А. К. Гуц, Полугруппы и их автоморфизмы основной аффинной группы Ли,
Сиб. матем. журн., 1992, том 33, номер 4, 59–64

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. 33, № 4 ИЮЛЬ — АВГУСТ 1992

УДК 519.46

А. К. ГУЦ

ПОЛУГРУППЫ И ИХ АВТОМОРФИЗМЫ ОСНОВНОЙ АФФИННОЙ ГРУППЫ ЛИ

В последние годы интенсивно развивается теория подполугрупп групп Ли. Особый интерес вызывает задача вычисления автоморфизмов связных подполугрупп. Для абелевой группы Ли эта задача была полностью решена А. Д. Александровым [1]. Однако для некоммутативных групп Ли пока не удалось получить достаточно серьезных результатов в решении указанной проблемы. Исключением являются основная аффинная группа Ли [2, 3] и трехмерные группы Ли [4].

В этой статье найдены автоморфизмы связных подполугрупп с квазиконтингенцией вида $L\times K$ (см. определение ниже) в случае основной аффинной группы Ли. Тем самым задача вычисления автоморфизмов подполугрупп основной аффинной группы Ли полностью решена.

Основная аффинная группа Ли — это вещественная связная односвязная группа Ли, алгебра Ли которой в некотором базисе $X_1, \ldots, X_n$ задается ненулевыми коммутационными соотношениями

$$[X_n, X_i] = X_i \quad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Впервые полугруппы и их автоморфизмы основной аффинной группы Ли были исследованы в статье [2] и более подробно — в работах [3—6]. При этом использовался геометрический язык, а вместо полугрупп изучались порождаемые ими частичные порядки. Большое значение в выяснении роли основной аффинной группы Ли в теории лиевых полугрупп сыграла статья [7]. Было показано, что данная группа занимает особое положение среди упорядоченных групп Ли. Это наблюдение затем подтвердилось в исследованиях [8, 9].

Важно отметить, что 4-мерная основная аффинная группа Ли является транзитивной группой изометрий стационарной вселенной де Ситтера, которая рассматривалась Хойлом и Нарликаром как альтернатива теории Большого Взрыва в космологии.

Пусть G — связная группа Ли и $P\subset G$ — полугруппа, содержащая единицу e. Примем по определению $P_x \equiv x\cdot P$. Биекцию $f\colon G\to G$ такую, что $f(e)=e$ и $f(P_x)=P_{f(x)}$ для любого элемента $x\in G$, будем называть *P-автоморфизмом.* Группу всех P-автоморфизмов обозначим через $\mathrm{Aut}(P)$.

Если N — однопараметрическая подгруппа, то множество $N_x\equiv x\cdot N$, где x — произвольный элемент, назовем *прямой, проходящей через точку x.* Луч, исходящий из точки x,— это множество вида $L_x\equiv x\cdot L$, где L — некоторая однопараметрическая полугруппа, содержащая единицу.

Квазиаффинным преобразованием называется гомеоморфизм $f\colon G\to G$, который любую прямую отображает на прямую.

Множество вида $E_x\equiv x\cdot E$, где E — k-мерная подгруппа, назовем *k-мерной плоскостью. Конус K_x с вершиной x* — это объединение лучей, исходящих из точки x.

Если $A \subset G$ — множество, то через $\bar{A}$, $\operatorname{int} A$ и ∂A соответственно обозначаются замыкание, внутренность и граница множества A.

Определение 1. *Квазиконтингенцией*, или *q-контингенцией*, множества $A \subset G$ в точке a называется конус, образованный всевозможными пределами лучей, исходящих из a и проходящих через $x \in G$, $x \neq a$, при стремлении x к a. Если точка a не является предельной для A, то по определению будем считать, что квазиконтингенция A в точке a — это $\{a\}$.

Обозначим квазиконтингенцию через $\mathrm{qc}(A, a)$. Нетрудно проверить, что q-контингенция является замкнутым конусом и $\mathrm{qc}(A, a) = \mathrm{qc}(\bar{A}, a)$.

Будем далее через H^n обозначать n-мерную связную односвязную основную аффинную группу Ли.

Пусть L — луч с началом e, K — конус с вершиной e, причем L, K не лежат в одной гиперплоскости и $L \cap K = \{e\}$. Полагаем

$$L \times K = \bigcup_{x \in A} L(e, x),$$

где $A = \bigcup_{x \in K} L_x$ и $L(e, x)$ — это луч, исходящий из точки e и проходящий через x, $x \neq e$. Множество $L \times K$ является конусом с вершиной e, причем $L \times K$ — полугруппа, если таковой был конус K.

