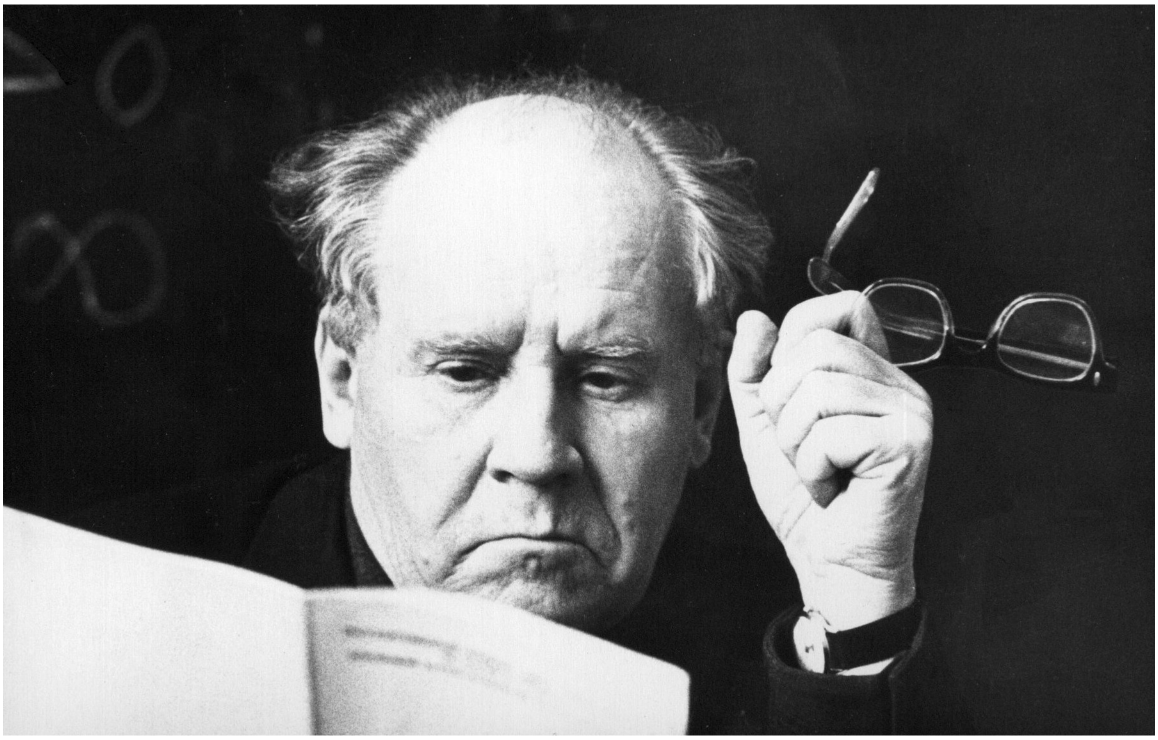
ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»



# XXI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские чтения - 2023)

Материалы конференции
(Могилев, 23 – 27 мая 2023 года)

**В двух частях**

**Часть 2**

**Уравнения с частными производными**
**Интегро-дифференциальные и стохастические дифференциальные уравнения**
**Дифференциальные уравнения и их приложения**
**Методика преподавания математических дисциплин в высшей школе**

Могилев
«Белорусско-Российский университет»
2023

случай — задача с постоянным коэффициентом $\sigma(x) = const$ и правой частью в виде дельта–функции $f(x) = -2\delta(x)$, решение которой имеет разрыв первой производной при $x = 0$: $u(x) = 1 - |x|$, $u'(x) = -sign(x)$.

При сглаживании коэффициентов относительная точность $10^{-10}$ достигалась, когда на разрыв приходилось не менее девяти точек сетки. Например, при $n = 40$ для достижения такой точности общее число узлов чебышёвской сетки превышает $N = 900$. При $n = 80$ и $N = 1000$ (четыре точки на разрыв коэффициентов) относительная погрешность спектрального метода сопоставима с погрешностью метода конечных разностей и превышает $10^{-6}$.

Для аппроксимации дельта–функции первоначально использовалось выражение

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}\right), \quad \lim_{\tau\to 0} g(x) = \delta(x - x_0), \tag{4}$$

однако, такое сглаживание оказалось совершенно непригодным для моделирования точечного источника, поскольку точность спектрального метода оказывалась при этом существенно хуже, чем точность метода конечных разностей. В качестве аппроксимации дельта–функции лучше всего подходит вторая спектральная производная от фундаментального решения задачи. В этом случае, очевидно, погрешность будет сравнима с вычислительной погрешностью. Данный подход может быть использован при моделировании точечных источников в рамках многомерного уравнения Пуассона и более сложных задач с неоднородными и разрывными коэффициентами.

