А. К. Гуц, Отображения упорядоченного пространства Лобачевского,
Сиб. матем. журн., 1986, том 27, номер 3, 51–67

https://www.mathnet.ru/smj7143

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXVII, № 3 МАЙ — ИЮНЬ 1986

УДК 513.812

А. К. ГУЦ

ОТОБРАЖЕНИЯ УПОРЯДОЧЕННОГО ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

Рассмотрим n-мерное пространство Лобачевского $Л^n$, $n \geqslant 2$, в котором задан порядок, инвариантный относительно некоторой просто транзитивной подгруппы T группы движений. Поставим перед собой задачу полного описания изотонных гомеоморфизмов f: $Л^n \to Л^n$ (т. е. f и f^{-1} монотонны). В евклидовом пространстве аналогичная задача была решена в статье А. Д. Александрова [1].

Результаты статьи анонсированы в [2].

§ 1. Определения и обозначения

(1.1). Геометрически введение порядка в $Л^n$ состоит в том, что каждой точке $x \in Л^n$ сопоставляем множество $P_x \subset Л^n$ с условиями: 1) $x \in P_x$; 2) если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$; 3) при $x \neq y$ имеем $P_x \neq P_y$. Тогда, записывая отношение $y \in P_x$ как $x \leqslant y$, получаем частичный порядок в $Л^n$.

Инвариантность порядка относительно группы T понимается следующим образом: если $t \in T$, то $t(P_x) = P_{t(x)}$ для любой точки $x \in Л^n$.

Фиксируем в $Л^n$ точку e, и если M — какое-либо множество в $Л^n$, содержащее точку e, то M_x обозначает множество, полученное из M с помощью движения $t \in T$, переводящего e в точку x.

Биективное отображение f: $Л^n \to Л^n$ упорядоченного пространства $Л^n$ называется *изотонным*, если для любой точки имеем $f(P_x) = P_{f(x)}$. Нетрудно проверить, что биекция f изотонна тогда и только тогда, когда f и f^{-1} монотонны, т. е. если $x \leqslant y$, то $f(x) \leqslant f(y)$ и $f^{-1}(x) \leqslant f^{-1}(y)$.

(1.2). Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — прямоугольные декартовы координаты в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$. Под *моделью Пуанкаре пространства Лобачевского* понимаем полупространство $\{x \in \mathbf{R}^n: x_1 > 0\}$, в котором метрика Лобачевского задается следующей дифференциальной формой:

$$ds^2 = k^2 \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} dx_i^2}{x_1^2}, \ k = \mathrm{const} \neq 0.$$

Группа T состоит из преобразований t вида

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (\lambda x_1, \lambda x_2 + \alpha_1, \ldots, \lambda x_n + \alpha_{n-1}),$$

где $\lambda > 0$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ — вещественные числа, и является разрешимой некоммутативной группой Ли.

Пусть l — прямая, проходящая через точку e. Обозначим через Λ множество всех прямых, параллельных прямой l (в некотором заданном направлении). Пусть π — произвольная двумерная плоскость, проходящая через прямую l. Символом Ψ_π обозначим множество всех эквидистант, лежащих в π и отвечающих прямой l. Введем также множество Φ_π всех орициклов, лежащих в π и ортогональных l; причем если $h \in \Phi_\pi$ — орицикл, то h, рассматриваемый как предел окружностей, характеризуется тем, что центры указанных окружностей берутся на луче $l^+ \subset l$, который, исходя из некоторой точки, уходит в направлении параллельности семейства прямых Λ.

Мы предполагаем далее, что Λ в модели Пуанкаре изображается координатными линиями x_1. Тогда элементам множеств Φ_π и Ψ_π соответствуют евклидовы прямые (точнее; пересечения евклидовых прямых с $\{x \in \mathbf{R}^n\colon\ x_1 > 0\}$).

Обозначим через Σ множество всех элементов, полученных из элементов множества $\Sigma'_\pi \equiv \Lambda \cup \Psi_\pi \cup \Phi_\pi$, взятых для любой плоскости π, $l \subset \pi$, с помощью группы T. Т. е. если $\alpha \in \Sigma$, то существуют $t \in T$ и элемент $\alpha' \in \Sigma'_\pi$ для некоторой плоскости π такие, что $\alpha = t(\alpha')$. Можно символически написать

$$\Sigma = T\Big(\bigcup_{\pi, l \subset \pi} \Sigma'_\pi\Big).$$

Элементы множества Σ будем называть *квазипрямыми* (для краткости *q-прямыми*). Из квазипрямых обычным образом можно получить q-лучи, m-мерные q-плоскости и т. д. В модели Пуанкаре пересечение любой евклидовой прямой с полупространством $\{x_1 > 0\}$ представляет некоторую q-прямую.

Под *q-конусом C с вершиной в точке e* понимаем множество, которое вместе с каждой точкой x содержит целый q-луч с началом e, проходящий через x.

Множество $A \subset Л^n$ называется *q-выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками x, y оно содержит весь q-отрезок с концами x и y.

Через $l(x, y)$, $x \neq y$, обозначим q-прямую, проходящую через точки x, y, а через $l^+(x, y)$ — q-луч, исходящий из точки x и проходящий через точку y. Квазиотрезок с концами x, y обозначаем через $[x, y]$.

(1.3.) Множества A, $B \subset Л^n$ назовем *T-параллельными*, если существует движение $t \in T$ такое, что $t(A) = B$. Говорим, что *семейство T-параллельных* множеств $\{M_x\colon\ x \in Л^n\}$ *сохраняется при отображении* $f\colon\ Л^n \to Л^n$, если $f(M_x) = M_{f(x)}$ для любой $x \in Л^n$.

(1.4). Через $|A|$ будем обозначать объект, отвечающий объекту $A \subset Л^n$ при его изображении в модели Пуанкаре. Таким образом, $|Л^n| = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n\colon\ x_1 > 0\}$. Положим $H = \{x_1 = 0\}$.

(1.5). Если $A \subset Л^n$, то через $\operatorname{int} A$, $\bar{A}$, ∂A обозначаем соответственно внутренность, замыкание и границу множества A.

(1.6). Определение q-конуса $L \times K$. Пусть L — q-луч с началом e, K — q-конус с вершиной e, причем L, K не лежат в одной q-плоскости и $L \cap K = \{e\}$. Продолжим $|L|$, $|K|$ естественным образом на $\mathbf{R}^n$ до (евклидовых) луча $\tilde{L}$ и конуса $\tilde{K}$ соответственно. Тогда под $L \times K$ будем понимать такое множество, что $|L \times K| = |Л^n| \cap (\tilde{L} \times \tilde{K})$. Множество $L \times K$ есть q-конус с вершиной e, и его можно определить, не прибегая к модели Пуанкаре.

В самом деле,

$$L \times K = \bigcup_{x \in A} l^+(e, x),$$

где $A = \bigcup_{x \in K} L_x$.

(1.7). Отображение будем называть *квазиаффинным*, если оно любую q-прямую отображает на q-прямую.

Очевидно, что группа T состоит из квазиаффинных движений.

§ 2. Квазиконические порядки

(2.1). Нетрудно видеть, что q-выпуклый квазиконус C задает инвариантный порядок в $Л^n$, т. е. порождаемое им семейство множеств $\{C_x\colon\ x \in Л^n\}$ удовлетворяет условиям 1—3 из (1.1) в § 1. Рассмотрим три случая:

1) $\overline{C} \neq L \times K$;
2) $C = L \times K$;
3) $C \neq L \times K$, но $\overline{C} = L \times K$.

Эти три случая исчерпывают все возможности, возникающие при изучении квазиконических порядков. Соответствующие изотонные гомеоморфные отображения f изучаются в § 3—5. Из этих параграфов следует, что в типичном (первом) случае отображение будет квазиаффинным. Два других случая исключительны, а соответствующие отображения могут быть достаточно произвольные, но тем не менее хорошо описываемые.

(2.2). Изотонные отображения f общих порядков, т. е. не квазиконических, при определенных условиях будут сохранять некоторые порядки, задаваемые q-конусом, и, следовательно, также в «типичном» случае будут квазиаффинными [2]. Как это можно сделать, показано ниже в § 6.

(2.3). Отметим важный факт, часто используемый в ходе доказательства теорем. Если $\{M_x\colon x \in E\}$ — некоторое семейство множеств, где $M \subset E$ — либо q-конус, либо объединение q-прямых, то для изучения отображений $f\colon E \to E$, сохраняющих данное семейство, не имеет значения, является ли E пространством Лобачевского $Л^m$, $m \geqslant 1$, или квазиплоскостью, не являющейся орисферой.

Действительно, в этом легко убедиться, переходя к модели Пуанкаре.

§ 3. Отображение f в случае квазиконуса $\overline{C} \neq L \times K$

Полагаем, что $\operatorname{int} C \neq \varnothing$.

(3.1). Теорема 1. *Если порядок в $Л^n$, $n \geqslant 2$, задан q-конусом C таким, что ∂C не содержит q-прямой и $\overline{C} \neq L \times K$, где L — q-луч и K — q-конус меньшей размерности, то любое гомеоморфное изотонное отображение f является квазиаффинным**.

