



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Гуц, Автоморфизмы локальных структур
порядка в гиперболических многообразиях,
Сиб. матем. журн., 1987, том 28, номер 5, 61–63

<https://www.mathnet.ru/smj7345>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 80.249.207.97

15 апреля 2025 г., 19:35:30



А. К. ГУЦ

АВТОМОРФИЗМЫ ЛОКАЛЬНЫХ СТРУКТУР ПОРЯДКА В ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

В статьях [1—3] были вычислены группы порядковых автоморфизмов в евклидовом и гиперболическом пространствах. В работе [4] описаны автоморфизмы локальных порядков, порождаемых эллиптическими конусами, в евклидовом и конформном пространствах. В данной статье показано, как с помощью методов, развитых в [4], вычислить автоморфизмы локальных (эллиптических) порядков в гиперболических многообразиях.

1. Структуры порядка и локального порядка

Семейство $\mathcal{P} = \{P_x: x \in V\}$ подмножеств множества V назовем структурой порядка, если выполнены следующие условия: 1) $x \in P_x$, 2) $y \in P_x$ влечет $P_y \subset P_x$, 3) если $x \neq y$, то $P_x \neq P_y$.

Пусть V — топологическое пространство, $\mathcal{O} = \{O_x: x \in V\}$ — покрытие пространства V открытыми окрестностями O_x точек $x \in V$. Предположим также, что в каждой O_x задана структура порядка $\mathcal{P}_x = \{P_{xa}: a \in O_x\}$. Через $\mathcal{P}_x|U$, где U — множество в пространстве V , обозначим семейство $\{P_{xa} \cap U: a \in U\}$ и назовем его ограничением порядка $\mathcal{P}_x$ на множестве U .

Структура локального порядка в пространстве V — это семейство $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_x: x \in V\}$ структур порядка покрытия $\mathcal{O}$, удовлетворяющее условию $\mathcal{P}_x|O_x \cap O_y = \mathcal{P}_y|O_x \cap O_y$ для любых пересекающихся окрестностей O_x, O_y .

Очевидно, что если $\mathcal{P}$ — структура порядка в V , то $\{\mathcal{P}|O_x: x \in V\}$ — структура локального порядка в V . Таким образом, «глобальная» структура порядка всегда определяет локальную. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Определение 1. Пусть $\mathcal{P}$ — структура локального порядка в пространстве V и $f: V \rightarrow V$ — биекция. Она называется *локальным порядковым автоморфизмом* или просто *$\mathcal{P}$ -автоморфизмом*, если для каждой точки $x \in V$ существует связная открытая окрестность $W_x \subset O_x$ такая, что $f(W_x) \subset O_{f(x)}$ и $f(\mathcal{P}_x|W_x) = \mathcal{P}_{f(x)}|f(W_x)$, т. е. $f(P_{xa} \cap W_x) = P_{f(x)f(a)} \cap f(W_x)$ для каждой точки $a \in W_x$.

Если $U \subset V$ — область, а $f: U \rightarrow V$ — инъекция, то f называется *$\mathcal{P}$ -мономорфизмом в U* , если для любой $x \in U$ существует связная открытая окрестность $W_x \subset O_x \cap U$ такая, что $f(W_x) \subset O_{f(x)}$ и $f(P_{xa} \cap W_x) = P_{f(x)f(a)} \cap f(W_x)$ для любой точки $a \in W_x$.

2. Локальный порядок в гиперболических многообразиях

Полные связные римановы многообразия постоянной кривизны -1 будем называть гиперболическими многообразиями. Известно, что гиперболические многообразия — это в точности фактор-пространства H^n/Γ гиперболического пространства H^n по действующей свободно дискретной группе Γ его движений [5, с. 88, следствие 2.4.10]. Более того, гиперболическое многообразие M^n локально изометрично пространству H^n [5, с. 80, следствие 2.3.17, с. 77, следствие 2.3.8].

Пусть $p: H^n \rightarrow H^n/\Gamma \equiv M^n$ — естественное проектирование. Поскольку Γ действует на H^n вполне разрывно, для каждой точки $x \in H^n$ можно выбрать такую открытую окрестность U_x , что для любого движения $\gamma \in \Gamma$ окрестность $\tilde{U}_{\gamma(x)} = \gamma(U_x)$ изометрична $p(U_x) \equiv O_{p(x)}$ — окрестности точки $p(x) \in M^n$. Другими словами, у каждой точки $z \in M^n$ можно выбрать открытую окрестность O_z так, что $p^{-1}(O_z)$ будет объединением непересекающихся изометричных открытых окрестностей U_x точек x , принадлежащих орбите $p^{-1}(z)$. Семейство таких окрестностей обозначим $\mathcal{O} = \{O_z: z \in M^n\}$.

