Н. Р. Абдрахимова, А. К. Гуц, Н. Л. Шаламова, Синтетическая теория аффинных лоренцевых многообразий и упорядоченные группы Ли, *Докл. АН СССР*, 1988, том 303, номер 4, 777–781

Доклады Академии наук СССР
1988. Том 303, № 4

УДК 513.82 МАТЕМАТИКА

Н.Р. АБДРАХИМОВА, А.К. ГУЦ, Н.Л. ШАЛАМОВА

СИНТЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ АФФИННЫХ ЛОРЕНЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЙ И УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ ЛИ

(Представлено академиком А.Д. Александровым 15 IV 1987)

В последние годы найдено решение проблемы синтетического "бескоординатного" описания римановых пространств [1]. Аналогичная задача для псевдоримановых и, в частности, лоренцевых многообразий пока не имеет удовлетворительного решения. Для построения синтетической "бескоординатной" теории лоренцевых многообразий А.Д. Александров предложил использовать структуры (частичного) порядка. Применительно к общей теории относительности это означает создание причинной теории пространства–времени. Имеется несколько таких теорий [2], однако они не характеризуют исчерпывающим образом лоренцевых многообразий [3].

В данной заметке излагается подход, позволяющий достаточно полно описать однородные лоренцевы многообразия, допускающие аффинную структуру, т.е. линейную связность ∇ на расслоении реперов с тождественно равными нулю кривизной и кручением. Если связность ∇ полная, то будем говорить о полной аффинной структуре. Геодезические связности ∇ далее называем прямыми, и полугеодезические – лучами. На аффинном многообразии V^n можно ввести аффинный атлас локальных карт, для которого каждая функция перехода может быть продолжена до аффинного преобразования n-мерного арифметического пространства $\mathbf{R}^n$. Отображение f: $V^n \to V^m$, где V^n, V^m – аффинные многообразия, называется а ф ф и н н ы м, если в локальных координатах аффинного атласа f задается аффинным преобразованием из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$.

Пусть V^n – аффинное многообразие с лоренцевой метрикой g. Оно называется о д н о р о д н ы м, если на нем транзитивно действует группа аффинных изометрий.

Нас будут интересовать в этой заметке лоренцевы многообразия V^n с просто транзитивной разрешимой группой аффинных изометрий T. Следовательно, оснащение V^n (полной) аффинной структурой равносильно оснащению (полной) левоинвариантной аффинной структурой группы Ли T. Левоинвариантность означает, что левые сдвиги являются аффинными преобразованиями. Учитывая сказанное, мы ограничимся аксиоматизацией лоренцевых разрешимых групп Ли, т.е. групп Ли, оснащенных левоинвариантной лоренцевой метрикой.

В каком случае группа Ли T допускает аффинную левоинвариантную структуру? Согласно гипотезе Дж. Милнора, таковой является любая разрешимая группа Ли. Сейчас известно, что полную левоинвариантную аффинную структуру допускают все нильпотентные группы Ли [4], разрешимые группы Ли размерности $\leqslant 4$ [5] и некоторые другие.

Если учесть, что лоренцевы многообразия главным образом используются в общей теории относительности, то синтетическая теория однородных лоренцевых многообразий, а точнее, лоренцевых разрешимых групп Ли или лоренцевых солвмногообразий малых размерностей имеет самостоятельную ценность.

1. Аксиоматизировать лоренцевы группы Ли G_r, $r \geqslant 2$, допускающие полную левоинвариантную аффинную структуру, — это значит решить последовательно следующие три задачи: 1) оснастить произвольную абстрактную группу G левоинвариантной аффинной структурой; 2) ввести в G лоренцеву метрику g, не используя понятия гладкого тензорного поля; 3) определить полную группу изометрий без предположения о дифференцируемости рассматриваемых отображений.