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть σ — открытая полуплоскость, лежащая в аффинной плоскости τ, и $\{\lambda_x^i\colon x \in \tau\}$ $(i = 1, 2, 3)$ — три различных семейства параллельных прямых в τ. Если $f\colon \sigma \to \sigma$ — гомеоморфизм такой, что $f(L_x^i) = L_{f(x)}^i$, где $L_x^i = \sigma \cap \lambda_x^i$, $x \in \sigma$, $i = 1, 2, 3$, то f аффинно.*

Доказательство. Для 2-плоскости σ этот результат доказан в [1, с. 12]. Пусть σ — полуплоскость. Обозначим через H границу σ. Продолжим f на H. Предположим, что L_x^1, L_x^2 — полупрямые. Естественным образом продолжим L_x^1, L_x^2 на H. Пусть $\{z\} = L_x^1 \cap L_y^2$ и $z \in H$. Тогда $L_{f(x)}^1 \cap L_{f(y)}^2 \cap H \neq \varnothing$. В самом деле, допустим, что $L_{f(x)}^1 \cap L_{f(y)}^2 \cap H = \varnothing$. Полупрямые $L_{f(x)}^1$ и $L_{f(y)}^2$ ограничивают область U такую, что найдется точка $a \in U$, для которой L_a^1, $L_a^2 \subset U$,

$$\left(L_a^1 \cup L_a^2\right) \cap L_{f(x)}^1 = \varnothing, \ \left(L_a^1 \cup L_a^2\right) \cap L_{f(y)}^2 = \varnothing. \tag{1}$$

Переходя к прообразам, заметим, что

$$\left[f^{-1}\left(L_a^1\right) \cup f^{-1}\left(L_a^2\right)\right] \cap \left[L_x^1 \cup L_y^2\right] \neq \varnothing,$$

это противоречит равенствам (1). Итак, $L_{f(x)}^1 \cap L_{f(y)}^2 = \{z'\}$ и $z' \in H$. Тогда полагаем по определению $f(z) = z'$. Тем самым получаем непрерывное и биективное продолжение f на H. Пусть L_a^1, L_a^2, где $|a| = (0, \ldots, 0)$, взяты за оси координат ξ, η, а лучи $f\left(L_a^1\right)$, $f\left(L_a^2\right)$ — за оси координат ξ', η' в образе. Возьмем на L_a^3 точку b. Проведем через

* В [2] ошибочно сказано «изометричным». Последнее справедливо при дополнительных условиях, налагаемых на C.

нее прямые λ_b^1, λ_b^2. Через точки пересечения c_1, c_2 этих прямых с λ_a^1, λ_a^2 проведем прямые $\lambda_{c_1}^3, \lambda_{c_2}^3$ и т. д. Будем иметь на σ целочисленную решетку $\{(n\alpha, m\beta): n, m$ целые$\}$. Так как отображение f переводит параллельные прямые в параллельные, то построение сохраняется. Следовательно, $f(\{(n\alpha, m\beta)\})$ есть целочисленная решетка $\{(n\alpha', m\beta'): n, m$ целые$\}$. Если $f(\xi, \eta)=(f_1(\xi, \eta), f_2(\xi, \eta))$, то $f_1(\xi, \eta)=f_1(\xi)$, $f_2(\xi, \eta)=f_2(\eta)$, $f_1(n\alpha)=nf_1(\alpha)=n\alpha'$, $f_2(m\beta)=mf_2(\beta)=m\beta'$. Это верно при любых α, β. Поэтому, взяв $\alpha, \beta\to 0$ и имея в виду, что f непрерывно, получаем: f аффинно.

Замечание. Лемма остается справедливой, если предполагать, что f отображает три семейства параллельных прямых (в общем положении) на три аналогичных семейства прямых. Доказательство этого факта, по существу, не отличается от приведенного выше.

Доказательство теоремы 1. Так как f — гомеоморфизм, будем считать, что $C=\overline{C}$, т. е. C — замкнутый квазиконус.

(a) В наших обозначениях $C^-=\{x\in Л^n: x\leqslant e\}$, где $\leqslant$ — порядок, заданный q-конусом C. Если f — изотонная биекция, то, очевидно, $f(C_x^-)=C_{f(x)}^-$. Рассмотрим двойной поверхностный q-конус $Q=\partial C\cup\cup\partial C^-$. Пусть λ — произвольная q-прямая, проходящая через точку e и лежащая на Q. В модели Пуанкаре λ изобразится евклидовой прямой, которая может иметь точку пересечения с гиперплоскостью $H=\{x\in\mathbf{R}^n: x_1=0\}$. Пусть $x, y\in\lambda$ и $x\neq y$. Будем говорить, что q-луч $l^+(x, y)$ *свободный*, если его изображение в модели Пуанкаре не пересекается с гиперплоскостью H.

Пусть теперь y — точка на границе ∂Q_x такая, что q-луч $l^+(x, y)$ свободный. Пусть

$$M_{xy}=\bigcup C_z^-\ \{z\in l^+(x, y)\},\ \text{если}\ l^+(x, y)\subset\partial C_x,$$

и

$$M_{xy}=\bigcup C_z\ \{z\in l^+(x, y)\},\ \text{если}\ l^+(x, y)\subset\partial C_x^-.$$

Если $\overline{M}_{xy}$ оказывается q-полупространством, то $\tau=\partial M_{xy}$ является q-касательной q-плоскостью квазиконуса C_y^- в точке x и в то же время (по симметрии) q-касательной к квазиконусу C_x в точке y. Обратно, если в y квазиконус C_x имеет q-касательную q-плоскость τ, то $\tau=\partial M_{xy}$, когда луч $l^+(x, y)$ свободный, и $\tau=\partial M_{xu}$, где $u\in l(x, y)\setminus l^+(x, y)$, когда $l^+(x, y)$ — не свободный луч.

В общем случае $\overline{M}_{xy}$ представляется в модели Пуанкаре выпуклым конусом — двугранным углом, содержащим прямую, проходящую через точки x, y. Пусть R_{xy} — q-плоскость наибольшей размерности, проходящая через x и лежащая в $\overline{M}_{xy}$.

Если M_{uv} определено, то, как легко проверить, $\overline{M}_{uv}=\overline{M}_{xy}$ тогда и только тогда, когда $u, v\in R_{xy}$. Следовательно, R_{xy} есть множество всех u, для которых существуют точки v такие, что $\overline{M}_{uv}=\overline{M}_{xy}$.

Следовательно, множества $\overline{M}_{xy}$ и R_{xy} определяются только в терминах порядка и топологии. Поэтому они сохраняются при непрерывном отображении f, так что $f(\overline{M}_{xy})$ и $f(R_{xy})$ имеют тот же смысл.

Как мы выяснили выше, квазиконус C_x имеет q-касательную q-плоскость τ в точке y тогда и только тогда, когда существует точка u, равная, быть может, и y, такая, что $\tau=\partial M_{xu}$. Стало быть, $R_{xu}=\partial M_{xu}$. Гомеоморфизм f сохранит это равенство, являющееся условием, определяющим q-касательную q-плоскость. Значит, q-касательным q-плоскостям квазиконусов C_x отвечают q-касательные q-плоскости квазиконусов $C_{f(x)}$ и обратно.

(b) q-Касательные T-параллельные q-плоскости τ_1, τ_2, $\tau_2=t(\tau_1)$, где $t\in T$, отображаются на q-касательные T-параллельные q-плоскости τ_1' и τ_2' соответственно, для которых существует $t'\in T$ такое, что $\tau_2'=t'(\tau_1')$ (в модели Пуанкаре q-плоскости τ_1, τ_2 и τ_1', τ_2' изображаются парами параллельных плоскостей $|\tau_1|$, $|\tau_2|$ и $|\tau_1'|$, $|\tau_2'|$). Верно и обратное.

Предположим сначала, что $\tau_2' = t'(\tau_1')$. Докажем, что $\tau_2 = t(\tau_1)$.

В самом деле, q-плоскости τ_1', τ_2' не пересекаются. Поэтому не пересекаются и их прообразы $\tau_1 = f^{-1}(\tau_1')$, $\tau_2 = f^{-1}(\tau_2')$. Если τ_1 изображается в модели плоскостью, параллельной гиперплоскости H, то, очевидно, такова и τ_2, т. е. $\tau_2 = t(\tau_1)$ для некоторого элемента $t \in T$. В общем случае, если $\tau_2 \neq t(\tau_1)$, то q-плоскости τ_1 и τ_2 ограничивают q-выпуклую замкнутую область U такую, что если $x \in U$, то либо $C_x \subset U$, либо $C_x^- \subset U$. Пусть для определенности имеет место первое включение. Так как $\tau_1 \cap \tau_2 = \varnothing$, то можно найти точки $u \in \tau_1$ и $v \in \tau_2$ так, чтобы $C_u \cap \tau_2 = \varnothing$ и $C_v \cap \tau_1 = \varnothing$. Тогда $C_{f(u)} \cap \tau_2' = \varnothing$ и $C_{f(v)} \cap \tau_1' = \varnothing$. Но в силу того что $\tau_2' = t'(\tau_1')$, хотя бы одно из этих равенств несправедливо. Получили противоречие. Следовательно, $\tau_2' = t'(\tau_1')$ влечет $\tau_2 = t(\tau_1)$.

Пусть теперь $\tau_2 = t(\tau_1)$. Полагаем $\tau_1' = f(\tau_1)$, $\tau_2' = f(\tau_2)$. Для определенности считаем, что τ_2 q-касательна к C_x, а τ_1 — к C_y. Тогда τ_1' q-касательна к $C_{f(y)}$ и существует q-плоскость $t'(\tau_1')$, q-касательная к $C_{f(x)}$. Квазиплоскости $t'(\tau_1')$, как было установлено выше, отвечает q-плоскость τ_2. Но тогда $f(\tau_2) = t'(\tau_1') = \tau_2'$.

Таким образом, условия $\tau_2 = t(\tau_1)$, $\tau_2' = t'(\tau_1')$ влекут друг друга при гомеоморфизме f.

(c) q-Касательные q-плоскости квазиконуса C ограничивают его. Поэтому можно взять n q-касательных q-плоскостей τ_i $(i = 1, \ldots, n)$, ограничивающих n-гранный квазиугол V. Так как при отображении f q-касательные q-плоскости переходят в q-касательные, а T-параллельные — в T-параллельные, то и ребра квазиуглов V_x переходят в совместимые с помощью группы T ребра квазиуглов $V_{f(x)}$. Возьмем какое-либо ребро L квазиугла V. Квазиконус C имеет q-касательные q-плоскости, отличные от τ_i, так как иначе $C = V$, т. е. $|C|$ был бы декартовым произведением. Все такие q-касательные q-плоскости не могут проходить через ребро L, ибо в противном случае было бы $C = L \times K$. Поэтому имеется q-касательная q-плоскость τ, не проходящая через ребро L и отличная от противоположной ему q-плоскости τ_i. Значит, кроме L есть еще хотя бы одно ребро N, не содержащееся в τ. Квазиплоскость σ, натянутая на L, N, пересекает τ по q-прямой $S = \sigma \cap \tau$. Таким образом, имеем на σ три семейства T-параллельных соответственно L, N, S q-прямых.

