Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. К. Гуц, Группы порядковых автоморфизмов аффинного пространства и их разрывные расширения, *Докл. АН СССР*, 1985, том 284, номер 5, 1057–1061

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 188.232.240.13
4 января 2022 г., 12:58:48

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pelczynski A.* – Bill. Acad. Polon. Sci. Ser. Math., 1965, vol. 13, № 2, p. 85–89. 2. *Marjanovič M.M.* – Acad. Serbe. Sci. Publ. Inst. Math. Noub. ser., 1973, vol. 14 p. 97–109. 3. *Выборнов А.Н.* В кн.: Отображения и функторы. М.: Изд-во МГУ, 1984, с. 17–23. 4. *Выборнов А.Н.* – УМН, 1984, № 4, с. 153–154. 5. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1966, т. 1. 6. *Чобан М.М.* – ДАН, 1969, т. 186, № 2, с. 272–274. 7. *Архангельский А.В., Пономарев В.И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974. 8. *Островский А.В.* В сб.: Семинар по общей топологии. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 78–85. 9. *Mill J. van.* – Trans. Amer. Math. Soc., 1981, vol. 264, № 1, p. 205–215.

УДК 513.82 МАТЕМАТИКА

А.К. ГУЦ

ГРУППЫ ПОРЯДКОВЫХ АВТОМОРФИЗМОВ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА И ИХ РАЗРЫВНЫЕ РАСШИРЕНИЯ

(Представлено академиком А.Д. Александровым 8 VIII 1984)

Рассматриваем n-мерное аффинное пространство A^n, $n \geqslant 2$, в котором задан инвариантный относительно всех параллельных переносов частичный предпорядок P, т.е. семейство множеств $P = \{P_x \colon x \in A^n\}$, удовлетворяющее условиям: 1) $x \in P_x$; 2) если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$; 3) если t – перенос, то $t(P_x) = P_{t(x)}$ для любой $x \in A^n$.

Биекцию $f \colon A^n \to A^n$ будем называть п о р я д к о в ы м а в т о м о р ф и з м о м, или P-автоморфизмом, если $f(P_x) = P_{f(x)}$ для каждой точки $x \in A^n$. Группу всех P-автоморфизмов обозначим $\mathrm{Aut}(P)$.

Поставим перед собой задачу описания группы $\mathrm{Aut}(P)$. Начало подобным исследованиям положили работы А.Д. Александрова (см. обзор [1]). В данной статье вычисляется группа $\mathrm{Aut}(P)$ для несвязного предпорядка, удовлетворяющего некоторым дополнительным аксиомам, и дается классификация однородных несвязных предпорядков. Полученные результаты продолжают исследования, начатые в [2, 3]. Показывается также, как можно расширить группу $\mathrm{Aut}(P)$ до разрывных биекций.

1. Мы фиксируем точку e на протяжении всей статьи и будем писать P вместо P_e. Если M – какое-либо множество в A^n, содержащее e, то M_x обозначает множество, полученное из M с помощью переноса t такого, что $t(e) = x$. Через $\mathrm{int}\, A$, $\bar{A}$, ∂A, $\mathrm{con}\, A$ обозначаем соответственно внутренность, замыкание, границу и выпуклую оболочку множества A. Далее $L(x, y)$ означает луч с началом x, проходящий через y, $y \neq x$.

Говорим, что предпорядок $P = \{P_x \colon x \in A^n\}$ с в я з н ы й, если $x \in \overline{P_x \setminus \{x\}}$. В противном случае предпорядок P н е с в я з н ы й. Предпорядок P з а м к н у т ы й (открытый), если P замкнуто (соответственно $P \setminus \{e\}$ открыто).

О п р е д е л е н и е 1. Связный предпорядок P называется K-л и н е й ч а т ы м, где K – выпуклый конус с вершиной e, если для любой $x \in P$ имеем $K_x \subset P$. Несвязный предпорядок K-л и н е й ч а т ы й, если $K_x \subset P$ для любой $x \in P \setminus \{e\}$.

