МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Ф.М. ДОСТОЕВСКОГО

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Сборник материалов
IX Международной научной конференции,
посвященной 85-летию профессора В.И. Потапова

(Омск, 19 ноября 2021 г.)

ISBN 978-5-7779-2572-5

Омск

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ОМСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

2021

УДК 519+ 630.18

Л.А. Володченкова, А.К. Гуц

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
г. Омск, Россия

СТАЦИОНАРНЫЕ И ЦИКЛИЧЕСКИЕ РАВНОВЕСИЯ В ЭКОСИСТЕМЕ «ЛЕС-ПОЧВА»

Рассматривается следующая модель экосистемы «лес-почва» в форме системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} &= rB\left(1-\frac{B}{k}\right)-\alpha wP, \\ \frac{dP}{dt} &= \gamma(p-P^2)P+\delta w^2 B. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $B(t)$ – биомасса леса, $P(t)$ – мера плодородия почвы, p – мера типа почвообразующей породы, w – влажность почвы, $r, k, \alpha, \gamma, \delta > 0$ константы.

Первое уравнение в системе (1) – это подправленное с учетом влияния почвы на лес уравнение для биомассы, приведенное в [1], а второе уравнение – также подправленное уравнение,я, описывающее динамику почвы с учетом влияния на нее биомассы леса, изученное в статье [2].

Имеем очевидное стационарное равновесие $(B,P)=(0,0)$. Остальные стационарные равновесия – это решения системы

$$\begin{cases} (\frac{\gamma pr}{\alpha w}+\delta w)B-\frac{\gamma pr}{\alpha wK}B^2-\frac{\gamma r^3}{\alpha^3 w^3}B^3+\frac{3\gamma r^3}{\alpha^3 w^3 K}B^4- \\ \qquad -\frac{3\gamma pr^3}{\alpha^3 w^3 K^2}B^5+\frac{\gamma pr^3}{\alpha^3 w^3 K^3}B^6=0, \\ P=\frac{\gamma r}{\alpha w}B(1-\frac{\gamma B}{K}). \end{cases} \qquad (3)$$

Первое уравнения системы (3) дает решение $B=0$, и затем поиск корней сводится к решению уравнения 5-й степени по B. Следовательно, имеется, как минимум, еще один действительный корень B_1. Остается найти корни уравнения 4-й степени. Однако, например при

$$r=\alpha=\beta=\gamma=w=K=1, \quad p=2, \quad \delta=20, \qquad (4)$$

это уравнение 4-степени не имеет действительных корней, как видно из графика на рис. 1 соответствующей функции

$$y := 22 - 2 * B - B^2 + 3 * B^3 - 3 * B^4 + B^5.$$

Рассмотрим случай (4) подробнее. При потере устойчивости равновесия $R_0 = (0,0)$ экосистема претерпевает бифуркацию Андронова-Хопфа [3]. Второе равновесие $R_1 = (B_1, P_1) \approx$ $\approx (-1{,}4; -3{,}36)$ таким свойством не обладает.

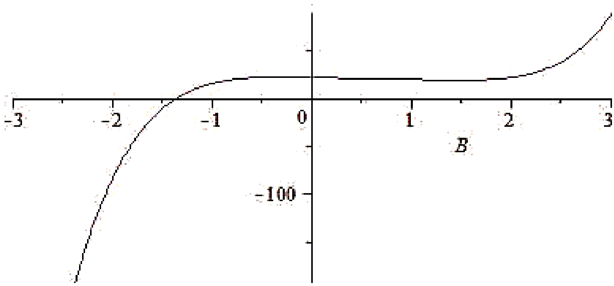

Рис. 1. График функции (5)

Равновесия R_0, R_1 не являются реальными равновесиями, поскольку в реальной ситуации $B(t) > 0, P(t) > 0$, т.е. биомасса и мера плодородия почвы – положительные величины. Поэтому делаем необходимый сдвиг в плоскости (B, P) к реальным значениям. Понятно, что и до сдвига и после сдвига $R_i \to R_i^* = (B_i^*, P_i^*)$ равновесие R_1^* имеет меньшее значение биомассы, чем R_0^*.

В соответствии с теорией катастроф, равновесие R_1^* при потере устойчивости перейдет скачком в равновесие R_0^*, а последнее в принципе может вернуться к равновесию R_1^* (пожар, рубка леса), но скорее всего следует ожидать бифуркации Андронова-Хопфа [3].

Поэтому скачкообразная смена $R_1^* \to R_0^*$ стационарного равновесия системы говорит о том, что лес переходит к равновесию, в котором он продуцирует больше биомассы, и при потере устойчивости этот стационарный процесс закончится переходом посредством бифуркации Андронова-Хопфа [3] к периодическому равновесию, к циклическим изменениям биомассы и состояния почвы.

Можно проинтерпретировать это как стационарное существование экосистемы в состоянии R_1^* с малой продукцией биомассы (посадки), затем переход к состоянию R_0^* с большей продукцией биомассы (зрелый лес), и, наконец, экосистема оказывается в состоянии, когда каким-то образом периодически меняется биомасса и плодородие почвы (пожары + восстановление леса после пожаров или вырубки + восстановление леса после вырубок).

Литература

1. *Chaudhary M.M., Dhar J., Sah M G.P.* Mathematical Model of Depletion of Forestry Resource: Effect of Synthetic Based Industries. // International Journal of Biological Sciences. 2013. Vol. 7, no. 4, P. 798–802.
2. *Володченкова Л.А*. Модель плодородия почвы с точки зрения катастрофы <<сборка>> // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов Международной научной конференции (Омск, 21 ноября 2014 г.). – Омск: Изд-во Ом. гос. ун-та, 2014. – С. 25–26.
3. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир, 1980.