При отображении f T-параллельные L, N q-прямые переходят в T-параллельные. Поэтому q-плоскости σ_x переходят в двумерные q-плоскости $\tilde{\sigma}_{f(x)}$, q-касательные q-плоскости τ_x переходят в q-касательные q-плоскости $\tilde{\tau}_{f(x)}$, так что q-прямые $S_x = \sigma_x \cap \tau_x$ переходят в q-прямые $\tilde{S}_{f(x)} = \tilde{\sigma}_{f(x)} \cap \tilde{\tau}_{f(x)}$.

Если воспользоваться теперь моделью Пуанкаре, то $|\sigma_x|$, $|\tilde{\sigma}_x|$ — это аффинные полуплоскости (или плоскости), а $\{|L_x|, |N_x|, |S_x|\}$ — три семейства параллельных полупрямых (прямых), отображаемые на соответствующие три семейства параллельных полупрямых (прямых) $\{|\tilde{L}_{f(x)}|, |\tilde{N}_{f(x)}|, |\tilde{S}_{f(x)}|\}$.

Нетрудно видеть, что если $|\sigma|$ — полуплоскость, то $|f(\sigma)| = |\tilde{\sigma}|$ — также полуплоскость. Применяя лемму 1, убеждаемся, что $|f|$ аффинно на $|\sigma|$ в модели Пуанкаре, и, следовательно, исходное отображение f квазиаффинно на q-плоскости σ.

Отображение $|f|$ прямые, лежащие в $|\sigma|$ и параллельные H, отображает на прямые, параллельные H. В наших рассуждениях ребро L было взято произвольно. Всего имеется n ребер у квазиугла V. Значит, каждое из них лежит на некоторой двумерной q-плоскости, на которой f квазиаффинно.

Среди этих q-плоскостей можно взять $(n-1)$ q-плоскостей $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ так, что прямые, проходящие через точку e, лежащие в $|\sigma_i|$ и параллельные гиперплоскости H, находятся в общем положении. Пусть им отвечают q-прямые $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. В силу вышеизложенного $|f|(|\lambda_{ix}|) = |\widetilde{\lambda}_{if(x)}|$, где $|\widetilde{\lambda}_i|$ — прямые, параллельные гиперплоскости H. Без ограничения общности считаем, что ребро $|L|$ не параллельно H. Прямые $|L|$, $|\lambda_i|$ $(i=1, \ldots, n-1)$ возьмем в качестве осей аффинной системы координат в полупространстве $|Л^n| = \{x_1 > 0\}$. Так как $|f|$ аффинно на этих осях, то $|f|$ аффинно в $|Л^n|$. Но тогда f квазиаффинно в $Л^n$. Теорема 1 доказана.

Теорема 1′. *Утверждение теоремы 1 остается справедливым, если предполагать, что $f(C)$ есть квазиконус, а $f(C_x)$ получается из $f(C)$ с помощью группы T для любой $x \in Л^n$.*

Доказательство теоремы 1′ не отличается от доказательства теоремы 1.

§ 4. Случай $C = L \times K$

Для дальнейшего нам понадобится

(4.1). Лемма 2. *Если f: $Л^n \to Л^n$ $(n \geqslant 2)$ — гомеоморфизм, сохраняющий семейство q-прямых $\{N_{ix}: x \in Л^n\}$ $(i=1, \ldots, n)$ (т. е. $f(N_{ix}) = N_{if(x)}$ для любой $x \in Л^n$ $(i=1, \ldots, n)$), тождествен на q-прямых $N_1, \ldots, N_n$, проходящих через точку e и находящихся в общем положении, то f тождествен в $Л^n$.*

Доказательство. Если среди q-прямых $N_1, \ldots, N_n$ существуют $(n-1)$ прямых, являющихся орициклом, то утверждение леммы очевидно (см. конец доказательства теоремы 1). Поэтому предположим, что таких q-прямых нет. Обозначим через Q q-гиперплоскость, натянутую на $N_1, \ldots, N_{n-1}$. Далее, дополним $|Q|$ и $|N_n|$ естественным образом до гиперплоскости и прямой в $\mathbf{R}^n$, но обозначения оставим без изменения, т. е. $|Q|$ и $|N_n|$. По предположению Q не гиперорисфера, т. е. $|Q|$ не параллельна H. Если N_n — орицикл, то полагаем $U = |Л^n|$. Определим теперь область U, когда N_n не является орициклом. Пусть $|\sigma_1|$ — гиперплоскость, полученная объединением всех прямых $|N_{nx}|$ таких, что $|N_{nx}| \cap H \cap |Q| \neq \varnothing$, а $|\sigma_2|$ совпадает с некоторой $|Q_y|$ такой, что $|Q_y| \cap H \cap |N_n| \neq \varnothing$. Обозначим через $U \subset |Л^n|$ замкнутую область, ограниченную гиперплоскостями $|\sigma_1|$, $|\sigma_2|$.

Далее доказательство ведем индукцией по размерности n.

А. $n=2$. Пусть $x \in \operatorname{int} U$, тогда $N_{1x} \cap N_2 \neq \varnothing$ и $N_{2x} \cap N_1 \neq \varnothing$; поэтому из тождественности f на N_1, N_2 вытекает $f(x) = x$, т. е. f тождественно на $\operatorname{int} U$, а значит, и на U.

Возьмем $x \notin U$. Тогда либо $N_{1x} \cap N_2 \neq \varnothing$, либо $N_{2x} \cap N_1 \neq \varnothing$. Для определенности примем первое; второй случай рассматривается аналогично. Так как f тождественно на N_2, то $f(x)$ будет лежать на N_{1x} в силу того, что $f(N_{1x}) = N_{1x}$. Пусть $\{a\} = |N_{2x}| \cap H$ и $b \in N_2$ такова, что $|N_{1b}| \cap H = \{a\}$. Существует последовательность $\{b_m\} \subset N_2$, для которой $b_m \xrightarrow[m\to\infty]{} b$ и $N_{1b_m} \cap N_{2x} \neq \varnothing$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Так как $f(b_m) = b_m$, $f(b) = b$, то $f(N_{1b_m}) = N_{1b_m}$, $f(N_{1b}) = N_{1b}$, поэтому $f(N_{2x}) \cap N_{1b_m} \neq \varnothing$, $m = 1, 2, \ldots, f(N_{2x}) \cap N_{1b} = \varnothing$. Отсюда следует, что $f(N_{2x}) = N_{2x}$, т. е. $\{x\} = N_{1x} \cap N_{2x}$ остается на месте при отображении f. Тем самым в случае $n=2$ лемма доказана.

Б. Пусть лемма справедлива для размерности $k \leqslant n-1$ и имеется случай $k = n$. Тогда в полугиперплоскости $|Q|$ будет семейство сохраняющихся q-прямых $\{N_{ix}: x \in Q\}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, причем $f(Q) = Q$. Так как рассмотрение $Л^{n-1}$ сводится (см. п. (2.3)) к изучению полупространства $|Л^{n-1}|$, то $|Q|$ не отличается в этом от $|Л^{n-1}|$ и можно пользоваться индукционным предположением, считая, что f тождественно на Q. Но тогда легко заключить, что $|f|$ тождественно на $U \subset |Л^n|$. Пусть теперь $x \notin U$. Возьмем q-плоскость S, натянутую на N_{1x}, N_{nx}. Поскольку S при отображении f переходит в q-плоскость S', натянутую на $N_{1f(x)}$, $N_{nf(x)}$ и $S \cap Q \neq \varnothing$, а f тождественно на Q, то $f(S) = S$, т. е. $S' = S$. На S f сохраняет два семейства q-прямых $\{N_{1x}: x \in S\}$, $\{N_{nx}: x \in S\}$. Так как при сведении рассмотрения S к $|S|$ $|S|$ ничем не отличается в данной ситуации от $|Л^2|$, то можно воспользоваться утверждением п. А, т. е. считать доказанным, что $|f|$ тождественно на $|S|$, а значит, $f(x) = x$, т. е. f тождественно на $Л^n$. Лемма доказана.

(4.2). Определение смещений. Пусть L — q-луч с началом e, а E — q-гиперплоскость, содержащая точку e, и $L \cap E = \{e\}$. Предположим, что либо N — орицикл, где N — q-прямая, содержащая L, либо E — гиперорисфера. Тогда имеем

Определение 1. *Смещение 1-го рода* d_{EL} — это гомеоморфизм $Л^n$, $n \geqslant 2$, на себя такой, что

1) d_{EL} на N — (произвольный) гомеоморфизм;

2) для любой точки $x \in Л^n$ имеем $d_{EL}(L_x) = L_{d_{EL}(x)}$, $d_{EL}(E_x) = E_{d_{EL}(x)}$;

3) $d_{EL}|_E$ есть движение из T (т. е. при условии $d_{EL}(e) = e$ смещение d_{EL} тождественно на E).