Если отношение $y \in P_x$ записать в виде $x \leqslant y$, то $\leqslant$ есть частичный предпорядок в A^n.

Определение 2. Смещением d_{El} (или d_{EL}), где E – гиперплоскость, а l – вектор (соответственно L – луч), не параллельный E, называется гомеоморфизм A^n на себя, удовлетворяющий условиям:

а) на каждой гиперплоскости E_a d_{El} (соответственно d_{EL}) есть перенос;

б) d_{El} (соответственно d_{EL}) переводит отрезки (лучи), равные и параллельные l (соответственно L), в такие же отрезки (лучи).

Определение 3. Квазицилиндром $Q(E, l)$ называется множество $M \subset A^n$, удовлетворяющее условиям:

а) существуют гиперплоскости $\ldots E_{-1}, E_0, E_1, \ldots$, параллельные E, причем E_{i+1} получена из E_i переносом на вектор l,

$$(1)\qquad M = \bigcup_i [M_i \cup (M \cap E_i)],$$

где каждое M_i есть цилиндр, образованный открытыми отрезками, равными l (как векторы) с концами на E_i, E_{i+1} (не исключается, что некоторые и даже все M_i пусты);

б) M не допускает представления (1) с той же гиперплоскостью E и вектором l', параллельным l, но не большим l.

Определение квазицилиндра $Q(E, L)$, где L – луч, дается аналогично.

Определение 4. Предпорядок P называется аффинным (непрерывно аффинным), если $\mathrm{Aut}(P) \subset \mathrm{Aff}(A^n)$, т.е. состоит из аффинных преобразований (соответственно каждый непрерывный P-автоморфизм есть аффинное преобразование).

Введем следующую слабую аксиому Эйнштейна:

$\mathrm{AE_w}$. *Для любых $x, y \in A^n$ если $y \in P_x$, то $P_x \cap P_y^-$ ограничено, где $P_x^- = \{y: y \leqslant x\}$.*

Теорема 1. *Пусть $P = \{P_x: x \in A^n\}$ – предпорядок в A^n, $n \geqslant 2$, удовлетворяющий аксиоме $\mathrm{AE_w}$ и являющийся K-линейчатым, где $\mathrm{int}\, K \neq \phi$.*

Тогда либо P – непрерывно аффинный порядок, либо квазицилиндрический. Причем если P – квазицилиндр $Q(E_1, l_1), Q(E_2, l_2), \ldots, Q(E_p, l_p)$, то любой непрерывный P-автоморфизм f имеет вид

$$(2)\qquad f = f_0 \circ d_1 \circ \ldots \circ d_p,$$

где f_0 – аффинное преобразование, а d_i есть смещение $d_{E_i l_i}$. При этом допустимы любые смещения d_i, и различные d_i коммутируют (мы допускаем, что некоторые l_i – это лучи L_i).

Следствие 1. *Если P – открытый или замкнутый предпорядок в A^n, $n \geqslant 2$, удовлетворяющий условиям теоремы 1, то либо P – аффинный порядок, либо квазицилиндрический. Если же P – квазицилиндр $Q(E_1, l_1), Q(E_2, l_2), \ldots$ $\ldots, Q(E_p, l_p)$, то любой P-автоморфизм f имеет вид (2).*

2. Пусть P – предпорядок в A^n, $n \geqslant 2$. Тогда конус

$$\exp P = \overline{\bigcup_{x \in P} L(e, x)}$$

с вершиной e назовем внешним.

Определение 5. Предпорядок P называется максимально линейчатым, если он является $\mathrm{ext}\, P$-линейчатым.

Связный максимально линейчатый предпорядок является замкнутым коническим. Однако несвязный максимально линейчатый предпорядок может быть весьма произвольным.

Т е о р е м а 2. *Если P – максимально линейчатый несвязный предпорядок с внутренними точками, то*

$$\operatorname{ext} P = \bigcap_{e \in Q_x} Q_x, \quad Q_x = P_x \setminus \{x\},$$

и, следовательно, $\operatorname{Aut}(P) \subset \operatorname{Aut}(\operatorname{ext} P)$.