Пусть $P \subset H^n$ — полугруппа, содержащая единицу. Если $\mathrm{qc}(P, e) \neq \neq L \times K$, то группа $\mathrm{Aut}(P)$ вычислена в [3, теорема 7]. Ниже мы опишем $\mathrm{Aut}(P)$ для случая $\mathrm{qc}(P, e) = L \times K$.

Если $M \subset H^n$ — подмножество, содержащее единицу, то по определению полагаем $M_x \equiv x \cdot M$, где $x \in H^n$. Получается семейство подмножеств $\mathcal{M} = \{M_x\colon\ x \in H^n\}$. Говорим, что *семейство $\mathcal{M}$ сохраняется при отображении* $f\colon H^n \to H^n$, если $f(M_x) = M_{f(x)}$ для любого $x \in H^n$.

Пусть E — k-мерная подгруппа, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, лежащая в абелевой подгруппе группы H^n. Тогда любое множество $E_x \equiv x \cdot E$, где $x \in H^n$, называется *k-мерной орисферой*. При этом одномерную орисферу называем *орициклом*.

Пусть L — луч с началом e, E — гиперплоскость, содержащая единицу e, и $L \cap E = \{e\}$. Предположим, что либо N — орицикл, где N — прямая, содержащая L, либо E — гипероорисфера. Обозначим через λ подмножество полугруппы L, гомеоморфное отрезку $[0, 1]$ вещественных чисел, причем образом 0 является единица e. Полагаем, что $\lambda_x \equiv x \cdot \lambda$, где $x \in H^n$, и назовем далее множество λ_x *отрезком*.

Определение 2. *Смещение* $d_{E\lambda}$ — это гомеоморфизм H^n, $n \geqslant 2$, на себя такой, что

1) $d_{E\lambda}(e) = e$;

2) для любой $x \in H^n$ имеем $d_{E\lambda}(\lambda_x) = \lambda_{d_{E\lambda}(x)}$, $d_{E\lambda}(E_x) = E_{d_{E\lambda}(x)}$;

3) $d_{E\lambda}|_E = \mathrm{id}_E$, т. е. ограничение $d_{E\lambda}$ на E является тождественным отображением.

Пусть $\partial\lambda = \{e, a\}$. Множество вида $x \cdot (\lambda \setminus \{e, a\})$ назовем *открытым отрезком с концами x, $x \cdot a$*.

Определение 3. *Квазицилиндр* $Q(E, \lambda)$ — это подмножество $M \subset H^n$, удовлетворяющее условиям:

1) M представимо в виде

$$M = \bigcup_n (M_n \cup (M \cap E_n)), \tag{1}$$

где $E_n = a^n \cdot E$, n целое, а M_n — объединение открытых отрезков с концами на плоскостях E_n, E_{n+1} (априори не исключается, что некоторые M_n пусты);

2) M не допускает представления (1) с той же плоскостью E и отрезком $\lambda' \subset L$ таким, что $\lambda' \neq \lambda$, но $\lambda \subset \lambda'$.

При $\lambda = L$ имеем соответственно смещение d_{EL} и квазицилиндр $Q(E, L)$. При $\lambda \neq L$ смещение $d_{E\lambda}$ и квазицилиндр $Q(E, \lambda)$ существуют не для всяких E, λ. Например, они не существуют, когда N — орицикл (это видно из доказательства теоремы 1).

Пусть P — полугруппа, содержащая единицу. Вводим следующую локальную аксиому Эйнштейна:

(AE) Существует окрестность единицы e такая, что в ней пересечение $\bar{P}\cap\bar{P}^{-1}$ не содержит точек, кроме e.

Теорема 1. *Пусть P — полугруппа в H^n, содержащая единицу и удовлетворяющая аксиоме* (AE). *Предположим, что* $\operatorname{qc}(P, e)=L\times K$, $L\subset N$, *где N — орицикл, $K\neq L_1\times K_1$,* $\operatorname{int}\operatorname{qc}(P, e)\neq\varnothing$. *Тогда либо любой непрерывный P-автоморфизм является квазиаффинным, либо $P=Q(E,L)$, т. е.*

$$P=\Big(\bigcup_{x\in U\cap E} L_x\setminus\{x\}\Big)\cup(P\cap E). \tag{2}$$

Здесь E — гиперплоскость, натянутая на K, и любой непрерывный P-автоморфизм имеет вид $f_0\circ d_{EL}$, где f_0 — квазиаффинное преобразование такое, что $f_0(E)=E$, U — некоторое множество.