Из определения следует, что d_{EL} любую q-прямую, T-параллельную q-плоскости E, отображает на такую же. Пусть теперь L_1, L_2 — два различных q-луча, исходящие из точки e, N_1, N_2 — соответственно содержащие их q-прямые, не являющиеся орициклами, E_1 — q-гиперплоскость, проходящая через N_2 и $E_1 \cap L_1 = \{e\}$. Тогда имеем

Определение 2. *Смещение 2-го рода* $d_{E_1L_1L_2}$ — это гомеоморфизм $Л^n$, $n \geqslant 2$, на себя такой, что

1) $d_{E_1L_1L_2}$ на N_1 — (произвольный) гомеоморфизм;

2) для любой $x \in Л^n$ имеем

$$d_{E_1L_1L_2}(L_{jx}) = L_{jd_{E_1L_1L_2}(x)} \quad (j = 1, 2), \quad d_{E_1L_1L_2}(E_{1x}) = E_{1d_{E_1L_1L_2}(x)};$$

3) $d_{E_1L_1L_2}|_{U_1}$ есть движение из T, где

$$U_1 = \overline{E_1 \cap \bigcup_{x \in E_1^0} N_{1x}}, \quad E_1^0 = \partial\left(\bigcup_{E_{1x} \cap N_1 \neq \varnothing} E_{1x}\right).$$

(т. е. при условии $d_{E_1L_1L_2}(e) = e$ смещение $d_{E_1L_1L_2}$ тождественно на U_1, или $d_{E_1L_1L_2}|_{U_1} = \mathrm{id}_{U_1}$).

Лемма 3. *Если d есть смещение 2-го рода $d_{E_1L_1L_2}$ такое, что $d(e) = e$, то*

1) $d(E_1) = E_1$, $d(N_1) = N_1$, $d(E_1^0) = E_1^0$, $d(U_1) = U_1$, $d(S_1) = S_1$, *где* $S_1 = \partial\left(\bigcup_{N_{1x} \cap E_1^0 = \varnothing} N_{1x}\right)$;

2) *d сохраняет семейства* $\{E_{1x}^0\}$, $\{U_{1x}\}$, $\{S_{1x}\}$ *и семейство $(n-2)$-мерных q-плоскостей* $\{\pi_{1x}\}$, *где* $\pi_{1x} = S_{1x} \cap E_{1x}$;

3) *d сохраняет любое семейство q-прямых* $\{N_x\}$, *если только* $N_x \subset \pi_{1x}$, *т. е.* $d(N_x) = N_{d(x)}$ *для любой точки* $x \in Л^n$.

Доказательство. Утверждения 1, 2 очевидны. Докажем 3. Возьмем точку $x \in Л^n$ произвольно. Если $x \in U_1$ и так как $N_x \subset \pi_{1x} \subset U_1$ и $d|_{U_1} = \mathrm{id}_{U_1}$, то $d(N_x) = N_x$. Если $x \in E_1 \setminus U_1$, то $N_x = \pi_{1x} \cap \sigma_x$, где σ_x — двумерная q-плоскость, натянутая на L_{2x} и N_x. Но $\sigma_x \cap \pi_1$ — это q-прямая, T-параллельная N_x (а $|\sigma_x \cap \pi_1|$ параллельна H), сохраняемая при смещении d как лежащая в U_1. Так как d сохраняет семейство $\{L_{2z}: z \in Л^n\}$ в силу определения 2, то d сохраняет q-плоскость σ_x, точнее, $d(\sigma_x) = \sigma_x$.

Но тогда d сохраняет N_x, ибо $d(N_x)=d(\pi_{1x})\cap d(\sigma_x)=\pi_{1d(x)}\cap\sigma_x$ есть q-прямая, T-параллельная q-прямой N_x, т. е. прямая $N_{d(x)}$.

Пусть теперь $x\notin E_1$. Тогда $N_x=\pi_{1x}\cap\tau_x$, где τ_x — двумерная q-плоскость, натянутая на N_{1x} и N_x. Либо $N_{1x}\cap E_1\neq\varnothing$, либо $N_{1x}\cap E_1=\varnothing$. Если $N_{1x}\cap E_1\neq\varnothing$, то $\tau_x\cap E_1$ — это q-прямая, T-параллельная N_x, лежащая в E_1 и, следовательно, сохраняемая при смещении d, как было доказано выше. Но тогда из сохранения $\tau_x\cap E_1$ и сохранения семейства $\{N_{1z}\colon z\in Л^n\}$ при смещении d вытекает, что $d(\tau_x)$ — двумерная q-плоскость, T-параллельная τ_x. Но тогда $d(N_x)=d(\pi_{1x}\cap\tau_x)=\pi_{1d(x)}\cap d(\tau_x)$ есть q-прямая, T-параллельная N_x, или $d(N_x)=N_{d(x)}$. Наконец, в случае $N_{1x}\cap E_1=\varnothing$ имеем

$$N_x=\left(\bigcup_{y\in N_z}N_{2y}\right)\cap\pi_{1x},$$

где N_z такова, что $N_{1z}\cap E_1\neq\varnothing$ (здесь используется то, что N_2 — не орицикл). Поскольку, как только что было доказано, $d(N_z)=N_{d(z)}$, а также сохраняются семейства $\{N_{2y}\colon y\in Л^n\}$ и $\{\pi_{1y}\colon y\in Л^n\}$, сразу же заключаем, что $d(N_x)=N_{d(x)}$. Лемма 3 доказана.

Замечание. Утверждения 2, 3 леммы 3 остаются справедливыми и без условия $d(e)=e$.

(4.3). Пусть $f\colon Л^2\to Л^2$ — гомеоморфизм такой, что $f(N_{ix})=N_{if(x)}$ $(i=1,\,2)$ $f(e)=e$, где N_1, N_2 — две различные q-прямые, не являющиеся орициклами и проходящие через точку e.

Каждая N_i есть объединение двух q-лучей n_i и $L_i=(N_i\backslash n_i)\cup\{e\}$, из которых L_i — свободный луч (см. начало доказательства теоремы 1). Если $x\in n_i$, то $f(x)\in n_i$. В самом деле, пусть для определенности $x\in n_1$. Если $|N_{2x}|\cap|N_{1z}|\cap H$ — это точка ($|N_{2x}|$, $|N_{1z}|$ естественно продолжаются до прямой в $\mathbf{R}^2$), то $|N_{2f(x)}|\cap|N_{1f(z)}|\cap H$ — также точка, как это показано в лемме 1. Отсюда следует, что если бы $f(x)\in L_1$, то $N_{1f(z)}\cap N_2=\varnothing$. Последнее противоречит тому, что $N_{1z}\cap N_2\neq\varnothing$. Поэтому $f(x)\in n_1$.

Зная, как действует f на n_1, легко определить действие f на n_2. В этом смысле действия f на N_1, N_2 зависимы. Действительно, если $x\in n_1$, то $f\colon |N_{2x}|\cap H\to|N_{2f(x)}|\cap H$. Поэтому если $y\in n_2$ такова, что $|N_{1y}|\cap H=|N_{2x}|\cap H$, то $|N_{1f(y)}|\cap H=|N_{2f(x)}|\cap H$. Иными словами, последнее равенство определяет нахождение точки $f(y)$ на n_2, которое зависит от точки $f(x)$.

(4.4). Теорема 2. *Пусть $C=L_1\times L_2$, где L_1, L_2 — различные q-лучи, исходящие из точки e, порядок в $Л^2$ такой, что ∂C не содержит q-прямой. Тогда любой C-изотонный гомеоморфизм f может быть представлен в одном из двух видов:*

$$f=f_0\circ d_{N_1L_2L_1}\circ d_{N_2L_1L_2}\tag{2}$$

или

$$f=f_0\circ d_{N_2L_1}\circ d_{N_1L_2},\tag{3}$$

где f_0 — квазиаффинное преобразование. При этом смещения в (2), (3) *коммутируют. В* (2) *смещения 2-го рода не являются независимыми* (*см.* (4.3)), *и смещения в* (3) *совершенно произвольные.*

Доказательство. В силу гомеоморфности f обладает тем свойством, что ребра L_{1x}, L_{2x} q-конусов C_x отображает на ребра. Очевидно, существует q-аффинная биекция $f_0\colon Л^2\to Л^2$ такая, что $f_0^{-1}(f(L_{ix}))=L_{if_0^{-1}(f(x))}$ $(i=1,\,2)$, $(f_0^{-1}\circ f)(e)=e$. Поэтому если $g=f_0^{-1}\circ f$, то $g(e)=e$, $g(C_x)=C_{g(x)}$ и $g(L_{ix})=L_{ig(x)}$ $(i=1,\,2)$ для любой точки $x\in Л^2$. Осталось показать, что g можно представить в виде суперпозиции двух смещений одного и того же рода.

А. Предположим сначала, что N_1 — орицикл. Возьмем смещение $d_1 = d_{N_2L_1}$ так, чтобы

$$d_1|_{N_1} = g|_{N_1},\ d_1(e) = e.$$

Тогда $h_1 = d_1^{-1} \circ g$ обладает следующим свойством:

$$h_1|_{N_1} = \mathrm{id}_{N_1}, \tag{4}$$

т. е. тождественно на N_1. Поскольку d_1 сохраняет семейства прямых $\{N_{1x}\colon x \in Л^2\}$, $\{N_{2x}\colon x \in Л^2\}$, то h_1 будет C-изотонным гомеоморфизмом. Пусть теперь $d_2 = d_{N_1L_2}$ — такое смещение, что

$$d_2|_{N_2} = h_1|_{N_2},\ d_2(e) = e.$$

Тогда если $h_2 = d_2^{-1} \circ h_1$, то

$$h_2|_{N_2} = \mathrm{id}_{N_2}. \tag{5}$$

Но d_2 сохраняет семейства $\{N_{1x}\}$ и $\{N_{2x}\}$ и, более того, тождественно на N_1. Отсюда следует, что h_2 сохраняет семейства $\{N_{1x}\}$, $\{N_{2x}\}$ и в силу (4)

$$h_2|_{N_1} = \mathrm{id}_{N_1}. \tag{6}$$

Имея в виду (5), (6), мы можем применить к h_2 лемму 2. Получаем, что $h_2 = \mathrm{id}_{Л^2}$, т. е. $g = d_1 \circ d_2$ или $f = f_0 \circ d_1 \circ d_2$. Коммутирование d_1, d_2 очевидно.

Б. Пусть теперь q-прямые N_1, N_2 не являются орициклами. Тогда для g имеет место представление через смещения 2-го рода.