Введем следующую с и л ь н у ю а к с и о м у Э й н ш т е й н а:

$\mathrm{AE_s}$. *Внешний конус* $\operatorname{ext} P$ *не содержит прямых*;

и а к с и о м у о д н о р о д н о с т и:

АН. *Стабилизатор* $\operatorname{Aut}(P)_e$ *точки e действует транзитивно на* ∂Q_e.

Порядок, удовлетворяющий аксиоме АН, называется о д н о р о д н ы м.

Т е о р е м а 3. *Пусть P – несвязный нетривиальный однородный K-линейчатый* $(\operatorname{int} K \neq \phi)$ *порядок в A^n, $n \geqslant 2$, удовлетворяющий аксиоме* $\mathrm{AE_w}$. *Тогда*:

1) *порядок P аффинный, а порядок $\overline{P}$ максимально линейчатый аффинный*;

2) *справедлива аксиома* $\mathrm{AE_s}$;

3) $\operatorname{ext} P$ *– выпуклый конус, допускающий аффинную группу G* $\operatorname{ext} P$*-автоморфизмов, действующую транзитивно на* $\operatorname{int}(\operatorname{ext} P)$;

4) *множество Q_e выпуклое и выделяется из конуса* $\operatorname{ext} P$ *гиперплоскостями, отсекающими от* $\operatorname{ext} P$ *постоянный объем*;

5) *группа* $\operatorname{Aut}(P)_e$ *есть унимодулярная подгруппа группы G.*

Таким образом, возможна классификация однородных несвязных K-линейчатых порядков, удовлетворяющих аксиоме $\mathrm{AE_w}$. Она сводится к классификации однородных выпуклых конусов в A^n, $n \geqslant 2$, и вычислению группы G. Тогда ∂Q_e есть орбита группы $\operatorname{Aut}(P)_e \subset G$. Группа G вычислена Э.Б. Винбергом в [4], предложение 1 из § 2, гл. III; [5].

3. Р а з р ы в н ы е р а с ш и р е н и я г р у п п ы $\operatorname{Aut}(P)$. Пусть $\mathfrak{A}$ -некоторый и д е а л подмножеств пространства A^n, т.е. выполнены два условия: 1) если $A, B \in \mathfrak{A}$, то $A \cup B \in \mathfrak{A}$; 2) если $A \subset B$ и $B \in \mathfrak{A}$, то $A \in \mathfrak{A}$.

Будем говорить, что A $\mathfrak{A}$-э к в и в а л е н т н о B, если симметрическая разность $A \Delta B \in \mathfrak{A}$. Это отношение эквивалентности, разбивающее множество подмножеств пространства A^n на непересекающиеся классы $\mathfrak{A}$-эквивалентных множеств. Класс с представителем A обозначаем через $[A]$. Будем писать, что $[A] \prec [B]$ тогда и только тогда, когда $B \setminus A \in \mathfrak{A}$.

О п р е д е л е н и е 6. Семейство классов $\Pi = \{\pi_x : x \in A^n\}$, где π_x – класс $\mathfrak{A}$-эквивалентных множеств, сопоставленный точке x, з а д а е т н а A^n $\mathfrak{A}$-п р е д п о р я д о к, если $[\{y : \pi_x \prec \pi_y\}] = \pi_x$ для всех $x \in A^n \setminus A_0$, где $A_0 \in \mathfrak{A}$ – фиксированное множество.

О п р е д е л е н и е 7. Биекция $f : A^n \to A^n$ называется $\mathfrak{A}$-п о р я д к о в ы м а в т о м о р ф и з м о м, если $f(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}$, $f^{-1}(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}$ и

$$f(S_x) \Delta S_{f(x)} \in \mathfrak{A} \qquad (\text{или } [f(S_x)] = [S_{f(x)}])$$

для $x \in A_f$, где $A_f \in \mathfrak{A}$, $A_0 \subset A_f \cap f(A_f)$ и

$$S_x = \{y \in A^n \setminus A_0 : \pi_x \prec \pi_y\}.$$

Множество $\operatorname{Aut}(\Pi, \mathfrak{A})$ всех $\mathfrak{A}$-порядковых атоморфизмов образует группу с суперпозицией в качестве групповой операции и обратной биекцией как обратного элемента.

