А. К. Гуц, Н. Л. Шаламова, Аффинно упорядоченные группы Ли и аксиоматизация псевдоевклидовой геометрии, *Докл. РАН*, 1993, том 332, номер 3, 283–285

ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1993, том 332, № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 513.82:519.46

АФФИННО УПОРЯДОЧЕННЫЕ ГРУППЫ ЛИ И АКСИОМАТИЗАЦИЯ ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

© 1993 г. А. К. Гуц, Н. Л. Шаламова

Представлено академиком А.Д. Александровым 15.01.93 г.

Поступило 03.02.93 г.

Данная заметка посвящена аффинным порядкам на трехмерных разрешимых группах Ли, т.е. таким порядкам, которые в аффинных координатах, принадлежащих аффинной структуре рассматриваемой группы, задаются семействами конусов. Целью является выяснение связи между различными аффинными структурами на трехмерных группах Ли и порядками, которые относительно этих структур реализуются как семейства конусов. Полученную теорему 1 используем для аксиоматизации псевдоевклидовой геометрии.

1. Пусть G – трехмерная связная односвязная разрешимая группа Ли и

$$\alpha_i: G \longrightarrow \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^3), \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

есть просто транзитивное аффинное действие G на $\mathbb{R}^3$. Здесь через $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^3)$ обозначена группа всех аффинных преобразований 3-мерного арифметического пространства. Действия α_1 и α_2 называются а ф ф и н н о с о п р я ж е н н ы м и, если существует аффинная биекция $A: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ такая, что $\alpha_1(g) = A \circ \alpha_2(g) \circ A^{-1}$ для любого $g \in G$.

А ф ф и н н а я л е в о и н в а р и а н т н а я с т р у к т у р а на G – это гладкая структура, для которой все функции перехода и левые сдвиги, записанные в координатах, продолжаемы до преобразований из $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^3)$. Просто транзитивное аффинное действие (1) задает п о л н у ю левоинвариантную аффинную структуру $\mathcal{A}_i$ на группе Ли G. В самом деле, рассмотрим диффеоморфизмы

$$\varphi_i: G \longrightarrow \mathbb{R}^3, \; i = 1, 2,$$

$$G \ni g \xrightarrow{\varphi_i} \alpha_i(g)(e) = x(i) = (x^1, x^2, x^3), \; i = 1, 2,$$

где $e \in \mathbb{R}^3$ – фиксированная точка. Числа x^1, x^2, x^3 – система аффинных координат на $\mathbb{R}^3$. Тогда их можно использовать в качестве аффинных координат $\mu_i: g \longrightarrow (x^1, x^2, x^3)$ на G.

Две аффинные структуры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ на G называются э к в и в а л е н т н ы м и, если существует аффинная биекция $A: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ такая, что для систем координат

$$G \xrightarrow{\mu_1} \mathbb{R}^3, \; G \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{R}^3,$$

принадлежащих структурам $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ соответственно, имеет место равенство $\mu_2 \circ \mu_1^{-1} = A$.

П р е д л о ж е н и е. *Две левоинвариантные аффинные структуры на группе Ли G, задаваемые аффинными действиями α_1 и α_2, эквивалентны тогда и только тогда, когда эти действия аффинно сопряжены.*

Рассмотрим на группе Ли G левоинвариантный частичный порядок $\le$, задающий семейство подмножеств $\mathfrak{P} = \{P_x: x \in G\}$, где $P_x = \{y \in G: x \le y\}$. Тогда имеем частичный порядок на $\mathbb{R}^3$, задаваемый семейством подмножеств [4]

$$\mathfrak{P}_i = \varphi_i(\mathfrak{P}) = \{\varphi_i(P_g): P_g \in \mathfrak{P}\}.$$

Порядок $\mathfrak{P}_i$ является $\alpha_i(G)$-инвариантным, т.е. если положить $P_{ix(i)} = \varphi_i(P_g)$, где $x(i) = \varphi_i(g)$, то

$$\alpha_i(h)\,(P_{ix(i)}) \;=\; P_{i\alpha_i(h)\,(x(i))}$$

для любого $h \in G$.

Рассмотрим диффеоморфизм

$$f = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3. \tag{2}$$

Ясно, что $f(P_{1x(1)}) = P_{2f(x(1))}$ для любой точки $x(1) \in \mathbb{R}^3$.