Действия смещений 1-го рода $d_{N_1L_2}$, $d_{N_2L_1}$ соответственно на N_1, N_2 совершенно независимы, чего нельзя сказать о g и смещениях 2-го рода $d_{N_1L_2L_1}$, $d_{N_2L_1L_2}$. Об этом изложено в п. (4.3). Пусть $d_1 = d_{N_1L_2L_1}$ — такое смещение, что

$$d_1|_{N_2} = g|_{N_2},\ d_1(e) = e.$$

Тогда $h_1 = d_1^{-1} \circ g$ обладает следующими свойствами:

$$h_1|_{N_2} = \mathrm{id}_{N_2} \tag{7}$$

и сохраняет семейство q-прямых $\{N_{1x}\}$, $\{N_{2x}\}$, т. е. является C-изотонным гомеоморфизмом. В силу отмеченной выше зависимости действий g и d_1 на n_1, n_2 получаем, что $d_1|_{n_1} = g|_{n_1}$ или

$$h_1|_{n_1} = \mathrm{id}_{n_1}. \tag{8}$$

Пусть теперь $d_2 = d_{N_2L_1L_2}$ таково, что

$$d_2|_{N_1} = h_1|_{N_1},\ d_2(e) = e. \tag{9}$$

Тогда из (8), (9) вытекает, что

$$d_2|_{n_1} = \mathrm{id}_{n_1},\ d_2|_{n_2} = \mathrm{id}_{n_2}. \tag{10}$$

Последнее справедливо опять-таки в силу зависимости действия d_2 на n_1 и n_2. Поскольку по определению 2 d_2 тождественно на $U_1 = N_2 \setminus n_2$, то из (10) следует

$$d_2|_{N_2} = \mathrm{id}_{N_2}. \tag{11}$$

В результате гомеоморфизм $h_2 = d_2^{-1} \circ h_1$, обладает такими свойствами: он сохраняет семейства $\{N_{1x}\}$, $\{N_{2x}\}$ и в силу (7), (9), (11)

$$h_2|_{N_1} = \mathrm{id}_{N_1},\ h_2|_{N_2} = \mathrm{id}_{N_2}.$$

Но тогда по лемме 2 получаем, что h_2 тождественно на $Л^2$, откуда $f = f_0 \circ d_1 \circ d_2$. Коммутирование d_1, d_2 очевидно. Теорема 2 доказана.

(4.4). Пусть в $Л^n$, $n \geqslant 2$, задан порядок $C = L_1 \times \ldots \times L_n$, причем $\operatorname{int} C \neq \varnothing$. Здесь L_i $(i = 1, \ldots, n)$ — q-лучи, исходящие из точки e. Как и ранее, через N_i обозначаем q-прямую, содержащую q-луч L_i, и через E_i — q-гиперплоскость, натянутую на $N_1, \ldots, N_{i-1}, N_{i+1}, \ldots, N_n$.

Лемма 4. *Пусть f: $Л^n \to Л^n$, $n \geqslant 3$,— гомеоморфизм такой, что $f(N_{ix}) = N_{if(x)}$ $(i = 1, \ldots, n)$, а q-прямые $N_1, \ldots, N_n$ находятся в общем положении и не являются орициклами. Тогда f квазиаффинно.*

Доказательство. При $n = 3$ рассмотрим на q-плоскости E_1 три семейства q-прямых $\{N_{2x}\}$, $\{N_{3x}\}$ и $\{E_1 \cap S_{1x}\}$. Отображение f при предположении $f(e) = e$, не ограничивающем общности, имеет свойство $f(E_1) = E_1$ и сохраняет указанные семейства q-прямых. Тогда по лемме 1 f квазиаффинно на E_1, а значит, на N_2 и N_3. Из симметрии q-прямых N_1, N_2, N_3 в нашем исследовании заключаем, что f q-аффинно и на N_1. Найдется q-аффинное преобразование f_0 такое, что $f_0|_{N_i} = f|_{N_i}$ $(i = 1, 2, 3)$. Поэтому если $g = f_0^{-1} \circ f$, то $g|_{N_i} = \mathrm{id}_{N_i}$ $(i = 1, 2, 3)$. По лемме 2 в этом случае g тождественно на $Л^3$, т. е. $f = f_0$. Случай $n = 3$ доказан.

В общем случае легко убедиться в q-аффинности f на каждой q-прямой N_i, ибо каждую такую прямую можно включить в 3-мерную q-плоскость σ, натянутую на три q-прямые N_i, N_j, N_k. Поскольку изучение $|\sigma|$ не отличается (см. (2.3)) в интересующем нас направлении от изучения $|Л^3|$, то убеждаемся, как и выше, что f q-аффинно на σ, а значит, и на N_i. Дальше рассуждаем так же, как и в случае $n = 3$. Лемма 4 доказана.

Теорема 3. *Пусть f: $Л^n \to Л^n$ $(n \geqslant 3)$ — C-изотонный гомеоморфизм, где $C = L_1 \times \ldots \times L_n$ и ∂C не содержит q-прямой, тогда*

1) *если все N_i $(i = 1, \ldots, n)$ не являются орициклами, то f квазиаффинно;*

2) *если только N_1, N_2 — не орициклы, то*

$$f = f_0 \circ d_{E_1 L_1 L_2} \circ d_{E_2 L_2 L_1} \circ d_{E_3 L_3} \circ \ldots \circ d_{E_n L_n}; \tag{12}$$

3) *если $N_1, \ldots, N_k$ $(k \geqslant 3)$ — не орициклы, а $N_{k+1}, \ldots, N_n$ — орициклы, то*

$$f = f_0 \circ d_{E_{k+1} L_{k+1}} \circ \ldots \circ d_{E_n L_n}; \tag{13}$$

4) *если только N_1 — не орицикл, то*

$$f = f_0 \circ d_{E_1 L_1} \circ \ldots \circ d_{E_n L_n}. \tag{14}$$

Здесь f_0 — квазиаффинное преобразование, все смещения в (12)—(14) коммутируют. При этом допустимы любые смещения 1-го рода, а для смещений 2-го рода следует учесть замечание п. (4.3).

Доказательство. Отображение f отображает каждое семейство $\{N_{ix}\}$ на некоторое семейство $\{N_{jx}\}$. В самом деле, каждая N_{ix} есть пересечение q-касательных к C_x q-плоскостей $E_{1x}, \ldots, E_{i-1,x}, E_{i+1,x}, \ldots \ldots, E_{nx}$. Поскольку f отображает q-касательные q-плоскости на такие же (см. доказательство теоремы 1), то сразу заключаем $f(N_{ix}) = N_{jf(x)}$ при любой точке $x \in Л^n$.

Найдется квазиаффинная биекция f_0: $Л^n \to Л^n$ такая, что если $g = f_0^{-1} \circ f$, то

$$g(N_{ix}) = N_{ig(x)} \quad (i = 1, \ldots, n), \quad g(e) = e.$$

Случай 1. Согласно лемме 4 отображение g квазиаффинно, поэтому таково и f.

Случай 2. Пусть $d_1 = d_{E_1 L_1 L_2}$ — смещение, обладающее свойством

$$d_1|_{N_1} = g|_{N_1}.$$

Тогда $h_1 = d_1^{-1} \circ g$ тождественно на N_1, и в силу зависимости действий g

и d_1 на N_1, N_2 получаем, что

$$h_1|_{n_2} = \mathrm{id}_{n_2}, \tag{15}$$

где мы воспользовались обозначениями доказательства теоремы 2. В соответствии с леммой 3 и определением 2 смещение d_1 сохраняет семейства q-прямых* $\{N_{ix}\}$ $(i=1, \ldots, n)$. Поэтому их сохраняет и h_1, т. е. h_1 — C-изотонный гомеоморфизм. Пусть $d_2 = d_{E_2L_2L_1}$ — смещение такое, что

$$d_2|_{N_2} = h_1|_{N_2}. \tag{16}$$

Тогда в силу определения 2 и леммы 3 смещение d_2 также C-изотонно и сохраняет семейства $\{N_{ix}\}$ $(i=1, \ldots, n)$, кроме того, в силу зависимости действия d_2 на N_1, N_2 получаем из (15), (16)

$$d_2|_{n_1} = \mathrm{id}_{n_1}.$$

Так как d_2 тождественно на $U_2 \supset N_1 \backslash n_1$, то d_2 тождественно на N_1. Поэтому если $h_2 = d_2^{-1} \circ h_1$, то

$$h_2|_{N_2} = \mathrm{id}_{N_2},\ h_2|_{N_1} = \mathrm{id}_{N_1}.$$

Более того, h_2 сохраняет семейства $\{N_{ix}\}$ $(i=1, \ldots, n)$. Возьмем смещение $d_3 = d_{E_3L_3}$ так, что

$$d_3|_{N_3} = h_2|_{N_3}.$$

Тогда из определения 1 следует, что если $h_3 = d_3^{-1} \circ h_2$, то h_3 сохраняет семейства $\{N_{ix}\}$ $(i=1, \ldots, n)$ и

$$h_3|_{N_j} = \mathrm{id}_{N_j} \quad (j=1, 2, 3).$$

Продолжая этот процесс, на $(n-2)$-м шаге возьмем смещение $d_n = d_{E_nL_n}$ такое, что

$$d_n|_{N_n} = h_{n-1}|_{N_n}.$$

И тогда для $h_n = d_n^{-1} \circ h_{n-1}$ на основании определения 1

$$h_n|_{N_j} = \mathrm{id}_{N_j} \quad (j=1, 2, \ldots, n).$$

В силу леммы 2 получаем $h_n = \mathrm{id}_{Л^n}$, т. е. для f имеем формулу (12).