Если $P = \{P_x : x \in A^n\}$ – предпорядок в A^n, то он задает $\mathfrak{A}$-предпорядок $\Pi_p = \{[P_x] : x \in A^n \setminus A_0\}$. Поэтому естественно назвать группу $\operatorname{Aut}(\Pi_p, \mathfrak{A})$ разрывным р а с ш и р е н и е м группы порядковых автоморфизмов $\operatorname{Aut}(P)$.

Обозначим через $\mathfrak{A}_L$ идеал множеств, имеющих нулевую лебегову меру.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $C = \{ C_x : x \in A^n \}$ *– порядок в* A^n, $n \geqslant 3$, *такой, что в прямоугольных декартовых координатах* $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$

$$(3) \qquad C_x = \{ y \in A^n : (y_0 - x_0)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} (y_i - x_i)^2 \geqslant 0 \ \text{и} \ y_0 \geqslant x_0 \}.$$

Если $f: A^n \to A^n$ *– биекция класса* $W_n^1(A^n)$, *удовлетворяющая равенству*

$$(y_0 - x_0)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} (y_i - x_i)^2 = [f_0(y) - f_0(x)]^2 - \sum_{i=1}^{n-1} [f_i(y) - f_i(x)]^2$$

для почти всех $y \in C_x$, *где* $x \in A^n \setminus A_0$, $A_0 \in \mathfrak{A}_L$, *то* f *есть* $\mathfrak{A}_L$*-порядковый автоморфизм, почти всюду совпадающий с неоднородным преобразованием Лоренца.*

Ф и з и ч е с к а я и н т е р п р е т а ц и я т е о р е м ы 4. Покажем, что с расширением $\mathrm{Aut}(\Pi_C, \mathfrak{A}_L)$ связан обобщенный принцип относительности, который существенно обогащает круг явлений, подпадающих под действие (специального) принципа относительности. Далее вместо аффинного пространства рассматриваем четырехмерное арифметическое пространство $\mathbf{R}^4$.

Принцип относительности, как известно, утверждает независимость законов, управляющих явлениями природы, от состояния движения системы отсчета, если только само это движение является инерциальным, т.е. прямолинейным равномерным механическим перемещением в пространстве. Можно, однако, спросить: нельзя ли распространить принцип относительности на движения, не являющиеся механическими? Под такими движениями мы пока понимаем какие-либо формы движения материи, отличные от простого механического перемещения. В таком случае под "движущейся" системой отсчета следует мыслить исходную "покоящуюся" систему отсчета, в которой "включаются" некоторые силы, природу которых пока не конкретизируем. По указанной схеме в свое время Эйнштейн пытался распространить теорию относительности на гравитационное поле, заменяя само поле нелинейными преобразованиями координат ([6], с. 190–193). Осталась неиспользованной возможность ввести в теорию физические поля, ставя им в соответствие разрывные преобразования. Инерциальное механическое движение – это диффеоморфизм из $\mathrm{Aut}(C)$ (подобные отображения далее опускаем). Поэтому теорема 4 подсказывает следующий путь расширения группы Пуанкаре Λ.

О п р е д е л е н и е 8. Пусть $\widetilde{\Lambda}$ – г р у п п а б и е к ц и й $f: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^4)$ таких, что почти всюду на $\mathbf{R}^4$

$$(4) \qquad \sum_{i,k=0}^{3} \eta_{ik} \frac{\partial f_i}{\partial x^n} \frac{\partial f_k}{\partial x^n} = \eta_{nm},$$

где $\eta_{ik} = \mathrm{diag}\{1, -1, -1, -1\}$, а $\partial f_i / \partial x^n$ – обобщенная производная.