Первая задача решена В.К. Иониным [6]. Структура односвязного аффинного многообразия на множестве G есть структура $\langle G, \Gamma, F, \Phi \rangle$, где Γ — множество всех аффинных преобразований вещественной прямой $\mathbf{R}$, а $F \subset G^{\mathbf{R}}$, $\Phi \subset \mathbf{R}^G$ удовлетворяют условиям:

(1) для любых $f \in F$, $\varphi \in \Phi$ суперпозиция $\varphi \circ f \in \Gamma$;

(2) F максимально, т.е. если f: $\mathbf{R} \to G$, но $f \notin F$, то существует $\varphi \in \Phi$ такое, что $\varphi \circ f \notin \Gamma$;

(3) Φ максимально (см. (2));

(4) если $x, y \in G$, то существует $f \in F$ такое, что $x, y \in f(\mathbf{R})$;

(5) если $x, y \in G, x \neq y$, то существует $\varphi \in \Phi$ такое, что $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Аффинное преобразование h: $G \to G$ в этих терминах определяется как такое изображение, для которого $\varphi \circ h \circ f \in \Gamma$ при любых $f \in F$, $\varphi \in \Phi$. Множество $\{f(\mathbf{R})$: $f \in F\}$ есть множество прямых. Естественным образом определяется размерность $\dim G$ аффинного многообразия G (см. [6]), и k-мерные плоскости.

Неодносвязные аффинные многообразия получаются, если Γ заменить на $\widetilde{\Gamma}$, состоящее из "частичных" аффинных преобразований прямой $\mathbf{R}$ (они определены на интервалах).

Аффинная структура $\langle G, \Gamma, F, \Phi \rangle$ левоинвариантная, если каждый левый сдвиг L_a: $x \to a \cdot x$ является аффинным преобразованием.

2. Рассмотрим теперь задачу введения лоренцевой структуры. Пусть $\langle G, \Gamma, F, \Phi \rangle$ — левоинвариантная аффинная структура на G.

2.1. Луч с началом $x \in G$ — это образ $f([0, +\infty))$, где $f \in F$ и $f(0) = x$. Конус P_x с вершиной x есть объединение лучей с началом x. Пусть $\mathcal{P} = \{P_x$: $x \in G\}$ — семейство эллиптических конусов таких, что $\operatorname{int} P_x \neq \phi$, т.е. аффинная оболочка $\operatorname{af}(P_x)$ совпадает с G, и

(1) $\quad L_a(P_x) = P_{a \cdot x}$.

Тогда говорим, что семейство $\mathcal{P}$ задает на G левоинвариантную лоренцеву структуру.

Если $\{x^i\}$ — аффинные координаты на G и

(2) $\quad P_x = \{y \in G$: $g_{ij}(x)(y^i - x^i)(y^j - x^j) \geqslant 0, \quad y^i \geqslant x^i\}$,

то (1) влечет: $g_{ij}(x)\xi^i\xi^j = 0$ тогда и только тогда, когда $g_{ij}(L_a(x))(dL_a)^i(\xi)(dL_a)^j(\xi) = 0$, т.е. L_a — конформное преобразование для g_{ij}. Но тогда L_a — изометрия для $\tilde{g}_{ij}$, конформной g_{ij}. Тензор $\tilde{g}_{ij}$ и есть искомая левоинвариантная лоренцева структура на G. Заметим, что, как видно из (2), конусы P_x равным образом определяются как с помощью g_{ij}, так и $\tilde{g}_{ij}$.

2.2. Если G_r — лоренцева группа Ли, то в предположении временной ориентируемости G_r на G_r можно определить причинную структуру $\{J^+(x)$: $x \in G_r\}$ (см. [7]). Пусть G_r оснащена аффинной структурой. Луч контингенции множества $M \subset G_r$ в точке x есть предел лучей с началом x, проходящих через $y \in M$ при стремлении y к x. Множество всех таких лучей контингенции обозначим $\operatorname{cont}(M, x)$. Ясно, что $\operatorname{cont}(J^+(x), x)$ есть конус, причем если $g_{ij}(x)$ — лоренцева метрика, заданная в аффинных координатах, то $\mathrm{cont}(J^+(x), x)$ совпадает с P_x, определяемым формулой (2).

Отсюда становится очевидным следующий подход к введению лоренцевой структуры на упорядоченной группе G. Если $\leqslant$ есть левоинвариантный частичный порядок на G, то семейство

$$\{\mathrm{cont}(P_x, x),\ x \in G\}, \qquad P_x = \{y \in G\colon x \leqslant y\}$$

при условии, что $\mathrm{cont}(P_x, x)$ есть эллиптический конус и $\mathrm{af}(P_x) = G$, задает левоинвариантную лоренцеву структуру на G.