**Литература**

1.Trefethen L.N. *Spectral Methods in MATLAB.* Philadelphia: SIAM, 2000.

2. Boyd J. P. *Chebyshev and Fourier spectral methods.* Courier Corporation, 2001.

## ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ, ПОДДЕРЖИВАЮЩЕЕ ПЛОДОРОДИЕ ПОЧВЫ

**Л.А. Володченкова, А.К. Гуц**

В работе [1] было предложено дифференциальное уравнение, описывающее уровень плодородия почвы $x$ с учетом только двух наиболее важных факторов: типа почвообразующей породы (материнской породы) $p$, которая служит основой (каркасом) для формирования почвы, и влаги $W$, которая является жизненной основой растений, почвенной фауны и микрофлоры:

$$\dot{x} = \gamma \cdot (p - x^2)x - \delta \cdot (W - W_-)(W - W_+), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $\gamma, \delta > 0$ – константы, $W_-$ – значение влажности почвы, которое характеризует нехватку воды, и, соответственно, $W_+$ – ее избыток $(0 < W_- < W_+)$. При изменениях влажности, выходящей за пределы отрезка $[W_-, W_+]$, наблюдаются катастрофы типа «сборка», т.е. скачкообразные изменения плодородия $x$. Хотя уровень плодородия зависит и от ряда других факторов: химических, физико-химических, биологических, мы сконцентрировали внимание на чисто физических факторах, формирующих почву и обеспечивающих ее плодородие.

При изменении факторов $p$ и $W$, не пересекающих бифуркационное множество, состояние плодородия $x$ может пребывать в устойчивом стационарном равновесии $dx/dt = 0$. Однако, факторы $p, W$ при этом не меняются. Поэтому интересно найти равновесие, когда могут меняться все переменные $x, p, W$. Для этого используем теорию дифференциальных игр [2], позволяющую найти оптимальное *позиционное управление* $p^*(x), W^*(x)$, обеспечивающие равновесие Нэша для «игроков» $p$ и $W$ и называемое также стратегией Маркова.

Рассмотрим дифференциальную игру «игроков» $p$ и $W$ с нененулевой суммой

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)p + g_2(x)w, \tag{2}$$

$$f(x) = -x^3, \quad g_1(x) = x, \quad g_2(x) = -\delta, \quad w = (W - W_-)(W - W_+),$$

$$V_1^*(x(t), p^*, w^*) = \min_{p,w} \int_t^{+\infty} [Q_1(x) + p^2]dt, \qquad V_2^*(x(t), p^*, w^*) = \min_{p,w} \int_t^{+\infty} [Q_2(x) + w^2]dt,$$

$$Q_1(x) = Q_2(x) = [2\gamma + \gamma^2]x^4 + \delta^2 x^2 \geq 0.$$

Искомое оптимальное управление имеет вид

$$p^*(x) = -\frac{1}{2} g_1(x)(V_1^*)'(x), \quad w^*(x) = -\frac{1}{2} g_2(x)(V_2^*)'(x), \tag{3}$$

где $V_1^*(x) = V_2^*(x) = x^2$ являются решениями уравнения Гамильтона-Якоби

$$Q_1 + (V_1)'_x f(x) - \frac{1}{4}[g_1(x)]^2[(V_1)'_x]^2 - \frac{1}{2}[g_2(x)]^2 (V_1)'_x (V_2)'_x + \frac{1}{4}[g_2(x)]^2[(V_1)'_x]^2 = 0,$$
$$Q_2 + (V_2)'_x f(x) - \frac{1}{4}[g_2(x)]^2[(V_2)'_x]^2 - \frac{1}{2}[g_1(x)]^2 (V_1)'_x (V_2)'_x + \frac{1}{4}[g_1(x)]^2[(V_1)'_x]^2 = 0.$$

Поскольку $p^*(x) = -x$ и тип почвообразующей породы практически не изменяется, то можно принять, что $\dot{x} \approx 0$, т.е. имеем стационарное равновесие. Иначе говоря, равновесие Нэша совпадет со стационарным. Наконец, система (2), (3) асимптотически устойчивая.

Работа выполнена в рамках государственного задания «Эволюция окружающей среды и климата вследствие естественных причин и антропогенного воздействия» (FGRW-2021-0015, № госрегистрации 122032300363-3).

**Литература**

1. Володченкова Л. А. *Модель плодородия почвы с точки зрения катастрофы «сборка»* // Математическое и компьютерное моделирование: сборник материалов Международной научной конференции (Омск, 21 ноября 2014 г.). Омск: изд-во Ом. гос. ун-та, 2014. С. 25–26.

2. Lewis F., Vrabie D., Syrmos V. *Optimal Control.* New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2012.