Нетрудно видеть, что $\Lambda \subset \widetilde{\Lambda}$. Помимо преобразований Лоренца в $\widetilde{\Lambda}$ входят разрывные биекции, отличающиеся от лоренцевых на множестве меры нуль [7].

Обобщенный принцип относительности в таком случае означает, что уравнения, описывающие физические законы, должны быть инвариантны относительно группы $\widetilde{\Lambda}$. При этом инвариантность дифференциальных уравнений относительно группы $\widetilde{\Lambda}$ следует понимать в обобщенном смысле, т.е. инвариантными должны быть интегральные тождества, с помощью которых обычно формулируются в математической физике обобщенные краевые задачи. Например, в случае уравнения Клейна–Гордона

$$\sum_{i,k=0}^{3} \eta_{ik} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^k} - \mu^2 \psi = 0$$

рассматривается тождество

$$\int_{\mathbf{R}^4} \left(\sum_{i,\,k\,=\,0}^{3} \eta_{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \mu^2 \psi\varphi \right) d^4 x = 0,$$

где $\psi \in W^1_{2,\,\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^4)$, $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^4$ – произвольная ограниченная область, а интеграл понимается в смысле Лебега.

Что нового может дать введение "испорченных" преобразований Лоренца? Рассмотрим биекцию $\widetilde{f} \in \widetilde{\Lambda} \setminus \Lambda$, которая эквивалентна преобразованию Лоренца f. Предполагаем, что $\widetilde{f}$ отличается от f лишь на некоторой двумерной плоскости σ, проходящей через временноподобную прямую λ. Вполне возможно, что $\widetilde{f}(\lambda)$ лежит в плоскости $\widetilde{f}(\sigma)$, но является уже пространственноподобной прямой. Таким образом, если в "покоящейся" системе отсчета "включить поле", отвечающее биекции $\widetilde{f}$, то будет наблюдаться превращение обычной досветовой частицы (тардиона) в сверхсветовую (тахион). Здесь нет ничего неожиданного, ибо в сильных внешних полях обычные частицы способны обнаружить тахионные свойства (см. обзор [8], § 3). Важным является то, что кинематическое описание тахионных взаимодействий возможно на языке разрывных расширений групп порядковых автоморфизмов.

Существует еще удивительное следствие обобщенного принципа относительности. Если λ – прямая в 3-плоскости Σ, то можно выбрать $f \in \widetilde{\Lambda} \setminus \Lambda$ так, что $f(\lambda)$ будет множеством, плотным в 3-плоскости $f(\Sigma)$. Следовательно, 3-траектория частицы с мировой линией λ под воздействием "поля" f рассыпается по некоторой пространственной 2-плоскости, т.е. перестает существовать как классическая 3-траектория частицы. Возможен обратный процесс – "собирания" или "рождения" частицы из пространства при "включении поля" $f^{-1} \in \widetilde{\Lambda} \setminus \Lambda$.

Поэтому не следует сводить обобщенный принцип относительности только к описанию взаимодействий с участием тахионов. Он скорее отражает проявление свойств движущейся материи, которые качественно отличны от тех, что присущи простым механическим перемещениям.

Омский государственный
университет

Поступило
29 VIII 1984

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гуц А.К.* – УМН, 1982, т. 37, вып. 2, с. 37–79. 2. *Гуц А.К.* – ДАН, 1980, т. 253, № 2, с. 268–271. 3. *Гуц А.К.* – Сиб. матем. журн., 1980, т. 21, № 3, с. 80–88. 4. *Винберг Э.Б.* Тр. ММО, 1963, т. 12, с. 303–358. 5. *Винберг Э.Б.* Там же, 1965, т. 13, с. 56–83. 6. *Эйнштейн А.* Собр. соч. М.: Наука, 1965, т. 1. 7. *Calabi E., Hartman Ph.* – Duke math. J., 1970, vol. 37, № 4, p. 741–750. 8. *Киржниц Д.А., Сазонов В.Н.* Эйнштейновский сб., 1973, М.: Наука, 1974.