3. Рассмотрим теперь задачу определения изометрии на группе $\langle G, \Gamma, F, \Phi, \{P_x\}\rangle$. Будем искать изометрии среди автоморфизмов группы $\mathrm{Aut}(\mathscr{P})$, где $\mathscr{P} = \{P_x\}$. По определению биекция $f\colon\ G \to G$ принадлежит $\mathrm{Aut}(\mathscr{P})$, если для любого $x \in G$

(3) $\quad f(P_x) = P_{f(x)}$.

Ниже приводим результаты, касающиеся трехмерной геометрии. Это позволяет представить развиваемый подход в наиболее простом и полном виде. Многомерный случай исследуется аналогично, но его изложение требует гораздо большего количества страниц.

Если G_3 – лоренцева односвязная группа Ли, то полная группа изометрий $\mathrm{Isom}(G_3)$ либо имеет размерность 6, и тогда G_3 имеет постоянную кривизну, либо размерность не превышает четырех. Коль скоро нас интересуют только разрешимые группы G_3, то, как следует из [8, § 26], полные четырехмерные группы $\mathrm{Isom}(G_3)$ разрешимы и имеют тип $G_4\mathrm{I}$, $G_4\mathrm{III}$ с $q = 0$, $G_4\mathrm{IV}$, $G_4\mathrm{V}$, $G_4\mathrm{VI}$ $(k = -1, l = 0, \epsilon = 1)$, $G_4\mathrm{VI}_2$ $(k = l = 0)$, $G_4\mathrm{VI}_4$ $(k = \epsilon = 0)$ по классификации из [8]. Но эти группы, за исключением, может быть, группы $G_4\mathrm{III}$ $(q = 0)$, как видно из [8, § 26], все аффинизируемы, т.е. на G_3 можно ввести левоинвариантную аффинную структуру, в картах которой изометрии являются аффинными преобразованиями. В таком случае равенство $g_{f(x)}((df)_x(\xi), (df)_x(\xi)) = g_x(\xi, \xi)$, $f \in \mathrm{Isom}(G_3)$, влечет $g_{ij}(f(x))(f^i(y) - f^i(x))(f^j(y) - f^j(x)) = g_{ij}(x)(y^i - x^i)(y^j - x^j)$, т.е. f обладает свойством (3) и, следовательно, $\mathrm{Isom}(G_3) \subset \mathrm{Aut}(\mathscr{P})$.

Мы видим, что трехмерные однородные лоренцевы многообразия допускают синтетическое описание на языке аффинных структур.

3.1. Пусть $\mathscr{P} = \{P_x\colon x \in A^3\}$ – семейство эллиптических конусов в трехмерном аффинном пространстве A^3, задающее порядок, т.е. выполнены условия: 1) $x \in P_x$; 2) если $y \in P_x$, то $P_y \subset P_x$; 3) если $x \neq y$, то $P_x \neq P_y$.

Конусы P_x, P_y сравнимы, если существует параллельный перенос τ такой, что $\tau(x) = y$ (либо $\tau(y) = x$) и верно одно из двух соотношений: $\tau(P_x) = P_y$ или $\tau(P_x)\backslash\{y\} \subset \mathrm{int}P_y$ (соответственно: $\tau(P_y)\backslash\{x\} \subset \mathrm{int}P_x$). Здесь через $\mathrm{int}A$ обозначена внутренность множества A.