Полная левоинвариантная аффинная структура $\mathcal{A}$, порождаемая действием α на G, называется н о р м а л ь н о й, если в ней левые сдвиги L_a, где a – элемент максимальной абелевой подгруппы, задаются в виде параллельных переносов: $[L_a(x)]^k = x^k + a^k$, $k = 1, 2, 3$. Соответствующее просто транзитивное действие α также называем н о р м а л ь н ы м.

Т е о р е м а 1. *Пусть действие α_1 нормально, а $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$ состоят из эллиптических конусов. Тогда действия α_1 и α_2 аффинно сопряжены, а соответствующие левоинвариантные аффинные структуры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ аффинно эквивалентны. Отображение (2) при этом является аффинной биекцией.*

Омский государственный университет

2. Аксиоматизация псевдоевклидовой геометрии. Нашей целью является выделение трехмерного псевдоевклидова пространства ${}_1E^3$ сигнатуры $\langle + - - \rangle$ среди аффинно упорядоченных однородных аффинных лоренцевых многообразий. В основе нашего подхода лежат идеи построения синтетической теории однородных лоренцевых многообразий, изложенные в статье [1].

Обозначим: $\Pi(3)$ – группа изометрий пространства ${}_1E^3$; будем называть ее группой Пуанкаре.

С учетом теории однородных пространств и групп Ли вместо задачи аксиоматизации однородного лоренцевого многообразия будем решать задачу аксиоматизации (на основе представления о частичном порядке) лоренцевой группы Ли G_3, т.е. связной односвязной разрешимой группы Ли, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой.

Аксиоматизировать лоренцеву группу Ли G_3, допускающую полную левоинвариантную аффинную структуру, – это значит решить последовательно следующие две задачи:

1) оснастить абстрактную группу G полной левоинвариантной аффинной структурой;

2) ввести в G лоренцеву метрику g, не используя понятия гладкого тензорного поля.

Первая задача решена В.К. Иониным [2, 3]. Структура односвязного аффинного многообразия на абстрактной группе G есть структура рода $\langle G, \Gamma, \Phi, \Psi \rangle$, где Γ – множество всех аффинных преобразований вещественной прямой $\mathbb{R}$, а множества

$$\Phi \subset \mathbb{R}^G, \quad \Psi \subset G^{\mathbb{R}}$$

удовлетворяют условиям:

(АИ1) для любых $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ суперпозиция $\psi \circ \varphi \in \Gamma$;

(АИ2) Φ максимально, т.е. если $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$, но $f \notin \Phi$, то существует $\psi \in \Psi$ такое, что $\psi \circ f \notin \Gamma$;

(АИ3) Ψ максимально, т.е. если $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$, но $f \notin \Psi$, то существует $\varphi \in \Phi$ такое, что $f \circ \varphi \notin \Gamma$;

(АИ4) если $x, y \in G$, то существует $\varphi \in \Phi$ такое, что $x, y \in \varphi(\mathbb{R})$;

(АИ5) если $x, y \in G$, $x \neq y$, то существует $\psi \in \Psi$ такое, что $\psi(x) \neq \psi(y)$.

Аффинное преобразование $h\colon G \longrightarrow G$ в этих терминах определяется как такое отображение, для которого $\psi \circ h \circ \varphi \in \Gamma$ при любых $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$.

Множество $\{\varphi(\mathbb{R})\colon \varphi \in \Phi_0\}$, где $\Phi_0 \subset \Phi$ – подмножество непостоянных отображений, по определению есть множество прямых в G. Луч с началом $x \in G$ – это множество $\varphi(\mathbb{R}_+)$, где $\varphi \in \Phi_0$ и $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R}\colon t \geq 0\}$, $\varphi(0) = x$.

Естественным образом определяется размерность $\dim G$ аффинной структуры (см. [2]).

Аффинная структура $\langle G, \Gamma, \Phi, \Psi \rangle$ левоинвариантная, если каждый левый сдвиг $L_a\colon x \longrightarrow ax$ является аффинным преобразованием.

Левоинвариантная n-мерная аффинная структура $\langle G, \Gamma, \Phi, \Psi \rangle$ называется нормальной, если для любых $x, y \in G$ и $t \in T$, где T – максимальная абелева подгруппа группы G, существует единственная $z \in G$ такая, что $\psi(z) - \psi(y) = \psi(L_t(x)) - \psi(x)$ для произвольного $\psi \in \Psi$.

Точка $a \in M \subset G$, где G оснащена аффинной структурой, называется внутренней для M, если для любого $\varphi \in \Phi_0$ такого, что $a \in \varphi(\mathbb{R})$, существуют α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$, для которых $a \in \varphi((\alpha, \beta))$ и $\varphi((\alpha, \beta)) \subset M$. Множество внутренних точек для M обозначаем как $\operatorname{int} M$.