Пусть $\mathcal{P} = \{P_x: x \in H^n\}$ — гиперболическая структура порядка в H^n , т. е. $\mathcal{P}$ — это структура порядка в H^n такая, что для некоторой просто транзитивной подгруппы T группы движений пространства H^n выполняется равенство $t(P_x) = P_{t(x)}$ для любых $x \in H^n$ и $t \in T$ [2, 3].

Будем, далее, предполагать, что $\mathcal{P}$ инвариантно относительно действия дискретной группы движений Γ (например, $\Gamma \subset T$), т. е. $\gamma(P_x) = P_{\gamma(x)}$ для $\gamma \in \Gamma$.

Рассмотрим семейство $\Pi = \{\mathcal{P}_z: z \in M^n\}$, где $\mathcal{P}_z = \{p(P_a \cap U_{x(z)}): a \in U_{x(z)}\}$ для некоторой точки $x(z) \in p^{-1}(z)$. Из определения семейства $\mathcal{O}$ видно, что определение $\mathcal{P}_z$ не зависит от выбора точки $x(z) \in p^{-1}(z)$, ибо все окрестности U_x точек орбиты $p^{-1}(z)$ изометричны, и соответствующие изометрии принадлежат Γ .

Предположим, что $O_{z_1} \cap O_{z_2} \neq \emptyset$, $z_1, z_2 \in M^n$ и $z \in O_{z_1} \cap O_{z_2}$. Тогда возьмем $u, v \in p^{-1}(z)$ так, что $u \in U_{x_1}$, $v \in U_{x_2}$, где $x_i \in p^{-1}(z_i)$ ($i = 1, 2$). Если $U_{x_1} \cap U_{x_2} \neq \emptyset$, то $O_{z_1} \cap O_{z_2} = p(U_{x_1} \cap U_{x_2})$, и поэтому

$$\mathcal{P}_{z_1}|_{O_{z_1} \cap O_{z_2}} = p(\mathcal{P}|_{U_{x_1} \cap U_{x_2}}) = \mathcal{P}_{z_2}|_{O_{z_1} \cap O_{z_2}}. \quad (1)$$

Допустим, что $U_{x_1} \cap U_{x_2} = \emptyset$. Так как u, v лежат на одной орбите, существует $\gamma \in \Gamma$ такое, что $v = \gamma(u)$. Но тогда $U_{x_2} \cap \gamma(U_{x_1}) \neq \emptyset$, а поскольку $\gamma(U_{x_1}) = U_a$ для некоторой точки $a \in p^{-1}(z_1)$, то $U_{x_2} \cap U_a \neq \emptyset$. Следовательно, с точностью до переобозначения $a \rightarrow x_1$ выполняется условие $U_{x_1} \cap U_{x_2} \neq \emptyset$, т. е. верно равенство (1). Оно говорит о том, что Π есть структура локального порядка в M^n , которую будем называть *локально гиперболической структурой порядка* в гиперболическом многообразии.

Пусть $f: U \rightarrow M^n$, где $U \subset M^n$ — открытое множество, Π — мономорфизм. Если $x \in U$, то возьмем непрерывный путь $\omega \subset M^n$, соединяющий x с $f(x)$. Для каждой точки $u \in p^{-1}(x)$ существует подъем $\tilde{\omega}$ пути ω с начальной точкой u . Определим отображение $\tilde{f}: p^{-1}(U) \rightarrow H^n$, полагая, что $\tilde{f}(u)$ — конечная точка пути $\tilde{\omega}$, т. е. $p \circ \tilde{f}(u) = f(x)$. Наше определение отображения $\tilde{f}$ корректно, ибо два подъема пути с различными начальными точками имеют отличные конечные точки [5, с. 47, теорема 1.8.3]. Следовательно, $\tilde{f}$ — инъекция, которая, как легко видеть, является локальным порядковым мономорфизмом относительно структуры локального порядка $\tilde{\Pi}$, где $\tilde{\Pi} = \{\tilde{\mathcal{P}}_x: x \in H^n\}$, $\tilde{\mathcal{P}}_x = \{P_a \cap U_x: a \in U_x\}$. Отсюда вытекает, что свойства Π -мономорфизма $f: U \rightarrow M^n$ определяются свойствами его подъема $\tilde{f}: p^{-1}(U) \rightarrow H^n$, и поэтому вычисление Π -мономорфизмов сводится к вычислению $\tilde{\Pi}$ -мономорфизмов.