Теорема 1 [13]. *Если порядок $\mathscr{P}$ в A^3 состоит из сравнимых эллиптических конусов, непрерывно зависящих от вершины* (см. [13]), *то* $\mathrm{Aut}(\mathscr{P})$ *есть подгруппа группы аффинных преобразований пространства A^3.*

Теорема 2. *Пусть в A^3 порядок $\mathscr{P}$ состоит из эллиптических конусов и выполнены следующие условия*:

1) *для любой плоскости H_a, проходящей через точку $a \in A^3$ и параллельной плоскости H, семейство $\{P_x\colon\ x \in H_a\}$ состоит из равных и параллельных конусов, причем если $H_a \neq H_b$, то P_a не равен и не параллелен P_b*;

2) $H_a \cap \mathrm{int}P_a = \phi$;

3) *существует луч L такой, что каждый конус P_x содержит крайнюю образующую L_x, параллельную L.*

Тогда любой гомеоморфизм $f \in \mathrm{Aut}(\mathscr{P})$ *есть аффинное преобразование.* Далеко не каждое семейство конусов $\mathscr{P}$ задает порядок в A^3.

Предложение. *Семейство* $\mathscr{P}$ *эллиптических конусов в* A^3, *удовлетворяющее условию* 1) *теоремы* 2 *и условию* $H_a \cap \mathrm{int} P_a \neq \phi$ *для любой точки* $a \in A^3$, *не задает порядка в* A^3.

Однако верна

Теорема 3. *Пусть в* A^3 *задано семейство эллиптических поверхностных двойных конусов* $\{K_x\colon\ x \in A^3\}$, *где* $K_x = \{ y \in A^3\colon\ g_{ij}(x)(y^i - x^i)(y^j - x^j) = 0\}$, $g_{ij} \in C(A^3)$. *такое, что*:

1) *на каждой плоскости* H_a, *параллельной* H, $K_a \cap H_a$ *есть пара пересекающихся прямых, а семейство* $\{K_x\colon\ x \in H_a\}$ *состоит из равных и параллельных конусов*;

2) *существуют две различные точки* a, b *такие, что* K_a *не равен и не параллелен* K_b.

Тогда если $f\colon\ A^3 \to A^3$ *– биекция такая, что* $f(K_x) = K_{f(x)}$ *для любой* $x \in A^3$, *то* f *аффинно.*

3.2. Рассмотрим случай, когда семейство $\mathscr{P} = \{P_x\}$ задает порядок на группе Ли G_3, т.е. $P_x = \{ y \in G_3\colon\ x \leqslant y\}$, где $\leqslant$ есть левоинвариантный порядок на G_3. Нас интересует теперь задача вычисления группы порядковых автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathscr{P})$ для группы Ли G_3. Хотя теория упорядоченных разрешимых групп и алгебр Ли в последние годы интенсивно развивалась [9, 10], группа $\mathrm{Aut}(\mathscr{P})$ достаточно полно исследована только для коммутативной и основной аффинной групп Ли [11, 12].

Предположим, что семейство $\mathscr{P} = \{P_x\}$ состоит из эллиптических конусов. Это возможно не для всякого порядка, точнее, не для произвольно взятой левоинвариантной аффинной структуры на упорядоченной группе Ли. Например, для группы Гейзенберга G_3II такая ситуация невозможна как для аффинной структуры, включающей канонические координаты первого рода [9], так и для аффинной структуры, для которой в число локальных координат входят канонические координаты второго рода.

Левоинвариантную полную аффинную структуру на группе Ли, содержащую канонические координаты второго рода, назовем канонической.

Теорема 4. *Пусть* $\mathscr{P}$ *– порядок на связной односвязной разрешимой группе Ли* G_3 *тикой, что* P_x *есть эллиптический конус в канонической аффинной структуре группы* G_3. *Тогда любой гомеоморфизм* $f \in \mathrm{Aut}(\mathscr{P})$ *является аффинным преобразованием.*

Если $\mathscr{P}$ не задает порядок, то можно воспользоваться теоремой 3. Осталось выяснить, верно ли, что $\mathrm{Isom}(G_3) \supset \mathrm{Aut}(\mathscr{P})$. Ответ дает

Теорема 5. *Если* $f\colon\ G_3 \to G_3$ *– аффинное преобразование относительно канонической аффинной структуры на связной односвязной разрешимой группе Ли* G_3, *сохраняющее изотропные направления левоинвариантной лоренцевой метрики* g *на* G_3, *то в случае групп Ли типа* G_3I – G_3V, G_3VII *по Бьянки* f *есть гомотетия, а для* G_3VI *гомотетия, за исключением того случая, когда метрика* g, *записанная в аффинных координатах, является конформно-плоской, точнее,* $g_{ij}(x) = (\exp \lambda) \cdot \delta_{ij}$, *где* $\delta_{ij} = \mathrm{const}$, *и соответственно* f *– нетривиальное конформное преобразование.*

Авторы благодарят проф. Б.Н. Садовского и участников семинара "Хроногеометрия" Новосибирского университета за полезные беседы и замечания.