Случай 3. Пусть σ — квазиплоскость, натянутая на $N_1, \ldots, N_k$. Тогда $g(\sigma) = \sigma$ в силу гомеоморфности g, а ввиду леммы 4 отображение g квазиаффинно на σ. Пусть теперь f_1 — квазиаффинное отображение, совпадающее с g на σ и сохраняющее семейства $\{N_{ix}\}$ $(i=1, \ldots, n)$. Тогда $h = f_1^{-1} \circ g$ тождественно на σ и сохраняет семейства $\{N_{ix}\}$ $(i=1, \ldots, n)$. Пусть $d_1 = d_{E_{k+1}L_{k+1}}$ — смещение такое, что

$$d_1|_{N_{k+1}} = h|_{N_{k+1}}.$$

Тогда если $h_1 = d_1^{-1} \circ h$, то h_1 сохраняет семейства $\{N_{ix}\}$ $(i=1, \ldots, n)$ и

$$h_1|_{N_j} = \mathrm{id}_{N_j} \ (j=1, \ldots, k+1)$$

в силу определения 1. Берем тогда $d_2 = d_{E_{k+2}L_{k+2}}$ так, что

$$d_2|_{N_{k+2}} = h_1|_{N_{k+2}},$$

и рассматриваем $h_2 = d_2^{-1} \circ h_1$. Отображение h_2 сохраняет семейства $\{N_{ix}\}$ $(i=1, \ldots, n)$ и

$$h_2|_{N_j} = \mathrm{id}_{N_j} \ (j=1, \ldots, k+2)$$

в силу определения 1. Наконец, на $(n-k)$-м шаге вводим смещение

$d_{n-k} = d_{E_n L_n}$ так, что

$$d_{n-k}\,|_{N_n} = h_{n-k-1}\,|_{N_n}.$$

Тогда если $h_{n-k} = d_{n-k}^{-1} \circ h_{n-k-1}$, то h_{n-k} сохраняет семейства $\{N_{i\alpha}\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ и

$$h_{n-k}\,|_{N_j} = \mathrm{id}_{N_j} \ (j = 1, \ldots, n).$$

По лемме 2 h_{n-k} тождественно на $Л^n$, следовательно, для f имеет место формула (13).

Случай 4. Берем $d_1 = d_{E_1 L_1}$ так, что

$$d_1\,|_{N_1} = g\,|_{N_1}.$$

Тогда если $h_1 = d_1^{-1} \circ g$, то h_1 тождественно на N_1 и сохраняет семейства $\{N_{i\alpha}\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ в силу определения 1. Берем $d_2 = d_{E_2 L_2}$ так, что

$$d_2\,|_{N_2} = h_1\,|_{N_2}$$

и т. д. На n-м шаге берем $d_n = d_{E_n L_n}$ так, что

$$d_n\,|_{N_n} = h_{n-1}\,|_{N_n}.$$

Тогда $h_n = d_n^{-1} \circ h_{n-1}$ сохраняет семейства $\{N_{i\alpha}\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ и тождественно на каждой q-прямой $N_1, \ldots, N_n$. По лемме 2 h_n тождественно на $Л^n$. Поэтому для f имеем формулу (14). Теорема 3 доказана.

(4.5). Рассмотрим теперь порядок $C = L_1 \times \ldots \times L_k \times K$ в $Л^n$, $n \geqslant 4$, причем $\operatorname{int} C \neq \varnothing$. Здесь L_j — различные q-лучи, исходящие из точки e, и K — $(n-k)$-мерный квазиконус с вершиной e. Обозначим через E_i $(i = 1, \ldots, n)$ q-гиперплоскость, натянутую на $L_1, \ldots, L_{i-1}, L_{i+1}, \ldots, L_n, K$.

Теорема 4. *Пусть $C = L_1 \times \ldots \times L_k \times K$, где $K \neq L \times K_1$, L — q-луч, K_1 — q-конус, $\dim K \geqslant 3$ — порядок в $Л^n$, $n \geqslant 4$, причем ∂C не содержит q-прямой, и $f\colon Л^n \to Л^n$ — C-изотонный гомеоморфизм. В случае когда q-конус K лежит в орисфере,*

1) *если только N_1 — не орицикл, то*

$$f = f_0 \circ d_{E_1 L_1} \circ \ldots \circ d_{E_k L_k}; \tag{17}$$

2) *если только N_1, N_2 — не орициклы, то*

$$f = f_0 \circ d_{E_1 L_1 L_2} \circ d_{E_2 L_2 L_1} \circ d_{E_3 L_3} \circ \ldots \circ d_{E_k L_k}; \tag{18}$$

3) *если $N_1, \ldots, N_t$ $(t \geqslant 3)$ — не орициклы, а $N_{t+1}, \ldots, N_k$ — орициклы, то*

$$f = f_0 \circ d_{E_{t+1} L_{t+1}} \circ \ldots \circ d_{E_k L_k}; \tag{19}$$

4) *если все N_i $(i = 1, \ldots, k,\ k \geqslant 3)$ — не орициклы, то f квазиаффинно.*

В случае когда K не лежит в орисфере,

5) *если все N_i $(i = 1, \ldots, k)$ — орициклы, то*

$$f = f_0 \circ d_{E_1 L_1} \circ \ldots \circ d_{E_k L_k}; \tag{20}$$

6) *если $N_1, \ldots, N_t$ $(t \geqslant 1)$ — не орициклы, а $N_{t+1}, \ldots, N_k$ — орициклы, то*

$$f = f_0 \circ d_{E_{t+1} L_{t+1}} \circ \ldots \circ d_{E_k L_k}; \tag{21}$$

7) *если все N_i $(i = 1, \ldots, k)$ — не орициклы, то f квазиаффинно. Здесь везде f_0 — некоторое квазиаффинное преобразование и смещения, стоящие в (17)—(21), все коммутируют. Смещения 1-го рода допусти-*

мы любые, а для смещений 2-го рода следует учесть замечание п. (4.3).

Доказательство. Так как f — гомеоморфизм, то можно считать, что C замкнуто. Каждая N_i, содержащая L_i, служит пересечением q-касательных к C q-плоскостей. При отображении f, как мы знаем, q-касательные q-плоскости переходят в q-касательные. Поэтому $f(N_i)$ будет некоторой $N_{jf(e)}$. Квазиплоскость $E = \bigcap_{i=1}^{k} E_i$, натянутая на q-конус K, отображается в q-плоскость $E_{f(e)} = \bigcap_{i=1}^{k} E_{if(e)}$, так как $f(E_i) = E_{jf(e)}$ в силу того, что E_i q-касательны к C. Примем без ограничения общности $f(e) = e$. Тогда $f(E) = E$ и f сохраняет семейство q-конусов $\{K_x\colon x \in E\}$. Так как $K \neq L \times K_1$, то f квазиаффинно на E на основании теоремы 1, если E не лежит в орисфере, и на основании теоремы 3 из [1], если E лежит в орисфере.

Возьмем q-аффинную биекцию f_0 так, что $f_0(e) = e$, $f_0(L_i) = f(L_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$, $f_0(K) = f(K)$ и f_0 совпадает с f на E. Тогда $g = f_0^{-1} \circ f$ обладает свойствами

$$g(C) = C,\ g(L_i) = L_i \quad (i = 1, \ldots, k),\ g|_E = \mathrm{id}_E.$$

А. Предположим теперь, что E — орисфера.

Случай 1. Берем $d_1 = d_{E_1 L_1}$ так, что d_1 совпадает с g на N_1. Тогда $h_1 = d_1^{-1} \circ g$ сохраняет порядок C и тождественно на N_1, E. Возьмем $d_2 = d_{E_2 L_2}$ так, что d_2 совпадает с h_1 на N_2. Тогда $h_2 = d_2^{-1} \circ h_1$ сохраняет порядок C и тождественно на N_1, N_2, E и т. д. На k-м шаге будем иметь $d_k = d_{E_k L_k}$, совпадающее с h_{k-1} на N_k, причем

$$h_{k-1}|_{N_j} = \mathrm{id}_{N_j} \ (j = 1, \ldots, k-1),\ h_{k-1}|_E = \mathrm{id}_E.$$

Следовательно $h_k = d_k^{-1} \circ h_{k-1}$ будет сохранять $\{N_{jx}\colon x \in Л^n\}$ $(j = 1, \ldots, k)$, $\{E_x\colon x \in Л^n\}$ и

$$h_k|_{N_j} = \mathrm{id}_{N_j} \quad (j = 1, \ldots, k),\ h_k|_E = \mathrm{id}_E.$$

Отсюда легко заключить, что h_k тождественно на $Л^n$. Для этого достаточно повторить рассуждения, проделанные в конце доказательства теоремы 1. Поскольку h_k тождественно на $Л^n$, то f имеет вид (17).

Доказательство случаев 2—4 есть повторение, по существу, доказательств случаев 1—4 теоремы 3. Поэтому мы их опускаем.

Б. Предположим теперь, что K не лежит в орисфере или что E — не орисфера.

Случай 5. Пусть $d_1 = d_{E_1 L_1}$ такое, что d_1 совпадает с g на N_1, тогда $h_1 = d_1^{-1} \circ g$ тождественно на N_1, E, а также по-прежнему C-изотонно. Дальше повторяем доказательство случая 1. Перейдем к случаям 6, 7.

Пусть N_1 не является орициклом. Обозначим через Σ квазиплоскость, натянутую на N_1, E. Очевидно, что $g(\Sigma) = \Sigma$. Ограничение g на Σ обозначим через g_1. Отображение g_1 сохраняет на Σ семейство q-конусов $\{Q_x\colon x \in \Sigma\}$, где $Q = L_1 \times K$. Так же, как в теореме 1, доказывается, что q-касательные к Q_x, $x \in \Sigma$, квазиплоскости отображаются g_1 на q-касательные. Покажем, что существует семейство $\{\lambda_x\colon x \in \Sigma\}$ q-прямых (где $\lambda \equiv \lambda_e \subset \partial K \cup \partial K^-$, $K^- = \left\{y \in E\colon y \underset{K}{\leqslant} e\right\}$, а $\underset{K}{\leqslant}$ — порядок, задаваемый q-конусом K в E), сохраняемое отображением g_1.