Доказательство. (А) Пусть f: $H^n\to H^n$ — непрерывный P-автоморфизм. Из [3, теорема 5] следует, что $C=\operatorname{qc}(P, e)$ — коническая полугруппа, а f — C-автоморфизм. Отсюда легко выводится, что

$$f(E_x)=E_{f(x)},\quad f(N_x)=N_{f(x)}. \tag{3}$$

Но тогда $f|_E$: $E\to E$ сохраняет семейство $\{K_x\colon x\in H^n\}$. Согласно [3, теорема 1] $f|_E$ квазиаффинно. В соответствии с [3, теорема 4] имеем

$$f=g\circ\tilde{d}_{EL}, \tag{4}$$

где g — квазиаффинное преобразование, $g|_E=f|_E$, $g|_N=\mathrm{id}_N$, а $\tilde{d}_{EL}$ — смещение. Необходимо теперь понять, насколько произвольным может быть данное смещение. Для этого следует учесть то обстоятельство, что f является P-автоморфизмом.

(Б) Вводим в группе H^n систему координат $x_1, \ldots, x_n$, $x_1>-1/\sin\theta$, $0<\theta<\pi$, так, что групповая операция $x\cdot y$ записывается в виде

$$(x\cdot y)_1=[(x_1\sin\theta+1)(y_1\sin\theta+1)-1]\cdot(\sin\theta)^{-1},$$
$$(x\cdot y)_2=(x_1\sin\theta+1)(y_1\cos\theta+y_2)+x_1\cos\theta+x_2-(x\cdot y)_1\cdot\cos\theta,$$
$$(x\cdot y)_3=(x_1\sin\theta+1)y_3+x_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(x\cdot y)_n=(x_1\sin\theta+1)y_n+x_n,$$

где координаты x_1, x_3, …, x_n меняются вдоль прямых, проходящих через e и лежащих в E, а x_2 меняется вдоль орицикла N. При этом $x_2>0$ на L и $e=(0, \ldots, 0)$.

Построенная в H^n система координат может быть названа аффинной. В ней любая прямая задается с помощью соотношений $x_i=a_i\cdot t+b_i$ $(i=1, \ldots, n)$, где $t\in(\delta, +\infty)$, причем либо δ — число, либо $\delta=-\infty$.

С учетом равенств (3) P-автоморфизм f в указанных координатах приобретает вид

$$f(x)=(\varphi_1(x_1, x_3, \ldots, x_n),\ \varphi(x_2),\ \varphi_2(x_1, x_3, \ldots, x_n),\ \ldots,\ \varphi_{n-1}(x_1, x_3, \ldots, x_n)).$$

Для установления вида функции $\varphi(x_2)$ воспользуемся методом А. Д. Александрова, изложенным в [1, пп. 6.3—6.6], где переменная x_2 обозначается как ξ.

В результате с точностью до квазиаффинного преобразования прямой N вида $x_2\to k^{-1}x_2$ получаем

$$\varphi(x_2)=x_2+\vartheta(x_2),$$

где ϑ — периодическая функция и ее периодами являются значения $\alpha\neq0$, $\vartheta(\alpha)=0$, $\alpha\in\partial(P_a\cap N)$, $a\in E$ — произвольная точка.

Итак, имеем три возможности.

1. $\alpha \neq 0$ — периоды функции ϑ, не кратные никакому α_0. Тогда функция ϑ оказывается просто постоянной, а точнее, нулевой, ибо $\vartheta(\alpha)=0$. Следовательно, f вдоль N квазиаффинно, ибо $\varphi(x_2)\equiv x_2$.

2. Все значения $\alpha \neq 0$ кратны некоторому α_0, где α_0 наименьшее с этим свойством. Тогда α_0 — период функции ϑ, которая в остальном совершенно произвольна.

3. Единственно возможное значение — это $\alpha=0$. Тогда φ — любой гомеоморфизм.

В случае 1 смещение $\tilde{d}_{EL}$ свелось к квазиаффинному преобразованию вдоль N, т. е. P-автоморфизм f является квазиаффинным. Причем P не может иметь вид (2), ибо полугруппа (2) допускает нетривиальное смещение d_{EL}.

