchei srede. Matematicheskie struktury i modelirovanie, 2019, no. 2(50), pp. 66–78. (in Russian)
7. Guts A.K. and Terent'ev S.A. Issledovaniya osobennostei spektral'noi plotnosti dlya elektromagnitnogo polya v vertikal'no neodnorodnoi provodyashchei srede. Sb.: Avtomatizatsiya analiza i sinteza struktur EVM i vychislitel'nykh algoritmov, Omsk, OmPI Publ., 1982, pp. 78–80. (in Russian)
8. Glovinski R., Lions Zh.L., and Tremol'er R. Chislennoe issledovanie variatsionnykh neravenstv. Moscow, Mir Publ., 1979. (in Russian)

Дата поступления в редакцию: 05.03.2020