Действительно, возьмем q-луч $\Lambda \subset \partial K$ с началом e так, что содержащая его q-прямая λ не является орициклом и вдоль Λ q-конус Q имеет q-касательную q-плоскость Σ_1, не лежащую в E. Если $\Sigma_1 \cap K = \Lambda$, то $\{\lambda_x\colon x \in \Sigma\}$ — искомое семейство. В самом деле, в этом случае при $x \in \Sigma_1$ имеем $K_x \cap \Sigma_1 = \Lambda_x$.

Но g_1 сохраняет $\{K_x\colon x\in\Sigma\}$ и $g_1(\Sigma_1)=\Sigma_1$ в силу тождественности g_1 на E и того, что g_1 q-касательные к Q_y квазиплоскости отображает на q-касательные. Поэтому Λ и Λ_x, $x\in\Sigma_1$, останутся T-параллельными после отображения, точнее, $g_1(\lambda_x)=\lambda_{g_1(x)}$, ибо $g_1(\lambda)=\lambda$. Если же $x\notin\Sigma_1$, то $x\in\Sigma_{1z}$ для некоторого $z\in E$. Но тогда $g_1(\Sigma_{1z})=\Sigma_{1g_1(z)}$, поскольку $g_1(\Sigma_1)=\Sigma_1$ и T-параллельные q-касательные квазиплоскости отображаются на T-параллельные, и, следовательно,

$$g_1(\Lambda_x)=g_1(K_x\cap\Sigma_{1z})=g_1(K_x)\cap g_1(\Sigma_{1z})=$$
$$=K_{g_1(x)}\cap\Sigma_{1g_1(z)}=K_{g_1(x)}\cap\Sigma_{1z}=\Lambda_{g_1(x)},$$

ибо $g_1(z)=z$, $g_1(x)\in\Sigma_{1z}$, т. е. $g_1(\lambda_x)=\lambda_{g_1(x)}$.

Допустим теперь, что $K\cap\Sigma_1=K_1$ — q-выпуклый q-конус, не сводящийся к q-лучу. В этом случае рассмотрим на Σ_1 семейство q-конусов $\{Q_{1x}\colon x\in\Sigma_1\}$, где $Q_1=L_1\times K_1$. Ограничение g_1 на Σ_1 обозначим через g_2. Тогда $g_2(\Sigma_1)=\Sigma_1$. Очевидным образом K_1 не лежит в орисфере.

Следовательно, рассмотрение $g_2\colon\Sigma_1\to\Sigma_1$, сохраняющего $\{Q_{1x}\colon x\in\in\Sigma_1\}$ на предмет выделения сохраняющегося семейства образующих, ничем не отличается от такой же задачи, которую мы начали решать по отношению к $g_1\colon\Sigma\to\Sigma$ с сохранением $\{Q_x\colon x\in\Sigma\}$. Другими словами, случай «$K\cap\Sigma_1$ не есть q-луч» вынудил нас рассматривать ту же задачу, но в q-плоскости меньшей размерности. Поэтому можно повторить рассуждения, уже проделанные выше. В результате будут введены q-касательная к Q_1 квазиплоскость Σ_2, не лежащая в E, сохраняемая g_2, и q-луч $\Lambda_1\subset\partial K_1$ такой, что содержащая его q-прямая λ_1 не является орициклом и Σ_2 q-касается K_1 вдоль Λ_1. Если $K_1\cap\Sigma_2=\Lambda_1$, то семейство $\{\lambda_{1x}\colon x\in\Sigma\}$ будет искомым сохраняющимся при отображении g_1 семейством q-прямых. Здесь используется при переходе от $\{\lambda_{1x}\colon x\in\Sigma_1\}$ к $\{\lambda_{1x}\colon x\in\Sigma\}$ то, что g_1 тождественно на E, а g_2 — на $E\cap\Sigma_1$. Однако если $K_1\cap\Sigma_2=K_2$ — q-выпуклый q-конус, не сводящийся к q-лучу, то следует вновь понизить размерность, т. е. рассмотреть g_3-ограничение g_2 на Σ_2, которое обладает свойствами $g_3(\Sigma_2)=\Sigma_2$, $g_3(Q_{2x})=Q_{2g_3(x)}$ при $x\in\Sigma_2$, где $Q_2=L_1\times K_2$. В результате либо будет выделено требуемое семейство сохраняемых q-прямых, либо дойдем до $g_{m+1}\colon\Sigma_m\to\Sigma_m$, $\dim\Sigma_m=3$, g_{m+1} сохраняет семейство g-конусов $\{Q_{mx}\colon x\in\Sigma_m\}$, где $Q_m=$ $=L_1\times K_m$, $\dim K_m=2$. В таком случае берем в качестве искомого q-луча какую-нибудь из образующих q-конуса ∂K_m (см. начало доказательства теоремы 2).

Итак, существует семейство q-прямых $\{\lambda_x\colon x\in\Sigma\}$, сохраняемое отображением $g_1\colon\Sigma\to\Sigma$, причем λ — не орицикл. Теперь уже очевидно, так как $K\neq L\times\tilde K$, что таких различных семейств можно взять два: $\{\lambda_x\colon x\in\Sigma\}$, $\{\tilde\lambda_x\colon x\in\Sigma\}$, $e\in\lambda\cap\tilde\lambda$, $\lambda\cap\tilde\lambda=\{e\}$; λ, $\tilde\lambda$ — не орициклы, $\lambda,\tilde\lambda\subset\partial K\cup\partial K^-$ и $g_1(\lambda_x)=\lambda_{g_1(x)}$, $g_1(\tilde\lambda_x)=\tilde\lambda_{g_1(x)}$ при $x\in\Sigma$.

Натянем на N_1, λ, $\tilde\lambda$ квазиплоскость σ. Очевидно, $g_1(\sigma)=\sigma$. Тогда по лемме 4 g_1 будет квазиаффинным на σ. Но поскольку g_1 тождественно на λ, $\tilde\lambda$, то в силу зависимости действия g_1 на λ, $\tilde\lambda$, N_1 отображение g_1 будет тождественно на n_1. Отсюда благодаря аффинности g_1 на N_1 получаем, что g_1 тождественно на N_1 или g тождественно на N_1.

Вывод таков: g тождественно на каждой q-прямой N_j, не являющейся орициклом. Поэтому следует ввести q-плоскость $\tilde E$, натянутую на E, и те q-прямые $N_1,\ldots,N_t$ $(t\geqslant 1)$, которые не являются орициклами. Тогда g тождественно на $\tilde E$, и остается произвести смещения $d_{E_j L}$ $(j>t)$ вдоль оставшихся q-прямых $N_{t+1},\ldots,N_k$. В случае 7 этого делать не придется, и в случае 6 повторяются стандартные рассуждения (см. случай 1). Теорема 4 доказана.

§ 5. Случай $C \neq L \times K$, $\overline{C} = L \times K$

Считаем, что ∂C не содержит q-прямой, $\operatorname{int} C \neq \varnothing$.

(5.1). На плоскости Лобачевского рассмотрим порядок, задаваемый q-конусом C таким, что $\overline{C} = L_1 \times L_2$. Тогда C получается из $\overline{C}$ вычитанием одного или сразу двух ребер. В таком случае, как легко видеть, любой C-изотонный гомеоморфизм вычисляется по формулам (2), (3).

(5.2). Пусть C — квазиконус, задающий порядок в пространстве Лобачевского Л^3, и $\overline{C} = L_1 \times L_2 \times L_3$. Тогда C получается из $\overline{C}$ удалением ребер, граней или части внутренности граней. В первых двух случаях C-изотонный гомеоморфизм f описывается теоремой 3, т. е. он имеет один из следующих видов:

1) квазиаффинен, если N_1, N_2, N_3 не являются орициклами;

2) $f_0 \circ d_{E_1L_1} \circ d_{E_2L_2} \circ d_{E_3L_3}$, если только одна из q-прямых N_i — не орицикл;

3) $f_0 \circ d_{E_1L_1L_2} \circ d_{E_2L_2L_1} \circ d_{E_3L_3}$, если N_1, N_2 — не орициклы, а N_3 — орицикл. Здесь f_0 — квазиаффинное преобразование.

Если удалена часть внутренности одной грани, то

4) f квазиаффиннен, если N_1, N_2 — не орициклы, N_3 — орицикл, удалена часть грани $L_1 \times L_3$ или $L_2 \times L_3$;

5) $f_0 \circ d_{E_3L_3}$, если N_1, N_2 — не орициклы, N_3 — орицикл, удалена часть грани $L_1 \times L_2$;

6) $f_0 \circ d_{E_1L_1}$, если N_1 — не орицикл, N_2, N_3 — орициклы, удалена часть грани $L_2 \times L_3$;

7) $f_0 \circ d_{E_2L_2}$, если N_1 — не орицикл, N_2, N_3 — орициклы, удалена часть грани $L_1 \times L_3$.

8) если удалена часть внутренности двух граней, то f квазиаффиннен.

Утверждения 4—8 тривиальны, так как в случае удаления части внутренности грани оставшаяся часть есть q-конус, у которого f будет сохранять образующие границы. Следовательно, в грани кроме ребер появляется еще одна сохраняемая f q-прямая. Остается применить лемму 1 или ее евклидов аналог.

(5.3). Рассмотренные выше случаи размерности $n = 2$, 3 подсказывают, что будет происходить в n-мерном пространстве. Так как $\overline{C} = L \times K$, то любой C-изотонный гомеоморфизм, будучи $\overline{C}$-изотонным, описывается теоремами 3, 4. С учетом того, что f — C-изотонный гомеоморфизм, приходим к выводу: смещения, стоящие в формулах (12)—(14), (17)—(21), не могут быть произвольными, а только квазиаффинными по причинам, указанным в конце п. (5.2).