В случае 3 f — произвольный гомеоморфизм вдоль N. Это означает, что P имеет вид (2). Действительно, граница ∂M множества $M=P_a\cap N$ всегда состоит из одной точки $\alpha=0$. Следовательно, для любой $a\in E$ множество P_a содержит на прямой N весь луч L (либо $L\backslash\{e\}$) или $P_a\cap N=\varnothing$. Поэтому множество P пересекается с каждой прямой N_b, $b\in E$, по лучу L_b (или $L_b\backslash\{b\}$), если $P\cap N_b\neq\varnothing$. Но тогда P просто имеет вид (2).

Покажем, что случай 2 не выполняется. В самом деле, если случай 2 верен, то любое P_a, $a\in E$, пересекается с орициклом N только по отрезкам длины (в евклидовой метрике, которую можно ввести на орицикле N), кратной α_0. Пусть $E_n=a_n\cdot E$, где $E_0=E$, $a_n\in N$, n — целое число, и точка a_{n+1} отстоит от a_n вдоль N на расстоянии α_0. Тогда при отображении f все E_n остаются на месте, ибо $\vartheta(n\cdot\alpha_0)=0$. Поскольку ϑ может принимать произвольные значения на интервалах $(n\cdot\alpha_0,$ $(n+1)\cdot\alpha_0)$, то отсюда следует, что каждая прямая N_b, $b\in E$, пересекается с P по отрезкам прямых с концами на плоскостях E_n. Равным образом $(H^n\backslash P)\cap N_b$ — это отрезки с концами на E_n. Однако точно такое же утверждение справедливо для множеств $P_a\cap N$, $(H^n\backslash P_a)\cap N$, где $a\in E$ — произвольная точка. Поскольку выбор точки $a\in E$ произволен и E не является орисферой, перемещая a в e с помощью левого сдвига, получим, что множества

$$a^{-1}\cdot(P_a\cap N)=P\cap(a^{-1}\cdot N),\quad a^{-1}\cdot[(H^n\backslash P_a)\cap N]=(H^n\backslash P)\cap(a^{-1}\cdot N)$$

— это отрезки с концами, отнюдь не обязанными лежать на плоскостях E_n. Противоречие.

Итак, либо f квазиаффинно и P не имеет вид (2), либо P имеет вид (2) и тогда $f=f_0\circ d_{EL}$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть P — полугруппа в H^n, содержащая единицу и удовлетворяющая аксиоме* (AE). *Предположим, что* $\mathrm{qc}(P, e)=L\times K$, $K\subset E$, *где E — гиперорисфера,* $K\neq L_1\times K_1$, $\mathrm{int}\,\mathrm{qc}(P, e)\neq\varnothing$. *Тогда либо любой непрерывный P-автоморфизм является квазиаффинным, либо P есть квазицилиндр $Q(E, \lambda)$, причем случай $\lambda=L$ не исключается, а $f=f_0\circ d_{E\lambda}$, где f_0 — квазиаффинное преобразование.*

Доказательство. Повторяя п. (A) доказательства теоремы 1, получим, что f имеет вид (4) и справедливы равенства (3).

Пусть $h=g^{-1}\circ f$, т. е. $h=\tilde{d}_{EL}$. Для уточнения вида $h|_N$ необходимо учесть, что f — P-автоморфизм. Легко проверить, что h отображает полугруппу P на полугруппу $h(P)$, т. е. h отображает левоинвариантное семейство $\{P_x\colon x\in H^n\}$ на левоинвариантное семейство $\{h(P_x)\colon x\in H^n\}$. Это следует из того, что на H^n можно ввести координаты $u_1, \ldots, u_n$, $u_1>0$, в которых групповая операция будет вида

$$a\cdot b=(a_1\cdot b_1, a_1b_2+a_2, \ldots, a_1b_n+a_n),\quad e=(1, 0, \ldots, 0),$$

[2], а квазиаффинное преобразование в этих координатах задается обычными линейными выражениями. Более того, каждая прямая задается соотношениями вида $k_it+\mu_i$ $(i=1, \ldots, n)$, t — параметр.

Ясно, что $h(N_x)=N_{h(x)}$, $h(E_x)=E_{h(x)}$, $h|_E=\mathrm{id}_E$, $h(e)=e$.

Пусть $M_a=N_a\cap P$, $M'_a=N_a\cap h(P)$, где $a\in E$. Так как h — гомеоморфизм, то топологически множества M_a и $M'_a=h(M_a)$ устроены одинаково.