Вторую задачу решаем следующим образом. Пусть G – абстрактная группа, оснащенная левоинвариантной аффинной структурой $\langle G, \Gamma, \Phi, \Psi \rangle$. Предположим, что на G задан левоинвариантный порядок $\mathfrak{P} = \{P_x\colon x \in G\}$, удовлетворяющий условиям:

(АР1) множество $P \equiv P_e$, где e – единица группы, является конусом с вершиной e, т.е. объединением лучей с вершиной e;

(АР2) аффинная оболочка множества P, т.е. объединение всех прямых, пересекающихся с P, не менее чем по двум точкам, совпадает с G;

(АР3) множество P замкнуто, т.е. все точки множества $G \backslash P$ внутренние;

(АР4) конус P эллиптический, т.е. для любых двух $x, y \in P$, $x, y \neq e$, $x \neq y$, не являющихся внутренними точками для P, существует аффинное преобразование $f \in \operatorname{Aff}(G)$ такое, что $f(e) = e$, $f(P) = P$ и $f(x) = y$;

(АР5) группа $\operatorname{Aut}(\mathfrak{P})_e$ действует транзитивно на $\operatorname{int} P$; здесь через $\operatorname{Aut}(\mathfrak{P})_e$ обозначен стабилизатор в e группы $\operatorname{Aut}(\mathfrak{P})$ всех порядковых автоморфизмов, т.е. биекций $f\colon G \longrightarrow G$ таких, что $f(P_x) = P_{f(x)}$.

Теорема 2. *Пусть G – абстрактная группа, оснащенная левоинвариантной нормальной аффинной трехмерной структурой $\langle G, \Gamma, \Phi, \Psi \rangle$ и левоинвариантным порядком $\mathfrak{P}$, удовлетворяющим условиям* (АР1) - (АР5).

Тогда G допускает структуру связной односвязной разрешимой группы Ли с левоинвариантной полной аффинной структурой, порожденной структурой В.К. Ионина $\langle G, \Gamma, \Phi, \Psi \rangle$, и левоинвариантную лоренцеву плоскую метрику

g такую, что в некоторых глобальных аффинных координатах x_1, x_2, x_3

$$P_x = \{ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3: \sum_{\substack{i,j=1 \\ x=(x_1,x_2,x_3)}}^{3} g_{ij}(z_i - x_i)(z_j - x_j) \geq 0 \quad u \quad z_i \geq x_i \}, \tag{3}$$

$$g_x(\xi, \eta) = g_{ij} \cdot \xi^i \eta^j, \ g_{ij} = \mathrm{const}. \tag{4}$$

Следовательно, порядок $\mathfrak{P}$ является причинным относительно метрики g, т.е. любой вектор ξ, отложенный из точки x и лежащий в конусе P_x, является непространственноподобным в точке x относительно g, а G – просто транзитивная подгруппа группы Пуанкаре П(3).

Итак, теорема 2 выделяет те группы, которые, с одной стороны, допускают псевдоевклидову геометрию, но, с другой стороны, метрика этой геометрии в глобальной аффинной карте должна порождать релятивистский причинный порядок (3), (4). Групповая, аффинная и порядковая структуры на G, увязанные вместе аксиомами (АИ1) - (АИ5), (АР1) - (АР5), несомненно, определяют на G псевдоевклидову геометрию, не требуя от G быть абелевой. Отметим, что если G априори не является абелевой, то нужную абелеву подгруппу, действующую на G просто транзитивно (и значит, несущую псевдоевклидову структуру), можно выделить из Aut($\mathfrak{P}$), совпадающей с полупрямым произведением П(3) × {подобия}.

Таким образом, псевдоевклидова геометрия не столь сильно связана с абелевостью несущей ее группы, как неявно предполагалось в исследованиях по аксиоматической теории относительности (см. обзор [4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абдрахимова Н.Р., Гуц А.К., Шаламова Н.Л.* // ДАН. 1988. Т. 303. № 4. С. 777 - 781.
2. *Ионин В.К.* // Геометр. сборник. Томск: Изд-во Томск. ун-та. 1982. № 23. С. 3 - 16.
3. *Ионин В.К.* // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1987. Т. 9. С. 78 - 84.
4. *Гуц А.К.* // УМН. 1982. Т. 37. №. 2. С. 39 - 79.