При этом форма (12)—(14), (17)—(21) отображения f сохранится, если C получается из $\overline{C}$ удалением целых ребер или граней грани и т. д. В случае когда удаляется лишь часть внутренности грани (часть внутренности грани некоторой грани большей размерности), в соответствующих формулах для f смещения будут сводиться к квазиаффинным преобразованиям. Если удаляются части внутренности граней, лежащих в орисферах, то это утверждение вытекает из теоремы 6 [1]. При удалении части внутренности граней, не лежащих в орисферах, может появиться дополнительное к ребрам $L_1, \ldots, L_k$ семейство сохраняющихся q-прямых $\{N_x\colon x \in \text{Л}^n\}$ такое, что N не является орициклом. Следовательно, если среди $N_1, \ldots, N_k$ было только два не орицикла — N_1, N_2, то станет три. Тогда по лемме 1 f будет q-аффинно на N_1, N_2 и в (12), (18) исчезнут смещения 2-го рода. Если только q-прямая N_1 была не орициклом, а остальные $N_2, \ldots, N_k$ — орициклы, то в сохраняющейся q-плоскости σ, натянутой на N_1, N, будут три семейства сохраняющихся q-прямых: $\{N_{1x}\}$, $\{N_x\}$ и $\{\sigma_x \cap E_{1x}\}$. Иными словами, f q-аффинно на σ, т. е. на N_1. Поэтому в (14), (17) смещение $d_{E_1L_1}$ исчезнет, но при этом не появится смещений 2-го рода, как можно было подумать, видя появление двух сохраняющихся q-прямых N_1, N, не являющихся орициклами.

Конкретный вид C-изотонного гомеоморфизма f определяется при точном описании того, как C получается из $\bar{C}$.

§ 6. Теорема о квазиконтингенции

Предположим, что инвариантный порядок P в Л^n, $n \geqslant 2$, есть множество, удовлетворяющее условию:

А. Существует такая окрестность точки e, что в ней пересечение $\bar{P} \cap \bar{P}^-$ не содержит точек, кроме e, где $P^- = \{x \in \text{Л}^n: x \leqslant e\}$.

Покажем, что P-изотонный гомеоморфизм обязательно C-изотонен, C — порядок, задаваемый квазиконусом.

(6.1). *Квазиконтингенцией* (*q-контингенцией*) множества $M \subset \text{Л}^n$ в точке a называется q-конус, образованный всевозможными пределами q-лучей, исходящих из a и проходящих через $x \in M$, $x \neq a$, при $x \to a$. Обозначим квазиконтингенцию через $\text{qc}(M, a)$. Если точка a не является предельной для M, то по определению будем считать $\text{qc}(M, a) = \{a\}$. Нетрудно проверить, что q-контингенция — замкнутый q-конус и $\text{qc}(M, a) = \text{qc}(\bar{M}, a)$.

Пусть на Л^n задан порядок P. Назовем *направленной кривой*, исходящей из точки x, образ полуоси $[0, +\infty) \subset \mathbf{R}$ при непрерывном и монотонном отображении ее Л^n, при котором 0 отображается в x. Очевидно, любая направленная кривая, исходящая из x, содержится в P_x.

Теорема 5. *Пусть P задает порядок в* Л^n *и $C = \text{qc}(P, e)$. Тогда*

1) *$C \subset \bar{P}$ и C — замкнутый q-выпуклый q-конус;*

2) *если P — замкнутое множество и P удовлетворяет условию* А, *то граница ∂C не содержит q-прямых и C совпадает с объединением F всех направленных кривых, исходящих из точки e.*

Доказательство. q-Лучом q-контингенции C будем называть q-луч, исходящий из e и содержащийся в C. Случай $e \notin \overline{P \backslash \{e\}}$ тривиален. Считаем, далее, что e — предельная точка для P. Проводимое ниже доказательство становится наглядным, если воспользоваться моделью Пуанкаре.

1. Пусть L — q-луч q-контингенции C. Существуют q-лучи $L_n = l^+(e, x_n)$, $x_n \in P$, исходящие из e, проходящие через x_n, такие, что $L = \lim L_n$ при $x_n \to e$. Вместе с точкой x_n q-луч L_n содержит все точки вида $x_{nk} = \underbrace{t_n \circ \ldots \circ t_n}_{k}(e)$, где $t_n \in T$ — движение, переводящее e в x_n.

При $x_n \to e$ точки x_{nk} сгущаются на q-лучах L_n и их пределы образуют q-луч L. Но все $x_{nk} \in P$ и, следовательно, $L \subset \bar{P}$. Значит, $C \subset \bar{P}$. Как было изложено выше, C — тривиальным образом замкнутое множество. Покажем q-выпуклость. Пусть L_1, L_2 — два q-луча из C. По доказанному $L_1, L_2 \subset \bar{P}$. Так как $\bar{P}$ задает порядок в Л^n, то $L_{1x} \subset \bar{P}$ для любой точки $x \in L_2$. Множество

$$\bigcup_{x \in L_2} L_{1x} \subset \bar{P},$$

как легко увидеть на модели Пуанкаре, будет содержать q-отрезок $[x_1, x_2]$ для любых двух точек $x_1 \in L_1$ и $x_2 \in L_2$. В силу произвольности q-лучей L_1, L_2 и точек x_1, x_2 убеждаемся в q-выпуклости множества C.

2. Пусть P замкнуто и удовлетворяет условию А. Если бы ∂C содержало q-прямую, то ввиду q-выпуклости и замкнутости C $\partial C \cap \partial C^-$ тоже содержало бы q-прямую. Но $\partial C \subset P$ и $\partial C^- \subset P^-$. Следовательно, $P \cap P^-$ содержало бы q-прямую. Последнее противоречит условию А. Итак, ∂C не содержит q-прямой, стало быть C имеет в точке e строго

опорную q-плоскость (т. е. $|C|$ в модели Пуанкаре имеет строго опорную евклидову плоскость в пересечении с $\{x_1>0\}$).

Покажем теперь, что $F\subset C$. Предположим противное, т. е. что существует точка $a\in F$, но $a\notin C$. Пусть L — дуга направленной кривой, выходящей из e и проходящей через a. Квазиконус C можно заключить в q-конус K с вершиной e, являющийся замкнутым q-выпуклым с границей ∂K, не содержащей q-прямых. Причем $a\notin K$. Возьмем в точке e строго опорную q-плоскость Q, отделяющую K от точки a. Так как $C\backslash\{e\}$ лежит внутри K, то из определения q-контингенции следует, что существует окрестность U точки e, для которой $P\cap U\subset K$. Поэтому некоторый начальный отрезок дуги L содержится в K. Отсюда заключаем, что L пересекает Q. Пусть b — последняя (в смысле порядка на L) точка дуги L, в которой L пересекает Q. Пусть L' — часть L, заключенная между b и a. Очевидно, что $L'\subset P_b$. Так как $P_b\cap U_b\subset K_b$, то некоторый начальный отрезок дуги L' содержится в K_b. Квазиплоскость Q будет строго опорной для K_b, ибо $b\in Q$, и при передвижении $e\to b$ движением из группы T Q переходит в Q. Поэтому дуга L' на начальном отрезке будет отделена от точки a, и, следовательно, дуга L' пересекает Q в точке, отличной от b. Последнее противоречит условию, по которому выбиралась эта точка b.

Итак, $F\subset C$. Так как всякий q-луч из C является направленной кривой, то $C\subset F$. Таким образом, $C=F$. Теорема 5 доказана.

(6.2). Теорема 6. *Пусть* $f\colon Л^n\to Л^n$, $n\geqslant 2$,— *изотонное гомеоморфное отображение. Тогда*

1) *для всякой* $x\in Л^n$ *имеем* $f(\bar{P}_x)=\bar{P}_{f(x)}$;

2) *если* P *удовлетворяет условию* А, *то* $f(C_x)=C_{f(x)}$, *где* C — *квазиконтингенция множества* $\bar{P}$ *в точке* e, *т. е.* $C=\mathrm{qc}(P, e)$.

Доказательство. Утверждение 1 очевидно. Согласно теореме 5 квазиконтингенция C совпадает с объединением $\bar{F}$ всех направленных кривых в порядке, задаваемом множеством $\bar{P}$. Так как $f(\bar{P}_x)=\bar{P}_{f(x)}$, то в силу гомеоморфности f сопоставляет направленным кривым в (порядке $\bar{P}$) такие же кривые. Следовательно, $f(\bar{F}_x)=\bar{F}_{f(x)}$. Но $C_x=\bar{F}_x$. Поэтому $f(C_x)=C_{f(x)}$. Теорема 6 доказана.

(6.3). Непосредственным примером того, как могут использоваться теоремы 5, 6, является следующая

Теорема 7. *Если* P — *порядок* $Л^n$, $n\geqslant 3$,— *удовлетворяет условию* А, *а квазиконтингенция* $\mathrm{qc}(P, e)\neq L\times K$, $\mathrm{int}\,\mathrm{qc}(P, e)\neq\varnothing$, *то любое изотонное гомеоморфное отображение* f *квазиаффинно.*

Доказательство. Согласно теореме 6 $f(C_x)=C_{f(x)}$, где $C=\mathrm{qc}(P, e)$, для любой точки $x\in Л^n$. По теореме 5 C не содержит q-прямых, $C\neq L\times K$, поэтому по теореме 1 f квазиаффинно. Теорема 7 доказана.

(6.4). Замечание. Как следует из работы [3], сходство в описании изотонных гомеоморфизмов в евклидовом и гиперболическом пространствах обязано общему свойству алгебр Ли абелевой группы и группы движений T, рассматриваемой в статье. Поэтому результаты статьи, а также результаты А. Д. Александрова [1], могут быть изложены на едином языке теории упорядоченных групп Ли.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Отображение упорядоченных пространств. I.— Тр. МИАН СССР им. В. А. Стеклова, 1972, т. 128, с. 3—21.
2. *Гуц А. К.* Отображения упорядоченного пространства Лобачевского.— Докл. АН СССР, 1974, т. 215, № 1, с. 35—37.
3. *Hofmann K., Lawson J.* The local theory of semigroups in nilpotent Lie groups.— Semigroup Forum, 1981, v. 23, p. 343—357.

г. Омск

Статья поступила 21 марта 1984 г.