Введем N_a на левоинвариантную метрику ρ, индуцированную метрикой Лобачевского [2, 3]:

$$ds^2=u_1^{-2}\cdot\sum_{i=1}^{n}du_i^2.$$

Точка из ∂M_a, ближайшая к E относительно метрики ρ, переходит при отображении h в ближайшую к E точку из $\partial M'_a$, и, вообще, $\rho(b_1, E)<\rho(b_2, E)$, где $b_i\in\partial M_a$ $(i=1, 2)$ влечет $\rho(h(b_1), E)<<\rho(h(b_2), E)$. Пусть $\alpha(b_a)=E_{b_a}\cap N$, где $b_a\in\partial M_a$. Тогда $h(\alpha(b_a))==\alpha(h(b_a))$. Положим $A=\{\alpha(b_a)\colon a\in E\}$, $A'=\{h(\alpha(b_a))\colon a\in E\}$, и элементы множеств A и A' обозначим соответственно через $\alpha, \beta, \ldots$ и $\alpha', \beta', \ldots,$ где $\alpha'=h(\alpha)$, $\beta'=h(\beta)$ и т. д. В силу изложенного из $\rho(\alpha, E)<\rho(\beta, E)$ следует $\rho(\alpha', E)<\rho(\beta', E)$.

Если A содержит только один элемент $\alpha=e$, то, очевидно, $P==Q(E, L)$, а h — произвольное смещение d_{EL}. Это доказывается так же, как случай 3 в теореме 1 (см. п. (Б)). Значит, $f=f_0\circ d_{EL}$. Пусть A содержит более одного элемента. Возьмем $\alpha\neq e$, $\alpha\in A, \alpha=E_b\cap N, b\in\partial M_a$, и предположим, что b — ближайшая к E точка из ∂M_a. Тогда $b^2\in\in b\cdot\partial M_a=b\cdot\partial(N_a\cap P)=\partial(N_{ba}\cap P_b)$ — также ближайшая к E точка из $\partial(N_{ba}\cap P_b)$. Вообще, точка b^2 по отношению к E_b играет ту же роль, что b по отношению к E. Пусть $\beta=E_{b^2}\cap N$. Поскольку при левом сдвиге, переводящем b в α, каждая орисфера E_x остается на месте, а семейство $\{N_x\colon x\in H^n\}$ сохраняется, то $\rho(e, \beta)=2\rho(e, \alpha)$. Отображение h сохраняет данную конструкцию, и если $\alpha'=h(\alpha)$, $\beta'=h(\beta)$, то аналогично предыдущему $\rho(e, \beta')=2\rho(e, \alpha')$ вследствие левоинвариантности семейства $\{h(P_x)\colon x\in H^n\}$. Повторяя рассуждения, т. е. рассматривая точку $b^3\in\partial\left(N_{b^2a}\cap P_{b^2}\right)$, найдем точку $\gamma\in N$ такую, что $\rho(e, \gamma)==3\rho(e, \alpha)$, причем $h(\gamma)=\gamma'\in N$ и $\rho(e, \gamma')=3\rho(e, \alpha')$ и т. д. В результате получим такую последовательность точек $\{\alpha_n\}\subset N$, что $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\beta$, $\alpha_3=\gamma, \ldots, \rho(e, \alpha_n)=n\rho(e, \alpha)$, $\rho(\alpha_n, \alpha_{n+1})=\rho(e, \alpha)$, и при этом если $\alpha'_n=h(\alpha_n)$, то $\rho\left(e, \alpha'_n\right)=n\rho(e, \alpha')$, $\rho\left(\alpha'_n, \alpha'_{n+1}\right)=\rho(e, \alpha')$. Если указанная последовательность имеется для каждой точки $\alpha\in A$, $\alpha\neq e$, то говорим, что $h\colon N\to N$ обладает свойством α-периодичности.

Возможны два случая: среди точек множества A либо существует α_0, $\alpha_0\neq e$, такая, что любое число $\rho(e, \alpha)$, $\alpha\in A$, кратно $\rho(e, \alpha_0)$, либо не существует.

Первый случай означает, что существуют последовательность $\{(\alpha_0)_n\}\subset N$ и такое квазиаффинное преобразование $F\colon H^n\to H^n$, что $F|_E=\mathrm{id}_E$ и $F|_N$ — растяжение, для которых $(F^{-1}\circ h)((\alpha_0)_n)=(\alpha_0)_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ и $(F^{-1}\circ h)$ является произвольным гомеоморфизмом на каждом отрезке $((\alpha_0)_n, (\alpha_0)_{n+1})$ прямой N. Другими словами, $f=f_0\circ d_{E\lambda}$, а $P=Q(E, \lambda)$.