В этой работе мы изучим локальные порядковые мономорфизмы относительно эллиптических локальных порядков в M^n , задаваемых круговыми квазиконусами [3] в H^n , $n \geq 3$, т. е. в H^n рассматривается гиперболическая структура порядка $\mathcal{P}$, где в модели Пуанкаре P_x изображается круговым конусом. Соответствующую локальную структуру порядка Π в M^n назовем эллиптической локально гиперболической структурой порядка. Под моделью Пуанкаре пространства Лобачевского H^n понимаем полупространство $R_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n: x_1 > 0\}$, где R^n — n -мерное

арифметическое пространство, с метрикой

$$ds^2 = \frac{1}{x_1^2} \sum_{i=1}^n dx_i^2.$$

Изображение в модели Пуанкаре объекта A гиперболической геометрии будем обозначать через $|A|$.

В пространстве $\mathbf{R}^n$ введем скалярное произведение

$$x \cdot y = x_1 \cdot y_1 - \sum_{i=2}^n x_i \cdot y_i, \quad x^2 = x \cdot x. \quad (2)$$

Пространство $\mathbf{R}^n$, снабженное скалярным произведением (2), стандартным образом оснащается структурой псевдоевклидова пространства. Далее под конформным преобразованием имеем в виду конформные преобразования указанного псевдоевклидова пространства. Их можно представить в виде суперпозиции гомотетий $x \rightarrow \lambda x + a$, $\lambda \neq 0$, преобразований Лоренца, т. е. аффинных биекций, сохраняющих x^2 , и инверсий $x \rightarrow \frac{x-a}{(x-a)^2} + a$ [4].

Определение 2. Инъективное отображение $g: U \rightarrow H^n$ ($U \subset H^n$ — область) называется *локально q -конформным*, если для каждой точки $x \in U$ существуют окрестность $W_x \subset U$ и конформное преобразование g_x такие, что $|g|_{W_x}| = g_x$. Инъекция $g: U \rightarrow M^n$ ($U \subset M^n$ — область) локально q -конформна, если таковой является ее подъем $\tilde{g}: p^{-1}(U) \rightarrow H^n$.

Теорема. Пусть Π — эллиптическая локально гиперболическая структура порядка в гиперболическом многообразии M^n , $n \geq 3$. Тогда любой Π -моморфизм $f: U \rightarrow M^n$ ($U \subset M^n$ — область) является локально q -конформным.

Доказательство. Достаточно установить справедливость утверждения теоремы для подъема $\tilde{f}: p^{-1}(U) \rightarrow H^n$, который является $\tilde{\Pi}$ -моморфизмом. Согласно определению 1 существует связанная открытая окрестность W_x у каждой точки $x \in p^{-1}(U)$, $W_x \subset p^{-1}(U)$, для которой

$$\tilde{f}(P_a \cap W_x) = P_{\tilde{f}(a)} \cap \tilde{f}(W_x)$$

или

$$|\tilde{f}|(|P_a| \cap W_x) = |P_{\tilde{f}(a)}| \cap |\tilde{f}|(W_x) \quad (3)$$

при любой точке $a \in W_x$. Из (3) вытекает (по теореме Александрова [4, с. 8]), что $|\tilde{f}|$ является конформным на W_x , т. е. $\tilde{f}$ локально q -конформно. Теорема доказана.

Замечание. Евклидов аналог теоремы следует из результатов, полученных А. Д. Александровым [4] и повторно Д. Лестер [6]. Соответствующая формулировка получается из формулировки теоремы, если слова «гиперболический», « q -конформный» заменить соответственно на «евклидовый», «конформный». В таком случае слова «евклидово многообразие M^n » означают плоское многообразие $\mathbf{R}^n/\Gamma$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Д. Отображения упорядоченных пространств // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР.— 1972.— Т. 128.— С. 3—21.
2. Гуц А. К. Отображения упорядоченного пространства Лобачевского // Докл. АН СССР.— 1974.— Т. 215, № 1.— С. 35—37.
3. Гуц А. К. Отображения упорядоченного пространства Лобачевского // Сиб. мат. журн.— 1986.— Т. 27, № 3.— С. 51—67.
4. Александров А. Д. К основам теории относительности // Вестн. ЛГУ. Сер. Математика.— 1976.— № 19.— С. 5—28.
5. Вольф Дж. Пространства постоянной кривизны.— М.: Наука, 1982.
6. Lester J. A. Conformal spaces // J. Geometry.— 1980.— V. 14.— P. 108—117.