Омский государственный университет

Поступило 27 V 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А.Д., Берестовский В.Н., Николаев И.Г.* – УМН, 1986, т. 41, № 3, с. 3–44. 2. *Пименов Р.И.* – Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1968, т. 6, с. 3–496. 3. *Пименов Р.И.* Хроногеометрия: достижения препятствия, структуры. Сыктывкар, Препринт Коми фил. АН СССР, 1987, № 160, 22 с. 4. *Boyom N.B.* The lifting problem for affine structures in nilpotent Lie groups. Montpeller, Preprint Institut de Mathematique, 1985. 41 p. 5. *Yamaguchi S.* – Mem. Fac.Sci. Kyushu Univ., 1979, vol. A33, № 2, p. 209–218. 6. *Ионин В.К.* – Геом. сб. Томск: ТГУ, 1982, № 23, с. 3–16. 7. *Бим Дж., Эрлих П.* Глобальная лоренцева геометрия. М.: Мир, 1985. 400 с. 8. *Петров А.З.* Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966. 495 с. 9. *Hofmann K.H., Lawson J.* – Semigroup Forum, 1981, vol. 23, p. 343–357. 10. *Hilgert J., Hofmann K.H.* – Monatsh. Math., 1985, Bd. 100, S. 183–210. 11. *Александров А.Д.* Тр. МИАН, 1972, т. 128, с. 3–21. 12. *Гуц А.К.* – Сиб. матем. журн., 1986, т. 27, № 3, с. 51–67. 13. *Шайденко А.В.* – Там же, 1978, т. 19, № 1, с. 186–192.

УДК 517.958 МАТЕМАТИКА

В.А. БАЙКОВ, Р.К. ГАЗИЗОВ, Н.Х. ИБРАГИМОВ

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ И ФОРМАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИСА

(Представлено академиком В.С. Владимировым 25 V 1987)

В данной работе вводится понятие формального преобразования Беклунда, которое представляет собой рекуррентно строящийся степенной ряд по параметру ϵ с коэффициентами из пространства $\mathcal{A}$ дифференциальных функций. Показывается, что широкий класс эволюционных уравнений, включающий в себя, в частности, уравнения Кортевега–де Фриса (КдФ) и Бюргерса–Кортевега–де Фриса, сводится формальным преобразованием Беклунда к уравнению Хопфа $u_t = uu_x$ и, следовательно, линеаризуется.*

Эти формальные преобразования хорошо приспособлены для исследования групповых свойств дифференциальных уравнений, так как все уравнения, получающиеся из некоторого уравнения таким преобразованием, наследуют все его групповые свойства. Поэтому все симметрии уравнения Хопфа переходят, в частности, в симметрии уравнений Кортевега–де Фриса и Бюргерса–Кортевега–де Фриса, что позволяет вскрыть их новые (формальные) симметрии, также представляющие собой степенные ряды с коэффициентами из $\mathcal{A}$.

Любые конечные суммы формальных преобразований Беклунда и симметрий при условии малости параметра ϵ рассматриваются нами как приближенные преобразования Беклунда и симметрии соответственно. При выполнении условия обрыва рядов, представляющих формальные симметрии, получаются обычные симметрии Ли–Беклунда [3]. Предлагаемый подход позволяет также выяснить, как происходит, что группы Ли–Беклунда, допускаемые отдельно уравнениями Бюргерса и Кортевега–де Фриса, исчезают при рассмотрении объединенного уравнения Бюргер-

*В отличие от линеаризации, предложенной в [1], в которой методами теории нелинейных представлений групп [2] доказывается сводимость уравнения Кортевега–де Фриса к линейному уравнению $u_t = u_3$, наш способ линеаризации вскрывает новые групповые особенности уравнения Кортевега–де Фриса.