Во втором случае можно утверждать, что $h|_N$, а следовательно, и $f|_N$ квазиаффинно. И поскольку и $f|_E$ квазиаффинно, получаем, что f квазиаффинно в H^n. Действительно, в данном случае существуют последовательности $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}\subset N$ такие, что $\rho(e, \alpha_1)$ не кратно $\rho(e, \beta_1)$, где α_1, $\beta_1\neq e$. Без ограничения общности считаем, что $\alpha'_n=h(\alpha_n)=\alpha_n$ (в противном случае можно сделать растяжение вдоль прямой N). Пусть $\beta'_n=h(\beta_n)$. Предположим, что $\beta'_n\neq\beta_n$ и для определенности $\rho(e, \beta_1)<\rho\left(e, \beta'_1\right)$ (если это не верно, то вместо h рассматриваем h^{-1}). Пусть $\rho\left(\beta_1, \beta'_1\right)=\varepsilon>0$. Так как $\rho(e, \alpha_1)$ не кратно $\rho(e, \beta_1)$, то найдутся номера k и m такие, что

$$0<\rho(e,\ \alpha_m)-\rho(e,\ \beta_k)<\varepsilon. \qquad (5)$$

Поскольку h обладает свойством α- и β-периодичности, то $\rho(e,\beta_k')=\rho(e,\beta_k)+k\cdot\varepsilon$, $\rho(e,\alpha_m)=\rho(e,\alpha_m')$, и, следовательно, $\rho(e,\beta_k')>\rho(e,\alpha_m)$. Но это противоречит тому, что в силу гомеоморфности h из (5) должно следовать $\rho(e,\alpha_m)>\rho(e,\beta_k')$. Итак, $\beta_n'=\beta_n$. Но тогда в силу отсутствия кратности $\rho(e,\ \beta_1)$, $\rho(e,\ \alpha_1)$ и тождественности h на $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ заключаем, что h тождественна на N, т. е. f квазиаффинно.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть P — полугруппа в H^n, содержащая единицу и удовлетворяющая аксиоме* (AE). *Предположим, что* $\mathrm{qc}(P,\ e)=L\times K$, $K\neq L_1\times K_1$, $K\subset E$, *причем гиперплоскость E не является гипорорисферой, а L не лежит на орицикле. Тогда любой непрерывный P-автоморфизм является квазиаффинным.*

Доказательство следует из [3, теорема 4, п. 7].

Замечание. Отказ от ограничения $K\neq L_1\times K_1$ приведет к тому, что полугруппа P может оказаться квазицилиндром в нескольких «направлениях». Например, при $P=L\times L_1\times K_1$ возможно, что $P=Q(E,L)$ и $P=Q(E_1,\ L_1)$, где плоскость E_1 натянута на L и K_1; соответственно $f=f_0\circ d_{EL}\circ d_{E_1L_1}$. Устанавливается это методами, изложенными при доказательстве теорем 1 и 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.* Отображения упорядоченных пространств // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1972. Т. 128. С. 3—21.
2. *Гуц А. К.* Отображения упорядоченного пространства Лобачевского // Докл. АН СССР. 1974. Т. 215, № 1. С. 35—37.
3. *Гуц А. К.* Отображения упорядоченного пространства Лобачевского // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 3. С. 51—67.
4. *Гуц А. К., Шаламова Н. Л.* Порядковые автоморфизмы лиевых групп // X Всесоюз. симпоз. по теории групп: Тез. докл. Минск: Ин-т математики АН БССР, 1986. С. 71.
5. *Гуц А. К.* Порядковые автоморфизмы основной аффинной группы Ли // XIX Всесоюз. алгебраическая конф.: Тез. сообщ. Львов: Ин-т прикладных проблем механики и математики АН УССР, 1987. С. 79—80.
6. *Левичев А. В.* Левоинвариантный лоренцев порядок на основной аффинной группе Ли // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 3. С. 152—156.
7. *Hofmann K. H., Lawson J. D.* The local theory of semigroup in nilpotent Lie groups // Semigroup Forum. 1981. V. 23. P. 334—357.
8. *Hilgert J., Hofmann K. H.* Lorentzian cones in real Lie algebras // Monatsh. Math. 1985. V. 100. P. 183—210.
9. *Левичев А. В.* Алгебры Ли, допускающие эллиптические полуалгебры // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20, № 2. С. 72—73.

г. Омск

Статья поступила 16 октября 1990 г.